



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

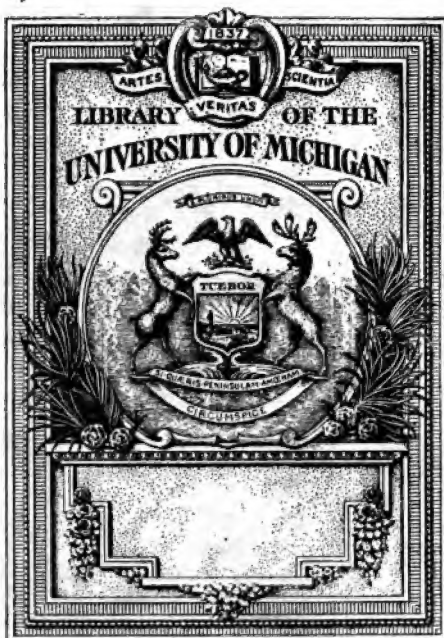
About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>

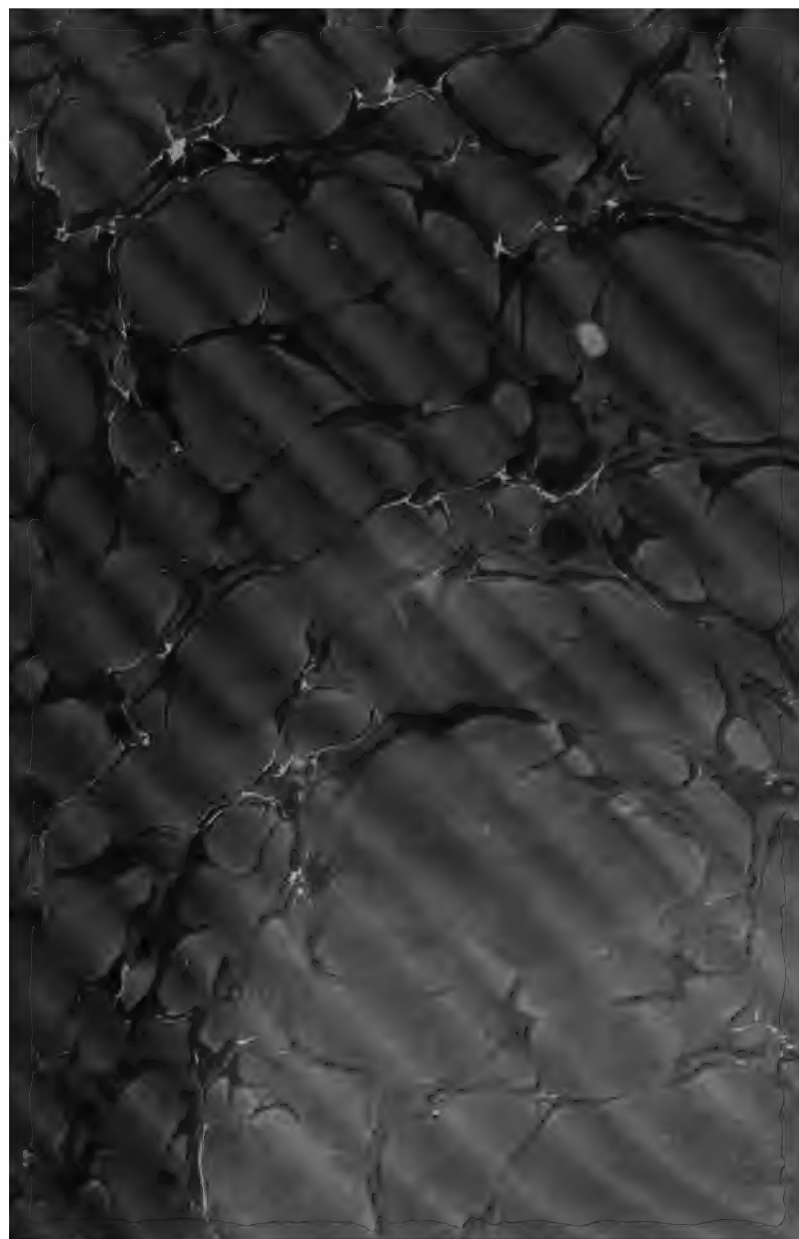
A

806,975





THE GIFT OF
PROF. ALEXANDER ZIWET





Grad. R. 2.1

PA

3971

. 112

1883



5

1.6

^e
EUCLIDIS

O P E R A O M N I A.

EDIDERUNT

I. L. HEIBERG ET H. MENGE.



LIPSIAE

IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI.

MDCCCLXXXV.

5
16
Alexander Zinck
EUCLIDIS

E L E M E N T A.

EDIDIT ET LATINE INTERPRETATUS EST

I. L. HEIBERG,

DR. PHIL.

UOL. IV.

LIBROS XI—XIII CONTINENS.



LIPSIAE

IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI.

MDCCCLXXXV.

184

LIPSIÆ: TYPIS B. G. TEUBNERI.

Mad. 1

Reg. Alex. Ziviet
95.

12-17-1923

PRAEFATIO.

Prodit iam, uti dixeram in uol. II p. XXII, quartum Elementorum uolumen ante tertium, id quod hoc adtulit incommodum, quod propositiones quaedam libri X non iis numeris citandae erant, quibus in editionibus uulgatis feruntur, sed iis, quibus in hac editione cum codicibus significabuntur. sed hoc incommodum edito tertio uolumine sublatum erit, et nunc quoque propositiones illae facile reperientur addita ad numerum a me citatum unitate.

In hoc uolumine praeter codices solitos PBFV*) (u. uol. I p. VIII—IX) his subsidiis usus sum:

b — cod. Bononiensi, de quo u. uol. I p. IX; extremam partem libri XI et totum librum XII in append. II recepi, sicut in codice legitur; cfr. p. 385 not.

q — cod. Parisino 2344, de quo u. uol. II p. V. usurpatus est ab initio libri XII, quia in XII, 3 p. 154, 7 deficit F.

*) Hoc loco additamenta quaedam cod. B subiungam, quibus in adparatu locus non fuit. XI, 4 enim p. 14, 1 supra ἀπειλήφθωσαν add. τεμῆσθωσαν m. rec. XI, 10 p. 30, 2 supra παρὰ add. ἤτοι παράλληλοι ταῖς δυσιν εὐθείαις ταῖς ἀπτομέναις ἀλλήλων m. rec. XII, 12 p. 208, 9 in mg. add. pro scholio ὁρθῇ γὰρ ἑκατέρᾳ αὐτῶν m. 1.

L — cod. palimpsesto Londinensi Musei Britannici Add. 17211, qui praeter partes quasdam libri X etiam XIII, 14 continet ab initio p. 296, 3 ad uocabulum *ιση* p. 300, 4. de hoc codice pluribus egi et scripturam plenam edidi in Philologi uol. XLIV p. 353—366.

Praevideram fore, ut inter hoc uolumen et prius satis magnum temporis spatium intercederet; sed maius etiam euenit, quam putaueram, quia interim nouum munus scholasticum suscepi et praeterea alio opere ad usum scholarum destinato occupatus fui. sed finito iam hoc labore et primis difficultatibus noui officii superatis spero, me breui hoc opus diuturnum ad finem perducturum esse, praesertim cum materiam reliquorum uoluminum iam omnem fere collectam habeam.

Scr. Hauniae mense Iunio MDCCCLXXXV.

I. L. Heiberg.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ.

ια'.

Όροι.

α'. Στερεόν ἐστὶ τὸ μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος ἔχον.

β'. Στερεοῦ δὲ πέρας ἐπιφάνεια.

5 γ'. Εὐθεῖα πρὸς ἐπίπεδον ὀρθή ἐστίν, ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὐσας ἐν τῷ [ὑποκειμένῳ] ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιῇ γωνίας.

δ'. Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστίν, ὅταν αὖ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἐνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ᾖσιν.

ε'. Εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον κλίσεις ἐστίν, ὅταν ἀπὸ τοῦ μετεώρου πέρατος τῆς εὐθείας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ, καὶ ἀπὸ τοῦ γενομένου σημείου
15 ἐπὶ τὸ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ πέρας τῆς εὐθείας εὐθεῖα ἐπι-
ξευχθῇ, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῆς ἀχθείσης καὶ
τῆς ἐφεστώσης.

ς'. Ἐπιπέδον πρὸς ἐπίπεδον κλίσεις ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὀξεῖα γωνία ὑπὸ τῶν πρὸς ὀρθὰς τῇ κοινῇ
20 τομῇ ἀγομένων πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ ἐν ἑκατέρῳ τῶν
ἐπιπέδων.

Def. 1—2. Hero def. 13, Psellus p. 49. 3—4. Hero def. 115, 2.

Εὐκλείδου στοιχείων ια PV et b, sed mg. m. 1: γρ. στερεῶν. Εὐκλείδου στερεῶν α στοιχ. ια B. Εὐκλείδου στερεῶν ια, add. στοιχείων F. 1. ὅροι] om. codd. Numeros om. codd. 7. ὑποκειμένῳ] supra scr. m. rec. P, supra m. 1 V; αὐτῷ b, mg.

XI.

Definitiones.

1. Solidum est, quod longitudinem et latitudinem et altitudinem habet.

2. Terminus autem solidi superficies est.

3. Recta ad planum perpendicularis est, ubi ad omnes rectas eam tangentes et in plano illo ductas rectos angulos efficit.

4. Planum ad planum perpendicularare est, ubi rectae ad communem sectionem planorum perpendiculares in alterutro planorum ductae ad alterum planum perpendiculares sunt.

5. Rectae ad planum inclinatio est, ubi ab elevato termino rectae ad planum perpendicularis ducitur, et ab puncto ita orto ad terminum rectae in plano positum recta ducitur, angulus a recta ita ducta et ab erecta comprehensus.

6. Plani ad planum inclinatio est angulus acutus comprehensus a rectis in utroque plano ad idem punctum perpendicularibus ad communem sectionem ductis.

m. 1: γρ. ὑποκειμένῳ; F mg. m. 1: γρ. ἐν τῷ ἀντῷ. ποιεῖ F, et P, corr. m. 2. 9. πρὸς — 10. ἐπιπέδων] mg. m. 1 V. 10. τῷ] καὶ τῷ V, καὶ supra scr. m. 2 F. 12. εὐθείας] -ας post ins. m. 1 P. εὐθείας — 17. ἐφεστώσης] m. 2 B, om. Fb. 15. ἐπὶ τό] P, ἀπὸ τοῦ B (sed corr.), in ras. V, m. rec. P. πέρας] P, πέρα-τος B (sed corr.), e corr. V, m. rec. P. 19. ὀξεῖα] om. V (ras. est 3 litt.). 20. Post τομῇ spatium 4 litt. relinquitur in F. τῶν ἐπιπέδων] corr. ex τῆς ἐπιπέδου m. 1 b.

ξ'. Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὁμοίως κεκλίσθαι λέγεται καὶ ἕτερον πρὸς ἕτερον, ὅταν αἱ εἰρημέναι τῶν κλίσεων γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ᾖσιν.

η'. Παράλληλα ἐπίπεδά ἐστι τὰ ἀσύμπτωτα.

θ'. Ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα ἴσων τὸ πλήθος.

ι'. Ἴσα δὲ καὶ ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα ἴσων τῷ πλήθει καὶ τῷ μεγέθει.

ια'. Στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο γραμμῶν ἀπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ οὐσῶν πρὸς πάσαις ταῖς γραμμαῖς κλίσις. Ἄλως· στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο γωνιῶν ἐπιπέδων περιεχομένη μὴ οὐσῶν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ἐνὶ σημείῳ συνισταμένων.

ιβ'. Πυραμὶς ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον ἀπὸ ἐνὸς ἐπιπέδου πρὸς ἐνὶ σημείῳ συνεστῶς.

ιγ'. Πρίσμα ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον, ὧν δύο τὰ ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὁμοιά ἐστι καὶ παράλληλα, τὰ δὲ λοιπὰ παραλληλόγραμμα.

ιδ'. Σφαῖρά ἐστὶν, ὅταν ἡμικυκλίου μενούσης τῆς διαμέτρου περιενεχθῇ τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθῇ σχῆμα.

ιε'. Ἀξων δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεΐα, περὶ ἣν τὸ ἡμικύκλιον στρέφεται.

ισ'. Κέντρον δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶ τὸ αὐτό, ὃ καὶ τοῦ ἡμικυκλίου.

8. Hero def. 115, 2. 9. ib. 118, 2. 11. ib. 24.
12. ib. 100. 14. ib. 77. 11—15. Psellus p. 49—50.

3. ὡσι Vb. 4. παράλληλα ἐπί- in ras., -πεδα mg. m.
2 V. 5. ὑπό] corr. ex ἀπό m. 1 b. 12. πρὸς] B; ἡ πρὸς

7. Planum ad planum similiter inclinatum dicitur atque aliud planum ad aliud, ubi anguli inclinationum, quos definiuimus, aequales sunt inter se.

8. Parallela plana sunt, quae non concurrunt.

9. Similes figurae solidae sunt, quae planis similibus continentur numero aequalibus.

10. Aequales autem et similes figurae solidae sunt, quae planis similibus continentur et numero et magnitudine aequalibus.

11. Solidus angulus est amplius quam duarum rectarum inter se tangentium nec in eadem superficie positarum ad omnes rectas inclinatio.¹⁾ Aliter. Solidus angulus est, qui amplius quam duobus angulis planis continetur non in eodem plano positis et ad unum punctum coniunctis.

12. Pyramis est figura solida planis comprehensa, quae ab uno plano ad unum punctum componitur.

13. Prisma est figura solida planis comprehensa, quorum duo opposita et aequalia et similia sunt, reliqua autem parallelogramma.

14. Sphaera est figura comprehensa, ubi manente diametro semicirculi semicirculus circumactus rursus ad eundem locum restituitur, unde ferri coeptus est.

15. Axis autem sphaerae est recta manens, circum quam semicirculus circumagitur.

16. Centrum autem sphaerae idem est ac semicirculi.

1) Haec definitio, quae loquendi genere ab Euclide abhorret, fortasse ex Elementis antiquioribus ab eo desumpta est.

PFV b. 13. ἐπιπέδων'' γωνιῶν' F, ἐπιπέδων γωνιῶν B.
15. Ante ἐνί del. ἐν F. 17. συνεστός Bb; in P non liquet.
18. ἐστίν PF. 19. ὧν] om. φ. 20. ἐστίν F. 22. τὸ ἡμι-
κύκλιον] mg. m. 1 b. 26. ἐστίν F.

ιζ'. Διάμετρος δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν εὐθεΐα τις διὰ τοῦ κέντρου ἡγμένη καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

ιη'. Κῶνός ἐστιν, ὅταν ὀρθογωνίου τριγώνου με-
 5 νούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιενεχθὲν τὸ τρίγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα. καὶν μὲν ἢ μένουσα εὐθεΐα ἴση ἢ τῇ λοιπῇ [τῇ] περὶ τὴν ὀρθὴν περιφερομένη, ὀρθογώνιος ἐστὶν ὁ κῶνος,
 10 ἐὰν δὲ ἐλάττων, ἀμβλυγώνιος, ἐὰν δὲ μεῖζων, ὀξυγώνιος.

ιθ'. Ἀξων δὲ τοῦ κῶνου ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεΐα, περὶ ἣν τὸ τρίγωνον στρέφεται.

κ'. Βάσις δὲ ὁ κύκλος ὁ ὑπὸ τῆς περιφερομένης
 15 εὐθείας γραφόμενος.

κα'. Κύλινδρος ἐστὶν, ὅταν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιενεχθὲν τὸ παραλληλόγραμμον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι,
 20 τὸ περιληφθὲν σχῆμα.

κβ'. Ἀξων δὲ τοῦ κυλίνδρου ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεΐα, περὶ ἣν τὸ παραλληλόγραμμον στρέφεται.

κγ'. Βάσεις δὲ οἱ κύκλοι οἱ ὑπὸ τῶν ἀπεναντίον περιεγομένων δύο πλευρῶν γραφόμενοι.

25 κδ'. Ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροί εἰσιν, ὧν οἷ τε ἄξονες καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων ἀνάλογόν εἰσιν.

18. Hero def. 84, 2. 21—23. ib. 96. 18—23. Psellus p. 50.

1. σφαίρας] σ- supra scr. m. 1 P. 3. τά] om. b. μέρει φ.
 4. τρι- in ras. m. 1 B. 5. πλευρᾶς μιᾶς V. τῶν] corr. ex
 τοῦ m. 1 b. ὀρθὴν] om. V b, -ν euan. F. γωνία φ. 8. τῇ]

17. Diametrus autem sphaerae est recta aliqua per centrum ducta et ad utramque partem superficie sphaerae terminata.

18. Conus est figura comprehensa, ubi manente alterutro latere trianguli rectanguli eorum, quae rectum angulum comprehendunt, triangulus circumactus rursus ad eundem locum restituitur, unde ferri coeptus est. et si recta manens aequalis est reliquae ad angulum rectum positae, quae circumagitur, conus rectangulus erit, sin minor est, obtusiangulus, sin maior, acutiangulus.

19. Axis autem conici recta est manens, circum quam triangulus circumagitur.

20. Basis autem circulus est, qui a recta circumacta describitur.

21. Cylindrus est figura comprehensa, ubi alterutro laterum parallelogrammi rectanguli rectum angulum comprehendentium manente parallelogrammum circumactum rursus ad eundem locum restituitur, unde ferri coeptum est.

22. Axis autem cylindri recta est manens, circum quam parallelogrammum circumagitur.

23. Bases autem circuli sunt, qui a duobus lateribus inter se oppositis in circumagendo describuntur.

24. Similes conici et cylindri sunt, quorum axes et basium diametri proportionales sunt.

m. rec. P, om. Vbφ. 9. Post ὁρθήν add. γωνίαν Psellus et F, sed punctis del. 10. ἀμβυγωνιος φ. 12. δέ] supra scr. m.
 1 V. εὐθεία] om. V. 16. δέ ἐστίν V. 18. γωνίαν] om.
 B. 23. βάσις Vbφ. ἀπεναντίων b. 26. ἀνάλογοι Vb.
 ὧσιν F, εἰσι Vb.

κε'. Κύβος ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ἑξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενον.

κς'. Ὀκτάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ὀκτὼ τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

5 κζ'. Εἰκοσάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

κη'. Δωδεκάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον.

10

α'.

Εὐθείας γραμμῆς μέρος μὲν τι οὐκ ἔστιν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι ἐν μετεωροτέρῳ.

15 Εἰ γὰρ δυνατόν, εὐθείας γραμμῆς τῆς $AB\Gamma$ μέρος μὲν τι τὸ AB ἔστω ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι τὸ $B\Gamma$ ἐν μετεωροτέρῳ.

Ἔσται δὴ τις τῇ AB συνεχῆς εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ. ἔστω ἡ $B\Delta$. δύο ἄρα εὐθειῶν τῶν $AB\Gamma$, $AB\Delta$ κοινὸν τμήμα ἐστὶν ἡ AB .
20 ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, ἐπειδήπερ ἐὰν κέντρῳ τῷ B καὶ διαστήματι τῷ AB κύκλον γράψωμεν, αἱ διάμετροι ἀνίσους ἀπολήφονται τοῦ κύκλου περιφερείας.

Εὐθείας ἄρα γραμμῆς μέρος μὲν τι οὐκ ἔστιν ἐν

25. Hero def. 104.

26. ib. 102.

27. ib. 101.

28. ib. 103.

25—28. Psellus p. 50—51.

2. Post ἴσων eras. καὶ ἰσοπλεύρων V. Def. 27—28 hoc ordine habent P et Psellus; permutavit Theon (BFVb).

5. σχῆμα στερεόν] τό V, et b, sed mg. m. 1: γρ. σχῆμα στερεόν. εἴκοσι] ἢ F. 7. ἐστὶν F. δώδεκα] in ras. V. 8. -γωνίων supra ras. m. 1 V. 10. θεωρημα α' V. 12. τι ἐν]

τι ἐν τῷ BF. μετεώρῳ b, mg. m. 1: γρ. ἐν τῷ μετεωροτέρῳ.

16. ἐν] ἐν τῷ F. 18. ἄρα] δὴ B, supra scr. m. 1.

25. Cubus est figura solida sex quadratis aequalibus comprehensa.

26. Octaëdrum est figura solida octo triangulis aequalibus et aequilateris comprehensa.

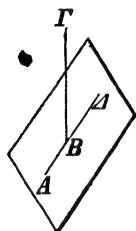
27. Icosaëdrum est figura solida uiginti triangulis aequalibus et aequilateris comprehensa.

28. Dodecaëdrum est figura solida duodecim pentagonis aequalibus et aequilateris et aequiangulis comprehensa.

I.

Fieri non potest, ut rectae lineae pars sit in plano subiacenti, pars autem in eleuatiore.

Nam si fieri potest, rectae lineae $AB\Gamma$ pars AB sit in plano subiacenti, pars autem $B\Gamma$ in eleuatiore.



erit igitur in plano subiacenti recta aliqua rectam AB in directum continuans. sit $B\Delta$. itaque duarum rectarum $AB\Gamma$, $AB\Delta$ pars communis est AB ; quod fieri non potest, quia, si centro B , radio autem AB circulum descripserimus, diametri [$AB\Gamma$, $AB\Delta$] inaequales arcus circuli abscindunt.¹⁾

Ergo fieri non potest, ut rectae lineae pars sit in

1) Eos scilicet, qui inter puncta A , Γ et inter A , Δ positi sunt. tum cfr. I def. 17.

19. δοθειςῶν εὐθειῶν Theon (BFVb). AB] B in ras. m. 1 B. ἦ] in ras. V, τό b. 20. ἐστιν] om. V. ἐπειδήπερ — 22. περιφερείας] P (ἐάν m. 1 ex ἄν corr.); εὐθεῖα γὰρ εὐθεία οὐ συμβάλλει κατὰ πλείονα σημεία ἢ καθ' ἑν· εἰ δὲ μή, ἐφαρμόσουσιν ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι Theon? (BFVb); idem mg. m. rec. P., add. οὕτως ἐν ἄλλοις εὐρηται, ἔπειτα τό· εὐθείας ἄρα γραμμῆς.

τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ ἐν μετεωροτέρῳ ὅπερ
ἔδει δεῖξαι.

β'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, ἐν ἐνί
5 εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἐνί ἐστὶν
ἐπιπέδῳ.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ AB , ΓA τεμνέτωσαν ἀλλήλας
κατὰ τὸ E σημειον· λέγω, ὅτι αἱ AB , ΓA ἐν ἐνί
εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἐνί ἐστὶν ἐπιπέδῳ.

10 Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῶν $E\Gamma$, EB τυχόντα σημεία
τὰ Z , H , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓB , ZH , καὶ διήχθω-
σαν αἱ $Z\Theta$, HK · λέγω πρῶτον, ὅτι τὸ $E\Gamma B$ τρί-
γωνον ἐν ἐνί ἐστὶν ἐπιπέδῳ. εἰ γὰρ ἐστὶ τοῦ $E\Gamma B$
τριγώνου μέρος ἦτοι τὸ $Z\Theta\Gamma$ ἢ τὸ HBK ἐν τῷ ὑπο-
15 κειμένῳ [ἐπιπέδῳ], τὸ δὲ λοιπὸν ἐν ἄλλῳ, ἔσται κατὰ
μιας τῶν $E\Gamma$, EB εὐθειῶν μέρος μὲν τι ἐν τῷ ὑπο-
κειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ ἐν ἄλλῳ. εἰ δὲ τοῦ $E\Gamma B$
τριγώνου τὸ $Z\Gamma BH$ μέρος ἦ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπι-
πέδῳ, τὸ δὲ λοιπὸν ἐν ἄλλῳ, ἔσται καὶ ἀμφοτέρων τῶν
20 $E\Gamma$, EB εὐθειῶν μέρος μὲν τι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπι-
πέδῳ, τὸ δὲ ἐν ἄλλῳ· ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη. τὸ ἄρα
 $E\Gamma B$ τρίγωνον ἐν ἐνί ἐστὶν ἐπιπέδῳ. ἐν ᾧ δὲ ἐστὶ
τὸ $E\Gamma B$ τρίγωνον, ἐν τούτῳ καὶ ἑκατέρα τῶν $E\Gamma$,
 EB , ἐν ᾧ δὲ ἑκατέρα τῶν $E\Gamma$, EB , ἐν τούτῳ καὶ αἱ
25 AB , ΓA . αἱ AB , ΓA ἄρα εὐθεῖαι ἐν ἐνί εἰσιν ἐπι-
πέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἐνί ἐστὶν ἐπιπέδῳ· ὅπερ
ἔδει δεῖξαι.

1. τὸ δέ] P b, μέρος δέ τι B F V. ἐν] ἐν τῷ F. 7. αἱ]
om. F. 10. $E\Gamma$, EB] in ras. V. 11. ΓB] corr. in $B\Gamma V$.
12. $E\Gamma B$] litt. B in ras. m. 1 P; $EB\Gamma B$. 14. $Z\Gamma\Theta P$.
ἐν — 15. ἄλλῳ] om. b, mg. m. 1 V. 15. ἐπιπέδῳ] om. P.

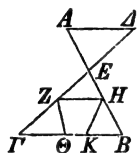
plano subiacenti, pars autem in eleuatione; quod erat demonstrandum.

II.

Si duae rectae inter se secant, in eodem plano sunt, et omnis triangulus in eodem plano est.

Nam duae rectae AB , ΓA inter se secant in puncto E . dico, rectas AB , ΓA in eodem plano esse, et omnem triangulum in eodem plano esse.

sumantur enim in $E\Gamma$, EB quaelibet puncta Z , H , et ducantur ΓB , ZH et eas secantes $Z\Theta$, HK . dico primum, triangulum $E\Gamma B$ in eodem plano esse.



nam si pars trianguli $E\Gamma B$ uel $Z\Theta\Gamma$ uel HBK in subiacenti est, reliquum autem in alio, etiam rectarum $E\Gamma$, EB pars in plano subiacenti, pars autem in alio erit. sin trianguli $E\Gamma B$ pars, quae est $Z\Gamma BH$, in plano subiacenti est, re-

liquum autem in alio, etiam utriusque rectae $E\Gamma$, EB pars in subiacenti plano erit, pars autem in alio; quod demonstraui absurdum esse [prop. I]. ergo triangulus $E\Gamma B$ in eodem plano est. in quo autem est triangulus $E\Gamma B$, in eo est etiam utraque $E\Gamma$, EB , in quo uero utraque $E\Gamma$, EB , in eo etiam AB , ΓA sunt [prop. I]. ergo rectae AB , ΓA in eodem plano sunt, et omnis triangulus in eodem plano est; quod erat demonstrandum.

II. Galen. III. p. 830.

-
16. EB] ΓB φ . 18. ΓZBH V. η] P, $\epsilon\lambda\eta$ BFVb, $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$ bene August. 19. $\xi\sigma\tau\alpha\iota$] $\epsilon\lambda\eta$ $\alpha\nu$ F. 20. EB , $E\Gamma F$.
 21. $\alpha\alpha\lambda\lambda\omega\iota$ F. 22. $E\Gamma B$] litt. ΓB in ras. V, $EB''\Gamma'$ b.
 23. $E\Gamma B$] litt. ΓB in ras. V, $EB''\Gamma'$ b. 24. EB , $E\Gamma Vb$.
 25. $\epsilon\theta\theta\epsilon\iota\alpha$ φ (non F). 27. $\delta\epsilon\iota\chi\epsilon\iota$] : \sim F.

γ'.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνη ἀλλήλα, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ εὐθεΐά ἐστιν.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα τὰ AB , $BΓ$ τεμνέτω ἀλλήλα, 5 κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ $ΔB$ γραμμὴ· λέγω, ὅτι ἡ $ΔB$ γραμμὴ εὐθεΐά ἐστιν.

Εἰ γὰρ μὴ, ἐπεξεύχθω ἀπὸ τοῦ $Δ$ ἐπὶ τὸ B ἐν μὲν τῷ AB ἐπιπέδῳ εὐθεΐα ἡ $ΔEB$, ἐν δὲ τῷ $BΓ$ ἐπιπέδῳ εὐθεΐα ἡ $ΔZB$. ἔσται δὴ δύο εὐθειῶν τῶν 10 $ΔEB$, $ΔZB$ τὰ αὐτὰ πέρατα, καὶ περιέξουσιν δηλαδὴ χωρίον· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα αἱ $ΔEB$, $ΔZB$ εὐθεΐαι εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἀλλή τις ἀπὸ τοῦ $Δ$ ἐπὶ τὸ B ἐπιξεννυμένη εὐθεΐα ἔσται πλην τῆς $ΔB$ κοινῆς τομῆς τῶν AB , $BΓ$ ἐπιπέδων.

15 Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα τέμνη ἀλλήλα, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ εὐθεΐά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δ'.

Ἐὰν εὐθεΐα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπι- 20 σταθῇ, καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Εὐθεΐα γάρ τις ἡ EZ δύο εὐθείαις ταῖς AB , $ΓΔ$ τεμνούσαις ἀλλήλας κατὰ τὸ E σημεῖον ἀπὸ τοῦ E πρὸς ὀρθὰς ἔφρεστιάτω· λέγω, ὅτι ἡ EZ καὶ τῷ δια 25 τῶν AB , $ΓΔ$ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστιν.

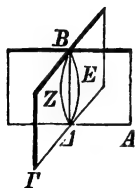
3. ἐστι V, comp. b. 4. $BΓ$] $ΓΔ$ F. τεμνέτωσαν BFVb.
7. τό] τοῦ φ. 9. ἔσται δὴ] ἔστω μὲν ἡ φ. 10. περιέξουσιν
PV, et B, sed corr.; F hic legi uix potest. 12. δὴ] δέ P b.
οὐδ' Vb. 13. ἐστι F. 16. ἔστιν ἡ $ΔB$ F. 18. ἐάν

III.

Si duo plana inter se secant, communis eorum sectio recta est.

Nam duo plana AB , $B\Gamma$ inter se secant, et communis eorum sectio sit linea ΔB . dico, lineam ΔB rectam esse.

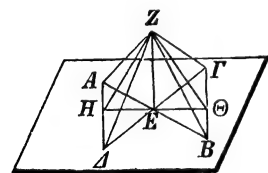
nam si minus, ab Δ ad B in plano AB ducatur recta ΔEB , in plano autem $B\Gamma$ recta ΔZB . itaque duarum rectarum ΔEB , ΔZB iidem termini erunt, et ita spatium comprehendunt; quod absurdum est. quare ΔEB , ΔZB rectae non sunt. similiter demonstrabimus, ne aliam quidem ullam a Δ ad B ductam rectam esse praeter ΔB communem sectionem planorum AB , $B\Gamma$.



Ergo si duo plana inter se secant, communis eorum sectio recta est; quod erat demonstrandum.

IV.

Si recta ad duas rectas inter se secantes in communi sectione perpendicularis erecta erit, etiam ad planum earum perpendicularis erit.



Nam recta EZ ad duas rectas AB , $\Gamma\Delta$ inter se in puncto E secantes ab E perpendicularis erecta sit. dico, EZ etiam ad planum rectarum AB , $\Gamma\Delta$ perpendicularem esse.

— 19. ὁρθός] in ras. V. 20. αὐτόν F, sed corr. 22. εὐ-
θείας τὰς b. 23. τεμνούσας b. 25. τῶν] τῆς b, corr. m. 1.

- Ἀπειλήφθωσαν γὰρ αἱ AE , EB , $ΓE$, $EΔ$ ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ διήχθω τις διὰ τοῦ E , ὥς ἐτυχεν, ἡ $HEΘ$, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $AΔ$, $ΓB$, καὶ ἔτι ἀπὸ τυχόντος τοῦ Z ἐπεξεύχθωσαν αἱ ZA , ZH , $ZΔ$, $ZΓ$,
 5 $ZΘ$, ZB . καὶ ἐπεὶ δύο αἱ AE , $EΔ$ δυσὶ ταῖς $ΓE$, EB ἴσαι εἰσὶ καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσεις ἄρα ἡ $AΔ$ βάσει τῇ $ΓB$ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ $AEΔ$ τρίγωνον τῷ $ΓEB$ τριγώνῳ ἴσον ἐσται· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΔAE$ γωνία τῇ ὑπὸ $EBΓ$ ἴση [ἐστίν]. ἐστὶ δὲ καὶ
 10 ἡ ὑπὸ AEH γωνία τῇ ὑπὸ $BEΘ$ ἴση. δύο δὲ τριγωνά ἐστι τὰ AHE , $BEΘ$ τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν AE τῇ EB . καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς
 15 πλευραῖς ἴσας ἔξουσιν. ἴση ἄρα ἡ μὲν HE τῇ $EΘ$, ἡ δὲ AH τῇ $BΘ$. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστίν ἡ AE τῇ EB , κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ZE , βάσεις ἄρα ἡ ZA βάσει τῇ ZB ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ $ZΓ$ τῇ $ZΔ$ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστίν ἡ $AΔ$ τῇ $ΓB$,
 20 ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ZA τῇ ZB ἴση, δύο δὲ αἱ ZA , $AΔ$ δυσὶ ταῖς ZB , $ΒΓ$ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρα· καὶ βάσεις ἡ $ZΔ$ βάσει τῇ $ZΓ$ ἐδείχθη ἴση· καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ZAD γωνία τῇ ὑπὸ $ZBΓ$ ἴση ἐστίν. καὶ ἐπεὶ πάλιν ἐδείχθη ἡ AH τῇ $BΘ$ ἴση, ἀλλὰ μὴν καὶ
 25 ἡ ZA τῇ ZB ἴση, δύο δὲ αἱ ZA , AH δυσὶ ταῖς ZB , $BΘ$ ἴσαι εἰσὶν. καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ZAH ἐδείχθη ἴση τῇ ὑπὸ $ZBΘ$. βάσεις ἄρα ἡ ZH βάσει τῇ

3. $HEΘ$] $EΘ F$, et V m. 1, corr. m. 2; Eras. B. αἱ — 4. ἐπεξεύχθωσαν] postea ins. m. 1 P. 5. $EΔ$] corr. ex EB m. 2 F. 6. περιέχουσι FVb. 7. $ΒΓF$. ἐστίν] comp. Fb, εἰσὶν V. 8. τῷ] corr. ex τό m. 1 F. τριγώνῳ] om. BFVb.

abscindantur enim AE , EB , ΓE , $E\Delta$ inter se aequales, et per E quaelibet recta $HE\Theta$ ducatur, et ducantur $A\Delta$, ΓB , et praeterea a quolibet puncto Z ducantur ZA , ZH , $Z\Delta$, $Z\Gamma$, $Z\Theta$, ZB . et quoniam duae rectae AE , $E\Delta$ duabus ΓE , EB aequales sunt et aequales angulos comprehendunt [I, 15], basis $A\Delta$ basi ΓB aequalis est, et triangulus $AE\Delta$ triangulo ΓEB aequalis [I, 4]. quare etiam $\angle \Delta AE = EB\Gamma$ [id.]. uerum etiam $\angle AEH = BE\Theta$ [I, 15]. itaque duo trianguli sunt AHE , $BE\Theta$ duos angulos duobus angulis alterum alteri aequalem habentes et unum latus uni lateri aequale, quod ad angulos aequales positum est, $AE = EB$. itaque etiam reliqua latera reliquis lateribus aequalia habebunt [I, 26]. quare $HE = E\Theta$, $AH = B\Theta$. et quoniam $AE = EB$, et ZE communis est et perpendicularis, erit $ZA = ZB$ [I, 4]. eadem de causa erit etiam $Z\Gamma = Z\Delta$. et quoniam $A\Delta = \Gamma B$ et $ZA = ZB$, duo latera ZA , $A\Delta$ duobus lateribus ZB , $B\Gamma$ alterum alteri aequalia sunt; et demonstratum est, esse $Z\Delta = Z\Gamma$. erit igitur etiam $\angle ZAA = ZB\Gamma$ [I, 8]. et quoniam rursus demonstratum est, esse $AH = B\Theta$, et est $ZA = ZB$, duo latera ZA , AH duobus ZB , $B\Theta$ aequalia sunt; et demonstratum est, esse $\angle ZAH = ZB\Theta$. itaque $ZH = Z\Theta$ [I, 4]. et quoniam rursus demonstratum

9. $\epsilon\sigma\tau\acute{\iota}\nu$] om. P. 11. $\epsilon\sigma\tau\acute{\iota}$] $\epsilon\lambda\sigma\iota$ FV. 12. $\epsilon\chi\omicron\nu\tau\alpha\varsigma$ ϕ .
 13. $\tau\eta\nu$] $\tau\acute{\alpha}$? V. $\tau\acute{\alpha}\varsigma$ $\epsilon\sigma\alpha\varsigma$ Vb. $\gamma\omega\nu\iota\alpha\varsigma$ b ϕ . 14. $\tau\eta$] supra
 scr. m. 1 b. 17. $Z\Delta$] A in ras. B. 20. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$ B. $A\Delta$] A e
 corr. V. 23. η] m. 2 F. Ante ZAA eras. $\tau\omega\nu$ F. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$] comp. b, $\epsilon\sigma\tau\acute{\iota}$ P. 25. $Z\Delta$] (alt.) A e corr. m. 1 F. 26. $\epsilon\lambda\sigma\iota\nu$] comp. F, $\epsilon\lambda\sigma\iota$ Vb. ZAH] corr. ex ZAB m. 1 b. 27. $ZB\Theta$] B e corr. m. 1 F. $\acute{\alpha}\rho\alpha$] om. V. ZH] $H''Z'$ b.

- $Z\Theta$ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐδείχθη ἡ HE τῇ $E\Theta$, κοινὴ δὲ ἡ EZ , δύο δὴ αἱ HE , EZ δυοῖν ταῖς ΘE , EZ ἴσαι εἰσὶν· καὶ βάσις ἡ ZH βάσει τῇ $Z\Theta$ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ HEZ γωνία τῇ ὑπὸ ΘEZ
 5 ἴση ἐστίν. ὁρθὴ ἄρα. ἐκατέρα τῶν ὑπὸ HEZ , ΘEZ γωνιῶν. ἡ ZE ἄρα πρὸς τὴν $H\Theta$ τεχόντως διὰ τοῦ E ἀχθεῖσαν ὁρθὴ ἐστίν. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι ἡ ZE καὶ πρὸς πάσας τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὕσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὁρθὰς ποιήσῃ γωνίας.
 10 εὐθεῖα δὲ πρὸς ἐπίπεδον ὁρθὴ ἐστίν, ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὕσας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὁρθὰς ποιῇ γωνίας· ἡ ZE ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὁρθὰς ἐστίν. τὸ δὲ ὑποκείμενον ἐπίπεδόν ἐστι τὸ διὰ τῶν AB , $\Gamma\Delta$ εὐθειῶν.
 15 ἡ ZE ἄρα πρὸς ὁρθὰς ἐστι τῷ διὰ τῶν AB , $\Gamma\Delta$ ἐπιπέδῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὁρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὁρθὰς ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι

20

ε'.

Ἐὰν εὐθεῖα τρισὶν εὐθείαις ἀπτομέναις ἀλλήλων πρὸς ὁρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἐν ἐνὶ εἰσιν ἐπιπέδῳ.

- Εὐθεῖα γάρ τις ἡ AB τρισὶν εὐθείαις ταῖς $B\Gamma$,
 25 $B\Delta$, BE πρὸς ὁρθὰς ἐπὶ τῆς κατὰ τὸ B ἀφῆς ἐφεστατάω· λέγω, ὅτι αἱ $B\Gamma$, $B\Delta$, BE ἐν ἐνὶ εἰσιν ἐπιπέδῳ.

3. εἰσὶν] comp. F. 5. ἐστὶν ἴση BFV. 6. ἡ διὰ b.
 7. ἀχθεῖσα Fb. δῆ] om. F. 8. αὐτῆς] corr. ex αὐτῇ m.
 1 B. 9. τῷ] τῷ αὐτῷ F, sed corr. 11. πρὸς] ins. m.

est, esse $HE = E\Theta$, et ZE communis est, duo latera HE , EZ duobus ΘE , EZ aequalia sunt; et $ZH = Z\Theta$. itaque $\angle HEZ = \Theta EZ$ [I, 8]. itaque uterque angulus HEZ , ΘEZ rectus est [I def. 10]. ergo ZE ad rectam $H\Theta$ fortuito per E ductam perpendicularis est. iam eodem modo demonstrabimus, ZE ad omnes rectas eam tangentes et in plano subiacenti positas rectos efficere angulos. recta autem ad planum perpendicularis est, ubi ad omnes rectas eam tangentes et in eodem plano ductas rectos angulos efficit [def. 3]. itaque ZE ad planum subiacens perpendicularis est. subiacens autem planum id est, quod per rectas AB , ΓA ductum est. itaque ZE ad planum rectarum AB , ΓA perpendicularis est.

Ergo si recta ad duas rectas inter se secantes in communi sectione perpendicularis erecta erit, etiam ad planum earum perpendicularis erit; quod erat demonstrandum.

V.

Si recta ad tres rectas inter se tangentes in communi sectione perpendicularis erecta erit, tres illae rectae in eodem plano sunt.

Nam recta AB ad tres rectas $B\Gamma$, $B\Delta$, BE in puncto sectionis B perpendicularis erecta sit. dico, rectas $B\Gamma$, $B\Delta$, BE in eodem plano esse.

2 F. $\alpha\upsilon\tau\eta\varsigma$] corr. ex $\alpha\upsilon\tau\eta$ m. 1 B. 12. $\acute{\epsilon}\nu$] $\acute{\epsilon}\pi\acute{\iota}$ φ .
 $\alpha\upsilon\tau\omega$] om. V. $\pi\omicron\iota\epsilon\acute{\iota}$ P. 13. $\acute{\epsilon}\nu$ $\tau\omega$ B. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$] comp.
 Fb, $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ P. 14. $\tau\omega\nu$] bis V, sed corr. 15. ΓA $\epsilon\upsilon\theta\epsilon\acute{\iota}\omega\nu$
 Vb. 16. $\acute{\epsilon}\pi\iota\pi\acute{\epsilon}\delta\omega\nu$ b. 17. $\epsilon\upsilon\theta\epsilon\acute{\iota}\alpha$ $\delta\upsilon\circ$ $\epsilon\upsilon\theta\epsilon\acute{\iota}\alpha\iota\varsigma$] β $\epsilon\nu\theta\theta$ F.
 $\delta\upsilon\circ$ — 19. $\delta\epsilon\iota\chi\alpha\iota$] $\kappa\alpha\iota$ $\tau\acute{\alpha}$ $\acute{\epsilon}\xi\eta\varsigma$ B. 17. $\tau\epsilon\mu\nu\nu\omicron\varsigma\alpha\iota\varsigma$ — 19.
 $\acute{\epsilon}\sigma\tau\alpha\iota$] $\kappa\alpha\iota$ $\tau\acute{\alpha}$ $\acute{\epsilon}\xi\eta\varsigma$ F. 19. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ Vb. $\acute{\omicron}\pi\epsilon\rho$ $\acute{\epsilon}\delta\epsilon\iota$ $\delta\epsilon\iota\chi\alpha\iota$] comp. F. 26. $\acute{\epsilon}\varphi\epsilon\sigma\tau\acute{\alpha}\tau\omega$] corr. ex $\acute{\alpha}\varphi\epsilon\sigma\tau\acute{\alpha}\tau\omega$ m. rec. P.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστωσαν αἱ μὲν $ΒΔ$,
 $ΒΕ$ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ἡ δὲ $ΒΓ$ ἐν μετεω-
ροτέρῳ, καὶ ἐκβεβλήσθω τὸ διὰ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ ἐπί-
πεδον· κοινὴν δὴ τομὴν ποιήσῃ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ
5 ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. ποιεῖτω τὴν $ΒΖ$. ἐν ἐνὶ ἄρα
εἰσὶν ἐπιπέδῳ τῷ διηγμένῳ διὰ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ αἱ τρεῖς
εὐθεῖαι αἱ $ΑΒ$, $ΒΓ$, $ΒΖ$. καὶ ἐπεὶ ἡ $ΑΒ$ ὀρθή ἐστι
πρὸς ἑκατέραν τῶν $ΒΔ$, $ΒΕ$, καὶ τῷ διὰ τῶν $ΒΔ$, $ΒΕ$
ἄρα ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστὶν ἡ $ΑΒ$. τὸ δὲ διὰ τῶν $ΒΔ$,
10 $ΒΕ$ ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενόν ἐστιν· ἡ $ΑΒ$ ἄρα ὀρθή
ἐστὶ πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ὥστε καὶ πρὸς
πάσας τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὐσας ἐν τῷ
ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσῃ γωνίας ἡ $ΑΒ$.
ἄπτεται δὲ αὐτῆς ἡ $ΒΖ$ οὐσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπι-
15 πέδῳ· ἡ ἄρα ὑπὸ $ΑΒΖ$ γωνία ὀρθή ἐστὶν. ὑπόκειται
δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $ΑΒΓ$ ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ $ΑΒΖ$ γω-
νία τῇ ὑπὸ $ΑΒΓ$. καὶ εἰσὶν ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ ὅπερ
ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ $ΒΓ$ εὐθεῖα ἐν μετεωρο-
τέρῳ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ $ΒΓ$, $ΒΔ$,
20 $ΒΕ$ ἐν ἐνὶ εἰσὶν ἐπιπέδῳ.

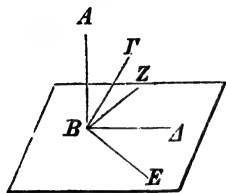
Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα τρισὶν εὐθείαις ἀπτομέναις ἀλλή-
λων ἐπὶ τῆς αὐτῆς πρὸς ὀρθὰς ἐπισταθῇ, αἱ τρεῖς
εὐθεῖαι ἐν ἐνὶ εἰσὶν ἐπιπέδῳ ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ς'.

25 Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς
ὀρθὰς ὦσιν, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι.

1. $ΒΔ$] e corr. m. 1 b. 2. ἡ δέ — 5. εὐθεῖαν] mg. m. 1 V,
in textu ras. est. 2. μετώρῳ V. 3. καὶ] καὶ δι' b. 4. δὴ]
postea ins. F. 5. καὶ εὐθεῖαν b, et B, corr. m. 2; καὶ (comp.)
ins. m. 1 F. ποιήτω φ. εἰσὶν ἄρα b. 7. ἐστὶν P; ἔσται B,

ne sint enim, uerum, si fieri potest, $B\Delta$, BE in plano subiacenti sint, $B\Gamma$ autem in eleuatiore, et producatum planum per AB , $B\Gamma$. communem igitur sectionem



in plano subiacenti rectam efficiet [prop. III]. efficiat BZ . itaque tres rectae AB , $B\Gamma$, BZ in eodem plano sunt, quod per AB , $B\Gamma$ ducitur. et quoniam AB ad utramque $B\Delta$, BE perpendicularis est, etiam ad planum rectarum $B\Delta$,

BE perpendicularis est AB [prop. IV]. planum autem rectarum $B\Delta$, BE subiacens est; AB igitur ad planum subiacens perpendicularis est. quare etiam ad omnes rectas eam tangentes et in subiacenti plano positas rectos angulos efficiet AB [def. 3]. tangit autem eam BZ in subiacenti plano posita. itaque $\angle ABZ$ rectus est. supposuimus autem, etiam $\angle AB\Gamma$ rectum esse. erit igitur $\angle ABZ = \angle AB\Gamma$. et in eodem plano sunt; quod fieri non potest. itaque recta $B\Gamma$ in plano eleuatiore posita non est; itaque tres rectae $B\Gamma$, $B\Delta$, BE in eodem plano sunt.

Ergo si recta ad tres rectas inter se tangentes in puncto tactionis perpendicularis erecta erit, tres illae rectae in eodem plano sunt; quod erat demonstrandum.

VI.

Si duae rectae ad idem planum perpendiculares sunt, rectae parallelae erunt.

corr. m. 1. 8. $B\Delta$] (alt.) B in ras. m. 1 B . 9. $\alpha\varrho\alpha$] prius α in ras. m. 1 P . 10. AB] $B''A'F$. 12. $\alpha\sigma\tau\eta$ b. 19. $B\Gamma$] corr. ex ABV ; AB supra scr. Γ m. 1 b. 26. $\alpha\sigma\tau$ PVb.

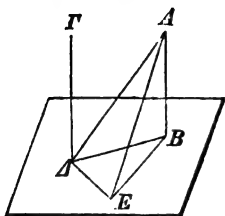
Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ AB , $\Gamma\Delta$ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστωσαν· λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$.

Συμβαλλέτωσαν γὰρ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ κατὰ
 5 τὰ B , Δ σημεία, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ $B\Delta$ εὐθεῖα, καὶ
 ἤχθω τῇ $B\Delta$ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ
 ἡ ΔE , καὶ κείσθω τῇ AB ἴση ἡ ΔE , καὶ ἐπεξεύχτω-
 σαν αἱ BE , AE , $A\Delta$.

Καὶ ἐπεὶ ἡ AB ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς τὸ ὑποκείμενον
 10 ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας [ἄρα] τὰς ἀπτομένας αὐτῆς
 εὐθείας καὶ οὖσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς
 ποιήσῃ γωνίας. ἄπτεται δὲ τῆς AB ἑκατέρα τῶν
 $B\Delta$, BE οὖσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ· ὀρθὴ ἄρα
 ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ $AB\Delta$, ABE γωνιῶν. διὰ τὰ
 15 αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ $\Gamma\Delta B$, $\Gamma\Delta E$ ὀρθὴ ἐστὶν.
 καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ ΔE , κοινὴ δὲ ἡ $B\Delta$,
 δύο δὴ αἱ AB , $B\Delta$ δυοὶ ταῖς $E\Delta$, ΔB ἴσαι εἰσὶν·
 καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν· βάσις ἄρα ἡ $A\Delta$ βάσει
 τῇ BE ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ ΔE ,
 20 ἀλλὰ καὶ ἡ $A\Delta$ τῇ BE , δύο δὴ αἱ AB , BE δυοὶ
 ταῖς $E\Delta$, ΔA ἴσαι εἰσὶν· καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ
 AE · γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ABE γωνία τῇ ὑπὸ $E\Delta A$
 ἐστὶν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ABE · ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ
 ὑπὸ $E\Delta A$ · ἡ $E\Delta$ ἄρα πρὸς τὴν ΔA ὀρθὴ ἐστὶν.
 25 ἐστὶ δὲ καὶ πρὸς ἑκατέραν τῶν $B\Delta$, $\Delta\Gamma$ ὀρθὴ· ἡ $E\Delta$
 ἄρα τρισὶν εὐθείαις ταῖς $B\Delta$, ΔA , $\Delta\Gamma$ πρὸς ὀρθὰς

1. αἱ] supra m. rec. P. 4. συμβαλλέτωσαν P (συμπιπτεύωσαν supra scr. m. rec.) et supra scr. λ V. 5. $B\Delta$] corr. ex B m. 2 B.
 6. τῷ] τῷ αὐτῷ P. 9. ἐστὶν F. 10. ἄρα] om. P. 12. Ante τῶν ras. 2 litt. V, τῆς τῶν b. 13. οὖσαι F. 16. τῇ — $B\Delta$] mg. m. 1 P.
 17. ταῖς] miro comp. F, ut lin. 21. εἰς V b, comp. supra scr. φ.
 18. καὶ] comp. supra scr. φ. περιέχουσι BV b $A\Delta$] corr. ex

Nam duae rectae AB , ΓA ad planum subiaccens perpendiculares sint. dico, AB rectae ΓA parallelam esse.



concurrant enim cum plano subiaccens in punctis B , A , et ducatur recta BA , et ad rectam BA perpendicularis in plano subiaccens ducatur AE , et ponatur

$$AB = AE,$$

et ducantur BE , AE , AA .

et quoniam AB ad planum subiaccens perpendicularis est, etiam ad omnes rectas eam tangentes et in plano subiaccens positas rectos angulos efficit [def. 3]. uerum utraque BA , BE in plano subiaccens positae rectam AB tangunt; itaque uterque angulus ABA , ABE rectus est. eadem de causa etiam uterque angulus ΓAB , ΓAE rectus est. et quoniam $AB = AE$, et BA communis est, duo latera AB , BA duobus EA , AB aequalia sunt; et aequales angulos comprehendunt. itaque $AA = BE$ [I, 4]. et quoniam $AB = AE$, et $AA = BE$, duo latera AB , BE duobus EA , AA aequalia sunt; et basis eorum communis est AE . itaque $\angle ABE = EAA$ [I, 8]. uerum $\angle ABE$ rectus est; quare etiam $\angle EAA$ rectus est. itaque EA ad AA perpendicularis est. sed etiam ad utramque BA , AE perpendicularis est. itaque EA ad tres rectas BA , AA , AE perpendicularis in puncto tactio-

AB m. 1 b. 19. $\zeta\eta$ $\xi\sigma\iota\nu$ V. 21. $\epsilon\iota\sigma\iota$ Vb, comp. F. 23. $\zeta\eta$ $\xi\sigma\iota\nu$ Vb. η] (prius) ins. m. 2 F. 24. $\tau\omega\nu$ $E\Delta A P$. 25. $\xi\sigma\iota$] supra scr. comp. m. 1 F. Sequentia usque ad p. 22, 5: $\epsilon\pi\iota$ - $\pi\epsilon\delta\varphi$ in ras. V. $\delta\varphi\theta\eta$] corr. ex $\sigma\theta\eta$ m. rec. P.

ἐπὶ τῆς ἀφῆς ἐφέστηκεν· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ $B\Delta$, ΔA , $\Delta \Gamma$ ἐν ἐνὶ εἰσιν ἐπιπέδῳ. ἐν ᾧ δὲ αἱ ΔB , ΔA , ἐν τούτῳ καὶ ἡ AB · πᾶν γὰρ τριγώνον ἐν ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· αἱ ἄρα AB , $B\Delta$, $\Delta \Gamma$ εὐθεῖαι ἐν ἐνὶ εἰσιν ἐπιπέδῳ. καὶ ἐστὶν ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ $AB\Delta$, $B\Delta \Gamma$ γωνιῶν· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ $\Gamma \Delta$.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ᾧσιν, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10

ζ'.

Ἐὰν ᾧσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ληφθῇ δὲ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιξεννυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ τὰς παραλλήλοις.

15 Ἐστωσαν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ AB , $\Gamma \Delta$, καὶ εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα τὰ E , Z · λέγω, ὅτι ἡ ἐπὶ τὰ E , Z σημεῖα ἐπιξεννυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ τὰς παραλλήλοις.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω ἐν μετεωροτέρῳ 20 ὡς ἡ EHZ , καὶ διήχθω διὰ τῆς EHZ ἐπίπεδον· τομὴν δὴ ποιήσει ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. ποιείτω ὡς τὴν EZ · δύο ἄρα εὐθεῖαι αἱ EHZ , EZ χωρίον περιέξουσιν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ E ἐπὶ τὸ Z ἐπιξεννυμένη εὐθεῖα ἐν μετεω- 25 ροτέρῳ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· ἐν τῷ διὰ τῶν AB , $\Gamma \Delta$ ἄρα

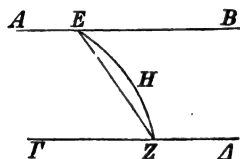
2. ἐν ᾧ — 5. ἐπιπέδῳ] om. b. 2. ΔB , ΔA] ΔA , ΔB P; $B\Delta$, ΔA , $\Delta \Gamma$ F. 6. $B\Delta \Gamma$] B in ras. V; $\Gamma \Delta B$ P. ἄρα] corr. ex a m. 2 P. 8. ἐπιπέδῳ] om. V. 9. ᾧσι Vb. ἀλλήλαις αἱ V. 11. ᾧσιν B. 13. αὐτῷ] supra m. 2 B. 17. λέγω — E , Z] mg. m. 1 F. σημεῖα] om. V. 20. ἡ] φ, αἱ? F. διὰ] τὸ διὰ BF, τό supra scr. V. 21. ἐπιπέδῳ] mg. V.

nis erecta est; quare tres rectae $B\Delta$, ΔA , $\Delta\Gamma$ in eodem plano sunt [prop. V]. in quo autem plano sunt ΔB , ΔA , in eodem est etiam AB ; omnis enim triangulus in eodem plano est [prop. II]. itaque rectae AB , $B\Delta$, $\Delta\Gamma$ in eodem plano sunt. et uterque angulus $AB\Delta$, $B\Delta\Gamma$ rectus est. itaque AB rectae $\Gamma\Delta$ parallela est [I, 28].

Ergo si duae rectae ad idem planum perpendiculares sunt, rectae parallelae erunt; quod erat demonstrandum.

VII.

Si duae rectae parallelae sunt, et in utraque quaelibet puncta sumuntur, recta puncta coniungens in eodem plano est, in quo parallelae.



Sint duae rectae parallelae AB , $\Gamma\Delta$, et in utraque quaelibet puncta sumantur E , Z . dico, rectam puncta E , Z coniungentem in eodem plano esse, in quo sint rectae parallelae.

ne sit enim, sed, si fieri potest, in eleuatiore sit ut EHZ , et per EHZ planum ducatur. itaque in plano subiacenti sectionem efficiet rectam [prop. III]. efficiat EZ . ergo duae rectae EHZ , EZ spatium comprehendunt; quod fieri non potest. itaque recta E , Z coniungens in plano eleuatiore non est. ergo recta E , Z coniungens in plano parallelarum AB , $\Gamma\Delta$ est.

22. ὁς] supra scr. m. 1 B, om. FVb. EHZ] HZ V.

23. περιέχουσιν Vb. ἀδύνατον] mg. V. 25. ἀρα] supra scr. V.

παράλληλων ἐστὶν ἐπιπέδῳ ἢ ἀπὸ τοῦ E ἐπὶ τὸ Z ἐπιξευγνυμένη εὐθεῖα.

Ἐὰν ἄρα ὥσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ληφθῇ δὲ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα, ἢ ἐπὶ τὰ σημεῖα δ ἐπιξευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παράλληλοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

η'.

Ἐὰν ὥσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἢ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾗ, καὶ
10 ἢ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ AB , $\Gamma\Delta$, ἢ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἡ AB τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ ἡ λοιπὴ ἡ $\Gamma\Delta$ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

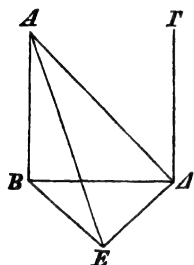
15 Συμβαλλέτωσαν γὰρ αἱ AB , $\Gamma\Delta$ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ B , Δ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $B\Delta$. αἱ AB , $\Gamma\Delta$, $B\Delta$ ἄρα ἐν ἐνὶ εἰσιν ἐπιπέδῳ. ἤχθω τῇ BA πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἡ ΔE , καὶ κείσθω τῇ AB ἴση ἡ ΔE , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ
20 BE , AE , $A\Delta$. καὶ ἐπεὶ ἡ AB ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπο-
μένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὖσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπι-
πέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶν ἡ AB . ὀρθὴ ἄρα [ἐστὶν] ἑκα-
τέρα τῶν ὑπὸ $AB\Delta$, ABE γωνιῶν. καὶ ἐπεὶ εἰς
25 παράλληλους τὰς AB , $\Gamma\Delta$ εὐθεῖα ἐμπίπτωκεν ἡ $B\Delta$, αἱ ἄρα ὑπὸ $AB\Delta$, $\Gamma\Delta B$ γωνίαι δυοῖν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ $AB\Delta$. ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ $\Gamma\Delta B$. ἡ $\Gamma\Delta$ ἄρα πρὸς τὴν $B\Delta$ ὀρθὴ ἐστὶν. καὶ

3. ὥσιν PB. 8. ὥσιν PB. ἢ δέ] ἢ δὲ ἡ V. 9. ᾗ]
om. V. 10. πρὸς ὀρθὰς ἔσται τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ b. 12. Ante

Ergo si duae rectae parallelae sunt, et in utraque quaelibet puncta sumuntur, recta puncta coniungens in eodem plano est, in quo parallelae; quod erat demonstrandum.

VIII.

Si duae rectae parallelae sunt, et alterutra ad planum aliquod perpendicularis est, etiam reliqua ad idem planum perpendicularis erit.



Sint duae rectae parallelae AB , $\Gamma\Delta$, et alterutra earum AB ad planum subiacens perpendicularis sit. dico, etiam reliquam $\Gamma\Delta$ ad idem planum perpendicularem fore.

concurrant enim AB , $\Gamma\Delta$ cum plano subiacenti in punctis B , Δ , et ducatur $B\Delta$. itaque AB , $\Gamma\Delta$, $B\Delta$ in eodem plano sunt [prop. VII]. ad $B\Delta$ in plano subiacenti perpendicularis ducatur ΔE , et ponatur $\Delta E = AB$, et ducantur BE , AE , $A\Delta$. et quoniam AB ad planum subiacens perpendicularis est, etiam ad omnes rectas eam tangentes et in plano subiacenti positas perpendicularis est AB [def. 3]. rectus igitur uterque angulus $AB\Delta$, ABE . et quoniam in parallelas AB , $\Gamma\Delta$ recta incidit $B\Delta$, anguli $AB\Delta$, $\Gamma\Delta B$ duobus rectis aequales sunt [I, 29]. uerum $\angle AB\Delta$ rectus est; quare etiam $\angle \Gamma\Delta B$ rectus est. quare $\Gamma\Delta$ ad $B\Delta$ perpendicularis est.

ἐπιπέδῳ m. 1 del. ἐν P. 13. καὶ ἡ] F, δὴ φ. 17. $\Gamma\Delta$] Δ
corr. ex B m. rec. B. 20. ΔE] ΔE φ. 23. πρὸς
ὁρθῶς] ὁρθῶς BFV. 25. ἐνθεῖς V.
26. γωνίαι] F, γωνία φ.

- ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ ΔE , κοινὴ δὲ ἡ $B\Delta$, δύο
 δὴ αἱ AB , $B\Delta$ δυσὶ ταῖς $E\Delta$, ΔB ἴσαι εἰσὶν· καὶ
 γωνία ἡ ὑπὸ $AB\Delta$ γωνία τῇ ὑπὸ $E\Delta B$ ἴση· ὁρθὴ
 γὰρ ἑκατέρα· βάσις ἄρα ἡ $A\Delta$ βάσει τῇ BE ἴση.
 5 καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν AB τῇ ΔE , ἡ δὲ BE τῇ
 $A\Delta$, δύο δὴ αἱ AB , BE δυσὶ ταῖς $E\Delta$, ΔA ἴσαι
 εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρα· καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ AE .
 γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ABE γωνία τῇ ὑπὸ $E\Delta A$ ἐστὶν
 ἴση. ὁρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ABE · ὁρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ
 10 $E\Delta A$ · ἡ $E\Delta$ ἄρα πρὸς τὴν $A\Delta$ ὁρθὴ ἐστὶν. ἔστι
 δὲ καὶ πρὸς τὴν ΔB ὁρθὴ· ἡ $E\Delta$ ἄρα καὶ τῷ διὰ
 τῶν $B\Delta$, ΔA ἐπιπέδῳ ὁρθὴ ἐστὶν. καὶ πρὸς πάσας
 ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὕσας ἐν τῷ
 διὰ τῶν $B\Delta A$ ἐπιπέδῳ ὁρθὰς ποιήσῃ γωνίας ἡ $E\Delta$.
 15 ἐν δὲ τῷ διὰ τῶν $B\Delta A$ ἐπιπέδῳ ἐστὶν ἡ $\Delta\Gamma$, ἐπει-
 δήπερ ἐν τῷ διὰ τῶν $B\Delta A$ ἐπιπέδῳ εἰσὶν αἱ AB ,
 $B\Delta$, ἐν ᾧ δὲ αἱ AB , $B\Delta$, ἐν τούτῳ ἐστὶ καὶ ἡ $\Delta\Gamma$.
 ἡ $E\Delta$ ἄρα τῇ $\Delta\Gamma$ πρὸς ὁρθὰς ἐστὶν· ὥστε καὶ ἡ $\Gamma\Delta$
 τῇ ΔE πρὸς ὁρθὰς ἐστὶν. ἔστι δὲ καὶ ἡ $\Gamma\Delta$ τῇ $B\Delta$
 20 πρὸς ὁρθὰς. ἡ $\Gamma\Delta$ ἄρα δύο εὐθείαις τεμνουσαῖς ἀλ-
 λήλας ταῖς ΔE , ΔB ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Δ τομῆς πρὸς
 ὁρθὰς ἐφ' ἐστηκεν· ὥστε ἡ $\Gamma\Delta$ καὶ τῷ διὰ τῶν ΔE ,
 ΔB ἐπιπέδῳ πρὸς ὁρθὰς ἐστὶν. τὸ δὲ διὰ τῶν ΔE ,
 ΔB ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενόν ἐστὶν· ἡ $\Gamma\Delta$ ἄρα τῷ
 25 ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὁρθὰς ἐστὶν.

Ἐὰν ἄρα ὧσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ μία

2. AB] BA b. εἰσὶ Vb, comp. F. 4. ἐστὶν ἴση BVb.
 7. ἑκατέρῃ] supra scr. F. ἡ] supra scr. m. 1 V.
 8. $E\Delta A$] $B\Delta$ seq. ras. 1 litt. φ. ἐστὶν] supra scr. m. 1 F.
 9. ὁρθὴ — ABE] in ras. plurium litt. F. 10. $A\Delta$] ΔA P.
 11. ΔB] in ras. V. 12. ἐστὶ V, comp. Fb. 14. $B\Delta A$]
 P; $A\Delta$, ΔB B; $B\Delta$, AB b et in ras. FV. ΔE P. 15. $B\Delta$,

et quoniam $AB = AE$, et BA communis est, duo latera AB , BA duobus EA , AB aequalia sunt; et $\angle ABA = EAB$ (uterque enim rectus est); itaque $AA = BE$ [I, 4]. et quoniam $AB = AE$, et $BE = AA$, duo latera AB , BE duobus EA , AA aequalia sunt; et basis eorum communis est AE ; itaque $\angle ABE = EAA$ [I, 8]. uerum $\angle ABE$ rectus est; itaque etiam $\angle EAA$ rectus est; ergo EA ad AA perpendicularis est. uerum etiam ad AB perpendicularis est. EA igitur etiam ad planum rectarum BA , AA perpendicularis est [prop. IV]. quare etiam ad omnes rectas eam tangentes et in plano rectarum BA , AA positas rectos angulos efficiet EA . in plano autem rectarum BA , AA posita est AG , quoniam AB , BA in plano rectarum BA , AA sunt [prop. II], in quo autem plano sunt AB , BA , in eodem etiam AG posita est. itaque EA ad AG perpendicularis est; quare etiam GA ad AE perpendicularis est. uerum GA etiam ad BA perpendicularis est. GA igitur ad duas rectas inter se secantes AE , AB in sectione A perpendicularis erecta est; quare GA etiam ad planum rectarum AE , AB perpendicularis est [prop. IV]. uerum planum rectarum AE , AB subiacens est. itaque GA ad planum subiacens perpendicularis est.

Ergo si duae rectae parallelae sunt, et alterutra ad planum aliquod perpendicularis est, etiam reliqua

AA Bfb, in ras. V. 17. AG GA b. 18. AG in ras.
m. 1 PV. 19. $\tau\eta$ — GA bis P, corr. m. 1. $\kappa\alpha\lambda$ om.
P. $\tau\eta$ $\kappa\alpha\lambda$ $\tau\eta$ P. BA AB F. 20. $\alpha\lambda\lambda\eta\lambda\alpha\iota\varsigma$ b,
corr. m. 1. 21. AB in ras. V. 22. η $\kappa\alpha\lambda$ η V.
23. AB AE b. 24. $\upsilon\pi\omicron\kappa\epsilon\iota\mu\epsilon\nu\acute{o}\nu$ $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ in ras. V. 26.
 $\acute{\omega}\sigma\iota\nu$ PB.

αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ἤ, καὶ ἡ λοιπὴ τῷ
αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θ'.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ μὴ οὖ-
σαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ καὶ ἀλλήλαις
εἰςὶ παράλληλοι.

Ἔστω γὰρ ἑκατέρα τῶν AB , $\Gamma\Delta$ τῇ EZ παρά-
λληλος μὴ οὖσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· λέγω, ὅτι
παράλληλός ἐστιν ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$.

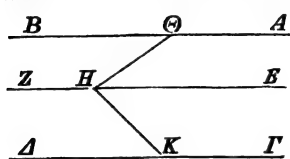
- 10 $E\lambda\lambda\eta\phi\theta\omega$ γὰρ ἐπὶ τῆς EZ τυχόν σημεῖον τὸ H ,
καὶ ἀπ' αὐτοῦ τῇ EZ ἐν μὲν τῷ διὰ τῶν EZ , AB
ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ $H\Theta$, ἐν δὲ τῷ διὰ τῶν
 ZE , $\Gamma\Delta$ τῇ EZ πάλιν πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ HK . καὶ
ἐπεὶ ἡ EZ πρὸς ἑκατέραν τῶν $H\Theta$, HK ὀρθὴ ἐστίν,
15 ἡ EZ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν $H\Theta$, HK ἐπιπέδῳ πρὸς
ὀρθὰς ἐστίν. καὶ ἐστίν ἡ EZ τῇ AB παράλληλος·
καὶ ἡ AB ἄρα τῷ διὰ τῶν ΘHK ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρ-
θὰς ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ $\Gamma\Delta$ τῷ διὰ τῶν
 ΘHK ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν· ἑκατέρα ἄρα τῶν
20 AB , $\Gamma\Delta$ τῷ διὰ τῶν ΘHK ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς
ἐστίν. ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς
ὀρθὰς ᾧσιν, παράλληλοί εἰσιν αἱ εὐθεῖαι· παράλληλος
ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$ · ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

1. ἡ] ἐστίν φ, supra scr. ἡ. 2. ἔσται] ἐστίν BFV.
6. εἰσὶν P. 7. γάρ] γ corr. ex π m. rec. B. παράλληλος τῇ
 EZ V. παράλληλοι B. 9. $\Delta\Gamma$ V. 10. Post τυχόν ras. 2
litt. V. 12. ἡ] supra m. 1 P. 13. ZE] in ras. V.
 HK] NK F, H post ins. V. 14. ἡ] αἱ F. 15. $H\Theta$] Θ
b supra scr. m. 1; litt. H postea ins. m. 1 BF. 16. ἐστίν]
comp. Fb, ἐστι PV. καί — 18. ἐστίν] mg. m. 2 B.
17. ἄρα] om. P. 19. ἑκατέρα — 21. ἐστίν] mg. m. 1 in ras.

ad idem planum perpendicularis erit; quod erat demonstrandum.

IX.

Quae eidem rectae parallelae sunt, etiam si in eodem plano non sunt, etiam inter se parallelae sunt.



Nam utraque AB , $\Gamma\Delta$ rectae EZ parallela sit, non positae in eodem plano. dico, AB rectae $\Gamma\Delta$ parallelam esse.

sumatur enim in EZ quoduis punctum H , et ab eo ad rectam EZ perpendicularis ducatur in plano EZ , AB rectorum $H\Theta$, in plano autem ZE , $\Gamma\Delta$ rectorum ad EZ rursus perpendicularis ducatur HK . et quoniam EZ ad utramque $H\Theta$, HK perpendicularis est, EZ etiam ad planum rectorum $H\Theta$, HK perpendicularis est [prop. IV]. et EZ rectae AB parallela est. itaque etiam AB ad planum rectorum ΘH , HK perpendicularis est [prop. VIII]. eadem de causa etiam $\Gamma\Delta$ ad planum rectorum ΘH , HK perpendicularis est; quare utraque AB , $\Gamma\Delta$ ad planum rectorum ΘH , HK perpendicularis est. sin duae rectae ad idem planum perpendiculares sunt, rectae parallelae sunt [prop. VI]. ergo AB rectae $\Gamma\Delta$ parallela est; quod erat demonstrandum.

P. 19. ἄρα] supra F. 20. τῶ] corr. ex τῶν P. $H\Theta$,
 HK m. 2 FV. 22. ὥστε Vb. εἶσιν] ἔσονται V.
 23. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. V.

ι'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἀπτομένας ἀλλήλων ὧσι μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας γωνίας περιέξουσιν.

- 5 Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ AB , $ΒΓ$ ἀπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας τὰς $ΔΕ$, $ΕΖ$ ἀπτομένας ἀλλήλων ἕστωσαν μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ABΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΔΕΖ$.

- Ἀπειλήφθωσαν γὰρ αἱ BA , $ΒΓ$, $ΕΔ$, $ΕΖ$ ἴσαι
10 ἀλλήλαις, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $ΑΔ$, $ΓΖ$, BE , $ΑΓ$, $ΔΖ$. καὶ ἐπεὶ ἡ BA τῇ $ΕΔ$ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος, καὶ ἡ $ΑΔ$ ἄρα τῇ BE ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ $ΓΖ$ τῇ BE ἴση ἐστὶ καὶ παρ-
ἀλληλος· ἐκατέρα ἄρα τῶν $ΑΔ$, $ΓΖ$ τῇ BE ἴση ἐστὶ
15 καὶ παράλληλος. αἱ δὲ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ μὴ οὖσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ $ΑΔ$ τῇ $ΓΖ$ καὶ ἴση. καὶ ἐπιξενγνύουσιν αὐτὰς αἱ $ΑΓ$, $ΔΖ$ · καὶ ἡ $ΑΓ$ ἄρα τῇ $ΔΖ$ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. καὶ ἐπεὶ
20 δύο αἱ AB , $ΒΓ$ δυεὶ ταῖς $ΔΕ$, $ΕΖ$ ἴσαι εἰσὶν, καὶ βάσεις ἡ $ΑΓ$ βάσει τῇ $ΔΖ$ ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $ABΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΔΕΖ$ ἐστὶν ἴση.

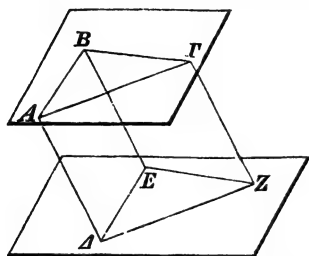
- Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἀπτομένας ἀλλήλων ὧσι μὴ ἐν τῷ αὐτῷ
25 ἐπιπέδῳ, ἴσας γωνίας περιέξουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

3. ὧσιν PB. 4. οὖσαι, ἴσας b. περιέξουσι Vb. 5. αἱ AB , $ΒΓ$] om. BFV. $ΒΓ$] postea ins. m. 1 P. 6. αἱ AB , $ΒΓ$ παρὰ BFV. 7. αὐτῷ] supra scr. F. 9. BA] in ras. m. 1 P. $ΕΖ$] litt. Z e corr. V. 11. ἐστὶν B. 12. ἐστὶν ἴση BFb. 14. ἐκατέρα — 15. παράλληλος] bis F, sed corr. m. 1; mg. V. 16. καὶ μὴ — ἐπιπέδῳ] om. V. 17. παράλληλοι] supra scr. m. 1 F. ἄρα] supra scr. m. 2 B. 18. καὶ] (primum) supra m. 1 V. 19. ἐστὶν PB. 20. εἰσὶ Vb, comp. F.

X.

Si duae rectae inter se tangentes duabus rectis inter se tangentibus non positis in eodem plano parallelae sunt, angulos aequales comprehendunt.

Nam duae rectae AB , $B\Gamma$ inter se tangentes duabus



rectis inter se tangentibus ΔE , $EΖ$ non positis in eodem plano parallelae sint. dico, esse $\angle AB\Gamma = \angle EZ$.

ponantur enim $BA = B\Gamma = E\Delta = EZ$, et ducantur $A\Delta$, $\Gamma Ζ$, BE , $A\Gamma$, $\Delta Ζ$. et quoniam BA

rectae $E\Delta$ aequalis et parallela est, etiam $A\Delta$ rectae BE aequalis et parallela est [I, 33]. eadem de causa etiam $\Gamma Ζ$ rectae BE aequalis et parallela est. itaque utraque $A\Delta$, $\Gamma Ζ$ rectae BE aequalis et parallela est. quae autem eidem rectae parallelae sunt, etiam si in eodem plano non sunt, etiam inter se parallelae sunt [prop. IX]. itaque $A\Delta$ rectae $\Gamma Ζ$ parallela est et aequalis. et eas iungunt $A\Gamma$, $\Delta Ζ$; quare etiam $A\Gamma$ rectae $\Delta Ζ$ aequalis et parallela est [I, 33]. et quoniam duo latera AB , $B\Gamma$ duobus ΔE , $EΖ$ aequales sunt, et $A\Gamma = \Delta Ζ$, erit $\angle AB\Gamma = \angle EZ$ [I, 8].

Ergo si duae rectae inter se tangentes duabus rectis inter se tangentibus non positis in eodem plano parallelae sunt, angulos aequales comprehendunt; quod erat demonstrandum.

22. ὅπό] om. V. 23. ἀπτόμεναι — 25. δεῖξαι] καὶ τὰ ἐξῆς
V. 24. ὥσι (ὥσιν F) παρὰ δύο εὐθείας ἀπτομένας ἀλλήλων
BFb. ὥσιν P.

ια'.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου μετεώρου ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον κάθετον εὐθεΐαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

- 5 Ἐστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον μετέωρον τὸ A , τὸ δὲ δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ A σημείου ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετον εὐθεΐαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

- Διήχθω γάρ τις ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεΐα,
10 ὡς ἔτυχεν, ἡ $BΓ$, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ A σημείου ἐπὶ τὴν $BΓ$ κάθετος ἡ $ΑΔ$. εἰ μὲν οὖν ἡ $ΑΔ$ κάθετός ἐστι καὶ ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, γερονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. εἰ δὲ οὐ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ $Δ$ σημείου τῇ $BΓ$ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ $ΔΕ$,
15 καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὴν $ΔΕ$ κάθετος ἡ $ΑΖ$, καὶ διὰ τοῦ Z σημείου τῇ $BΓ$ παράλληλος ἤχθω ἡ $HΘ$.

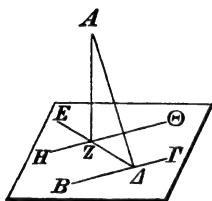
- Καὶ ἐπεὶ ἡ $BΓ$ ἑκατέρῃ τῶν $ΔΑ$, $ΔΕ$ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν, ἡ $BΓ$ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν $ΕΔΑ$ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν. καὶ ἐστίν αὐτῇ παράλληλος ἡ
20 $HΘ$ · ἐὰν δὲ ὥσι δύο εὐθεΐαι παράλληλοι, ἡ δὲ μία αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾗ, καὶ ἡ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ καὶ ἡ $HΘ$ ἄρα τῷ διὰ τῶν $ΕΔ$, $ΔΑ$ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν. καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ
25 οὐσας ἐν τῷ διὰ τῶν $ΕΔ$, $ΔΑ$ ἐπιπέδῳ ὀρθὴ ἐστίν ἡ $HΘ$. ἄπτεται δὲ αὐτῆς ἡ $ΑΖ$ οὐσα ἐν τῷ διὰ

2. μετέωρον φ (non F), μετεωροτέρου b. 3. δοθέν] P, ὑποκείμενον B F V b, P mg. m. 1. 9. γάρ] om. V. εὐθεΐα] postea ins. F. 10. Γ B F. 12. ἐστι καὶ] ἐστίν e corr. m. 2 F. ἐπὶ] om. b. γερονός] eras. V. 13. τό] supra scr. F. δέ] supra scr. V. 17. ἐπὶ φ.

XI.

A dato puncto eleuato ad datum planum perpendicularem lineam rectam ducere.

Nam datum punctum eleuatum sit A , et datum planum sit, quod subiacet. oportet igitur a puncto A ad planum subiaccens rectam lineam perpendicularem ducere.



ducatur enim in plano subiacenti recta quaelibet $B\Gamma$, et ab A puncto ad $B\Gamma$ perpendicularis ducatur AE [I, 12]. iam si AE etiam ad planum subiaccens perpendicularis est, factum est, quod propositum erat. sin minus, a A puncto in plano subiacenti ad rectam $B\Gamma$ perpendicularis ducatur AE [I, 11], et ab A ad AE perpendicularis ducatur AZ [I, 12], et per Z punctum rectae $B\Gamma$ parallela ducatur $H\Theta$ [I, 31].

et quoniam $B\Gamma$ ad utramque AE , AE perpendicularis est, etiam ad planum rectarum AE , AE perpendicularis est $B\Gamma$ [prop. IV]. et ei parallela est $H\Theta$. sin duae rectae parallelae sunt, et alterutra ad planum aliquod perpendicularis est, etiam reliqua ad idem planum perpendicularis est [prop. VIII]; itaque etiam $H\Theta$ ad planum rectarum AE , AE perpendicularis est. quare etiam ad omnes rectas eam tangentes et in plano rectarum AE , AE positas perpendicularis est $H\Theta$ [def. 3]. uerum AZ eam tangit in plano

21—24 nonnulla in F euan. 23. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$] comp. Fb, $\epsilon\sigma\tau\iota$ P, $\epsilon\sigma\tau\iota\alpha\iota$ V. 25. ΔA] Δ , ut uidetur, e corr. F. 26. ΘH B. $\epsilon\nu \tau\tilde{\omega}$] sustulit reparatio in F.

τῶν $ΕΔ$, $ΔΑ$ ἐπιπέδῳ· ἡ $ΗΘ$ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὴν $ΖΑ$ · ὥστε καὶ ἡ $ΖΑ$ ὀρθή ἐστι πρὸς τὴν $ΘΗ$. ἐστὶ δὲ ἡ $ΑΖ$ καὶ πρὸς τὴν $ΔΕ$ ὀρθή· ἡ $ΑΖ$ ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν $ΗΘ$, $ΔΕ$ ὀρθή ἐστίν. ἐὰν δὲ
 5 εὐθεία δυσὶν εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας ἐπὶ τῆς τομῆς πρὸς ὀρθὰς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· ἡ $ΖΑ$ ἄρα τῷ διὰ τῶν $ΕΔ$, $ΗΘ$ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν. τὸ δὲ διὰ τῶν $ΕΔ$, $ΗΘ$ ἐπίπεδόν ἐστι τὸ ὑποκείμενον· ἡ $ΑΖ$ ἄρα τῷ ὑποκει-
 10 μένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν.

Ἀπὸ τοῦ ἄρα δοθέντος σημείου μετεώρου τοῦ $Α$ ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος εὐθεῖα γραμμὴ ἥκται ἡ $ΑΖ$ · ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιβ'.

15 Τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ δοθέντος σημείου πρὸς ὀρθὰς εἰθεῖαν γραμμὴν ἀναστῆσαι.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον, τὶ δὲ πρὸς αὐτῷ σημεῖον τὸ $Α$ · δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ $Α$ σημείου τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀναστῆσαι.

Νενοήσθω τι σημεῖον μετέωρον τὸ $Β$, καὶ ἀπὸ τοῦ $Β$ ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος ἦχθω ἡ $ΒΓ$, καὶ διὰ τοῦ $Α$ σημείου τῇ $ΒΓ$ παράλληλος ἦχθω
 25 ἡ $ΑΔ$.

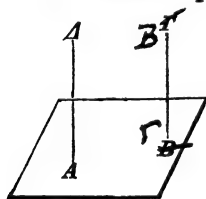
1. ἐστίν PV. 2. ἐστίν φ. ΘΗ] ΘΚ φ., ΗΘ Β, ΖΗ Ρ, et b, sed corr. m. 1. 3. ἐστὶ — καὶ] sustulit reparatio in F. ἡ] (prius) καὶ ἡ V. τήν] m. 2 F. ΑΖ] (alt.) e corr. m. 2 F, seq. ras. 1 litt. ἄρα καὶ F. 5. εὐθείας] εὐθείαι φ. τεμνούσαις] Pb, F mg.; ἀπτομέναις BFV, b mg. ἀλλήλας] -ας in ras. m. 1 b, ἀλλήλων BFV. 6. δι'] om. φ. 8. ἐστίν] comp.

rectarum EA , AA posita. itaque $H\Theta$ ad ZA perpendicularis est; quare etiam ZA ad $H\Theta$ perpendicularis est. uerum AZ etiam ad AE perpendicularis est. AZ igitur ad utramque $H\Theta$, AE perpendicularis est. sin recta ad duas rectas inter se secantes in sectione perpendicularis erigitur, etiam ad planum earum perpendicularis erit [prop. IV]. itaque ZA ad planum rectarum EA , $H\Theta$ perpendicularis est. uerum planum rectarum EA , $H\Theta$ subiaccens est. itaque AZ ad planum subiaccens perpendicularis est.

Ergo a dato puncto eleuato A ad planum subiaccens perpendicularis ducta est recta linea AZ ; quod oportebat fieri.

XII.

Ad datum planum a puncto in eo dato rectam lineam perpendicularem erigere.



Sit datum planum, quod subiacet, et punctum in eo datum sit A . oportet igitur, ab A puncto ad planum subiaccens perpendicularem rectam lineam erigere.

supponatur eleuatum aliquod punctum B , et a B ad planum subiaccens perpendicularis ducatur $B\Gamma$ [prop. XI], et per A punctum rectae $B\Gamma$ parallela ducatur AA .

Fb, $\epsilon\sigma\tau\iota$ PBV. 9. $\epsilon\pi\acute{\iota}\pi\epsilon\delta\acute{\omicron}\nu \epsilon\sigma\tau\iota \tau\acute{\omicron} \acute{\omicron}\pi\omicron\upsilon\epsilon\acute{\iota}\mu\epsilon\nu\omicron]$ $\epsilon\pi\acute{\iota}\pi\epsilon\delta\acute{\omicron}\nu \pi\rho\acute{\omicron}\varsigma \acute{\omicron}\rho\theta\acute{\alpha}\varsigma \epsilon\sigma\tau\iota\nu \varphi$ ZA b. 10. $\epsilon\sigma\tau\alpha\iota$ V. 11. $\acute{\alpha}\rho\alpha]$ om. F. $\delta\omicron\theta\acute{\epsilon}\nu\tau\omicron\varsigma \acute{\alpha}\rho\alpha$ V. 13. $\eta AZ]$ om. Fb; add. m. 2 B. $\pi\omicron\iota\eta\sigma\alpha\iota]$ $\delta\epsilon\acute{\iota}\xi\alpha\iota$ P. 15. $\epsilon\alpha\nu\tau\acute{\omega}$ P, sed corr. 16. $\delta\omicron\theta\acute{\epsilon}\nu\tau\iota \sigma\eta\mu\epsilon\acute{\iota}\omicron\nu \varphi$ (non F). $\delta\omicron\theta\acute{\epsilon}\nu\tau\iota \gamma\omicron\sigma\alpha\mu\mu\acute{\eta}\nu$ del. $\acute{\alpha}\gamma\alpha\gamma\epsilon\acute{\iota}\nu$ m. 1 b. 19. $\alpha\upsilon\tau\acute{\omicron}$ V, et P, sed corr. Post prius A ras. 1 litt. F. 22. $\mu\epsilon\tau\acute{\epsilon}\omega\phi\acute{\omicron}\nu \tau\iota \sigma\eta\mu\epsilon\acute{\iota}\omicron\nu$ P. 23. $\kappa\acute{\alpha}\theta\epsilon\tau\omicron\varsigma]$ comp. in ras. F. 24. $\tau\eta B\Gamma]$ om. b.

Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσιν αἱ $ΑΔ$, $ΓΒ$, ἡ δὲ μία αὐτῶν ἡ $ΒΓ$ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν, καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ $ΑΔ$ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν.

5 Τῷ ἄρα δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου τοῦ $Α$ πρὸς ὀρθὰς ἀνέσταται ἡ $ΑΔ$ ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιγ'.

Ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ
10 δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς οὐκ ἀναστήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ $Α$ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι αἱ $ΑΒ$, $ΑΓ$ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτωσαν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ διήχθω τὸ
15 διὰ τῶν $ΒΑ$, $ΑΓ$ ἐπίπεδον· τομὴν δὴ ποιήσῃ διὰ τοῦ $Α$ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθείαν. ποιεῖτω τὴν $ΔΑΕ$ · αἱ ἄρα $ΑΒ$, $ΑΓ$, $ΔΑΕ$ εὐθεῖαι ἐν ἐνὶ εἰσιν ἐπιπέδῳ. καὶ ἐπεὶ ἡ $ΓΑ$ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς
20 ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὕσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσῃ γωνίας. ἄπτεται δὲ αὐτῆς ἡ $ΔΑΕ$ οὕσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ· ἡ ἄρα ὑπὸ $ΓΑΕ$ γωνία ὀρθή ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ $ΒΑΕ$ ὀρθή ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ $ΓΑΕ$ τῇ ὑπὸ $ΒΑΕ$.
25 καὶ εἰσιν ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ

1. εἰσιν αἱ] om. φ (non F). 3. ἐστὶ FV, comp. b.
4. ἐστὶ BV, comp. Fb. 5. ἀπὸ — 7. ποιῆσαι] καὶ τὰ ἐξῆς V.
5. αὐτό b. 6. τοῦ — ἀνέσταται] euan. F. 7. ποιῆσαι]
δειξαι P. 9. ἀπὸ — ἐπιπέδῳ] PBFV, b mg. m. 1 (γρ.);
in textu b: τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου,
et idem in mg. habuit F, sed uestigia sola restant. 10. ἀνα-

iam quoniam duae rectae parallelae sunt AA , ΓB , et altera earum $B\Gamma$ ad planum subiacens perpendicularis est, etiam reliqua AA ad planum subiacens perpendicularis est [prop. VIII].

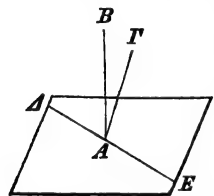
Ergo ad datum planum a puncto in eo dato A perpendicularis erecta est AA ; quod oportebat fieri.

XIII.

Ab eodem puncto ad idem planum duae rectae perpendiculares ad easdem partes erigi non possunt.

Nam si fieri potest, ab eodem puncto A ad planum subiacens duae rectae AB , $A\Gamma$ perpendiculares erigantur ad easdem partes, et ducatur per BA , $A\Gamma$ planum. sectionem igitur in plano subiacenti rectam efficiet per A punctum [prop. III]. efficiat $\angle AAE$. itaque AB , $A\Gamma$, $\angle AAE$ rectae in eodem plano positae sunt. et quoniam ΓA ad planum subiacens perpendicularis est, etiam ad omnes rectas eam tangentes et in plano subiacenti positas rectos angulos efficiet [def. 3]. tangit autem eam $\angle AAE$ in plano subiacenti posita. itaque $\angle \Gamma AE$ rectus est. eadem de causa etiam $\angle BAE$ rectus est. quare $\angle \Gamma AE = \angle BAE$; et in eodem plano positi sunt; quod fieri non potest.

Ergo ab eodem puncto ad idem planum perpen-



σταθίσονται b. 13. α] ins. m. 1 F. 15. BA] B e corr. V. 16. εὐθείαν] om. V. ποιεῖτω] -τω supra add. m. 2 B. 17. Supra τῇν add. εὐθ. V. $\angle AAE$] corr. ex $\angle A$ m. 2 V. $\angle AAE$] corr. ex $\angle E$ m. 1 b. 19. ἐστὶ BV, comp. Fb. 23. ΓAE] seq. ras. $\frac{1}{5}$ lin. V. ἐστὶ PV, comp. Fb. 25. ἐν] P, τῷ ἐν] BFV; τῷ αὐτῷ b, mg. γρ. ἐν ἐν] ἐπὶ π.; αὐτῷ mg. F., in quo τῷ in ras. est. 26. τῶν αὐτῶν φ (non F).

δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀνασταθήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδ'.

Πρὸς ἃ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστιν, 5 παράλληλα ἔσται τὰ ἐπίπεδα.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ AB πρὸς ἐκάτερον τῶν $\Gamma\Delta$, EZ ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω, ὅτι παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα.

Εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται. συμ- 10 πιπτέτωσαν· ποιήσουσι δὴ κοινὴν τομὴν εὐθείαν. ποιεῖτωσαν τὴν $H\Theta$, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς $H\Theta$ τυχόν σημεῖον τὸ K , καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ AK , BK . καὶ ἐπεὶ ἡ AB ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ EZ ἐπίπεδον, καὶ πρὸς τὴν BK ἄρα εὐθεῖαν οὖσαν ἐν τῷ EZ ἐκβλη- 15 θέντι ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ AB . ἡ ἄρα ὑπὸ ABK γωνία ὀρθή ἐστιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ BAK ὀρθή ἐστιν. τριγώνου δὴ τοῦ ABK αἱ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ABK , BAK δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὰ $\Gamma\Delta$, EZ ἐπίπεδα ἐκβαλ- 20 λόμενα συμπεσοῦνται· παράλληλα ἄρα ἐστὶ τὰ $\Gamma\Delta$, EZ ἐπίπεδα.

Πρὸς ἃ ἐπίπεδα ἄρα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστιν, παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

1. ἀναστήσονται V. 4. ἐστι P B V, comp. F b. 5. ἐσται] P, ἐστι B F V b. ἐπίπεδα] αὐτὰ μέρη φ. 6. $\Gamma\Delta$] in ras. V. 7. EZ] Z E b. 12. BK] corr. ex K B m. 2 V; K B B; K'' B' b. 13. καὶ] (alt.) supra scr. comp. m. 1 b. 16. ἐστι B V, comp. F b; item lin. 17. 17. ABK] corr. ex A B F. αἱ] om. V. 18. εἰσιν] supra m. 1 P. ἴσαι εἰσιν V. 20. ἐστὶ] comp. F.; εἰσιν in ras. m. 1 P. 22. αἱ] om. φ (non F). ἐστι B, et corr. in ἐστιν V, comp. F b. 23. ἐπίπεδα] i in ras. m. 1 P. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. V.

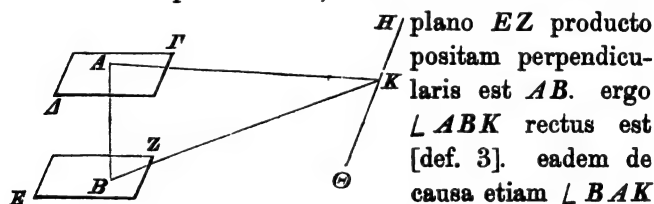
diculares duae rectae ad easdem partes erigi non possunt; quod erat demonstrandum.

XIV.

Ad quae plana eadem recta perpendicularis est, ea parallela erunt.

Recta enim AB ad utrumque planum ΓA , EZ perpendicularis sit. dico, plana parallela esse.

nam si minus, producta concurrent. concurrant; communem igitur sectionem rectam facient [prop. III]. faciant $H\Theta$, et in $H\Theta$ punctum quodlibet sumatur K , et ducantur AK , BK . et quoniam AB perpendicularis est ad planum EZ , etiam ad rectam BK in



plano EZ producto positam perpendicularis est AB . ergo $\angle ABK$ rectus est [def. 3]. eadem de causa etiam $\angle BAK$ rectus est. trianguli igitur ABK duo anguli $ABK + BAK$ duobus rectis aequales sunt; quod fieri non potest [I, 17]. itaque plana ΓA , EZ non concurrent producta. ergo plana ΓA , EZ parallela sunt [def. 8].

Ergo ad quae plana eadem recta perpendicularis est, ea parallela sunt; quod erat demonstrandum.

ιε'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ
 δύο εὐθείας ἀπτομένας ἀλλήλων ὧσι μὴ ἐν τῷ
 αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσαι, παράλληλά ἐστι τὰ δι'
 5 αὐτῶν ἐπίπεδα.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων αἱ AB , $BΓ$
 παρὰ δύο εὐθείας ἀπτομένας ἀλλήλων τὰς $ΔE$, EZ
 ἔστωσαν μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσαι· λέγω, ὅτι ἐκ-
 βαλλόμενα τὰ διὰ τῶν AB , $BΓ$, $ΔE$, EZ ἐπίπεδα
 10 οὐ συμπεσεῖται ἀλλήλοις.

Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ B σημείου ἐπὶ τὸ διὰ τῶν
 $ΔE$, EZ ἐπίπεδον κάθετος ἡ BH καὶ συμβαλλέτω
 τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ H σημειον, καὶ διὰ τοῦ H τῇ
 μὲν $EΔ$ παράλληλος ἦχθω ἡ $HΘ$, τῇ δὲ EZ ἡ HK .
 15 καὶ ἐπεὶ ἡ BH ὀρθὴ ἐστι πρὸς τὸ διὰ τῶν $ΔE$, EZ
 ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς
 εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν $ΔE$, EZ ἐπιπέδῳ
 ὀρθὰς ποιήσῃ γωνίας. ἄπτεται δὲ αὐτῆς ἑκατέρω
 τῶν $HΘ$, HK οὔσα ἐν τῷ διὰ τῶν $ΔE$, EZ ἐπιπέδῳ·
 20 ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρω τῶν ὑπὸ $BHΘ$, BHK γω-
 νιῶν. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ BA τῇ $HΘ$, αἱ
 ἄρα ὑπὸ HBA , $BHΘ$ γωνίαι δυσὲν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.
 ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ $BHΘ$ · ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ HBA .
 ἡ HB ἄρα τῇ BA πρὸς ὀρθάς ἐστιν. διὰ τὰ αὐτὰ
 25 δὴ ἡ HB καὶ τῇ $BΓ$ ἐστι πρὸς ὀρθάς. ἐπεὶ οὖν
 εὐθεῖα ἡ HB δυσὲν εὐθείαις ταῖς BA , $BΓ$ τεμνου-

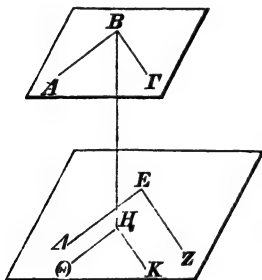
3. Ante ὧσι ras. 3 litt. V; ὧσιν B. 4. ἐστιν P. 6. $BΓ$] corr.
 ex $ΓB$ V; $ΓB$ B. 10. συμ- in ras. V. συμπεσοῦνται b, corr.
 m. 1. 11. B] e corr. m. 1 b. 13. τοῦ H] τοῦ H σημείου b,
 σημείου add. m. 2 F. 15. ἐστιν PV, comp. F. 16 αὐτῆς]
 om. φ. 17. διὰ τῶν] om. P. 19. τῶν $HΘ$ — 20. ἑκατέρω]
 mg. m. 1 V. 20. ἐστίν] om. V. $BHΘ$] $Θ$ in ras. V.

XV.

Si duae rectae inter se tangentes duabus rectis inter se tangentibus parallelae sunt non in eodem plano positae, plana earum inter se parallelae sunt.

Nam duae rectae inter se tangentes AB , $B\Gamma$ duabus rectis inter se tangentibus ΔE , EZ parallelae sint non in eodem plano positae. dico, plana rectarum AB , $B\Gamma$ et ΔE , EZ producta inter se non concurrere.

ducatur enim a B puncto ad planum rectarum ΔE , EZ perpendicularis BH [prop. XI] et cum plano in H puncto concurrat, et per H rectae $E\Delta$ parallela



ducatur $H\Theta$, rectae autem EZ parallela HK . et quoniam BH ad planum rectarum ΔE , EZ perpendicularis est, etiam ad omnes rectas eam tangentes et in plano rectarum ΔE , EZ positae rectos angulos efficiet [def. 3]. uerum utraque $H\Theta$, HK eam tangit in plano rectarum ΔE , EZ posita. itaque uterque angulus $BH\Theta$, BHK rectus est. et quoniam BA rectae $H\Theta$ parallela est [prop. IX], anguli $HBA + BH\Theta$ duobus rectis aequales sunt [I, 29]. uerum $\angle BH\Theta$ rectus est; itaque etiam $\angle HBA$ rectus. HB igitur ad BA perpendicularis est. eadem de causa HB etiam ad $B\Gamma$ perpendicularis est. iam quoniam recta HB ad duas rectas inter se secantes BA , $B\Gamma$ perpendicularis

22. HBA] H ins. V.

in ras. V, BH Bb.

$BFVb$.

23. η] (alt.) supra scr. V.

$\kappa\alpha\iota$] in ras. V.

$\epsilon\upsilon\theta\epsilon\lambda\alpha\iota\varsigma$] $\delta\rho\theta\alpha\iota\varsigma$ B, supra scr. $\epsilon\upsilon\theta\epsilon\lambda\alpha\iota\varsigma$ m. 2.

25. HB]

P , BH

σαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν, ἡ HB ἄρα καὶ
 τῷ διὰ τῶν BA , $BΓ$ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν.
 [διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ BH καὶ τῷ διὰ τῶν $HΘ$, HK
 ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν. τὸ δὲ διὰ τῶν $HΘ$, HK
 5 ἐπιπέδον ἐστὶ τὸ διὰ τῶν $ΔE$, EZ · ἡ BH ἄρα τῷ
 διὰ τῶν $ΔE$, EZ ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθὰς. ἐδείχθη
 δὲ ἡ HB καὶ τῷ διὰ τῶν AB , $BΓ$ ἐπιπέδῳ πρὸς
 ὀρθὰς]. πρὸς ἃ δὲ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή
 ἐστίν, παράλληλά ἐστὶ τὰ ἐπίπεδα· παράλληλον ἄρα ἐστὶ
 10 τὸ διὰ τῶν AB , $BΓ$ ἐπίπεδον τῷ διὰ τῶν $ΔE$, EZ .
 Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο
 εὐθείας ἀπτομένας ἀλλήλων ὥσι μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπι-
 πέδῳ, παράλληλά ἐστὶ τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα· ὅπερ
 εἶδει δεῖξαι.

15

ις'.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα παράλληλα ὑπὸ ἐπιπέδου
 τινὸς τέμνηται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλ-
 ληλοὶ εἰσιν.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα παράλληλα τὰ AB , $ΓΔ$ ὑπὸ ἐπι-
 20 πέδου τοῦ $EZHΘ$ τεμνέσθω, κοινὰ δὲ αὐτῶν τομαὶ
 ἔστωσαν αἱ EZ , $HΘ$ · λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστίν ἡ
 EZ τῇ $HΘ$.

Εἰ γὰρ μὴ, ἐκβαλλόμεναι αἱ EZ , $HΘ$ ἤτοι ἐπὶ

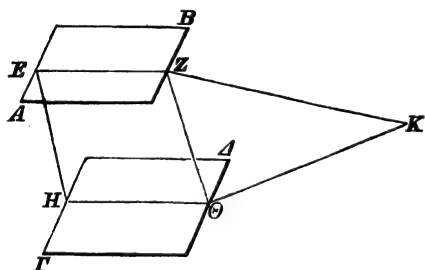
2. ἐστὶ $BV\varphi$, comp. b. 3. διὰ τὰ — 8. ὀρθὰς] mg. m.
 2 B, punctis del. m. 2 V. 4. ἐστὶ BV , comp. Fb. 5. ἐστίν
 P. Post EZ del. ἐπὶ m. 1 P. 7. $BΓ$] $ΔΓBV$. Ad lin. 3
 —8 mg. b m. 1: γρ. ἐστὶ δὲ καὶ τῷ διὰ τῶν $ΔE$, EZ ἐπιπέδῳ
 ὀρθή· ἡ BH ἄρα πρὸς ἐκότερον τῶν διὰ τῶν $ABΓ$, $ΔEZ$ ἐπι-
 πέδων ὀρθή ἐστὶ; idem in textu BV (τῷ corr. ex τῷ, $Γ$ in ras.
 V; ἐστὶν B), mg. m. 1 F. 9. ἐστὶ BV , comp. Fb. 12. ὥσιν
 B. ἐπιπέδῳ οὖσαι B. 13. ἐστὶ τὰ] τὰ seq. lac. φ. ὅπερ
 εἶδει δεῖξαι] om. V. 17. παράλληλοι] ἔστωσαν φ. 18. εἰσι

erecta est, HB etiam ad planum rectarum BA , $B\Gamma$ perpendicularis est [prop. IV].¹⁾ ad quae autem plana eadem recta perpendicularis est, ea parallela sunt [prop. XIV]. itaque planum rectarum AB , $B\Gamma$ parallelum est plano rectarum ΔE , EZ .

Ergo si duae rectae inter se tangentes duabus rectis inter se tangentibus parallelae sunt non in eodem plano positae, plana earum parallela sunt; quod erat demonstrandum.

XVI.

Si duo plana parallela plano aliquo secantur, communes eorum sectiones parallelae sunt.



Nam duo plana parallela AB , $\Gamma\Delta$ plano $EZH\Theta$ secantur, communes autem eorum sectiones sint EZ , $H\Theta$. dico, EZ rectae $H\Theta$ parallelam esse.

nam si minus, EZ , $H\Theta$ productae concurrent aut

1) Uerba διὰ τὰ lin. 3 — ὁρθὰς lin. 8 ab Euclide profecta esse nequeunt, quippe quae per ambages demonstrant, BH ad planum rectarum ΔE , EZ perpendicularem esse, id quod e praeparatione patet (p. 40, 11), ad quam Euclides tacite respicit contra morem suum. inde factum est, ut uerba illa interpolarentur et id quidem iam ante Theonem. scriptura codicis B per se bona sine dubio e coniectura satis recenti orta est.

Vb, comp. F. 19. $\Gamma\Delta''$, AB' F. 20. τετμήσθω b, corr. m. 1. 23. αἱ] συμπεσόνται αἱ V.

τὰ Z , Θ μέρη ἢ ἐπὶ τὰ E , H συμπεσοῦνται. ἐκβε-
 βλήσθωσαν ὥς ἐπὶ τὰ Z , Θ μέρη καὶ συμπιπτεύωσαν
 πρότερον κατὰ τὸ K . καὶ ἐπεὶ ἡ EZK ἐν τῷ AB
 ἐστὶν ἐπιπέδῳ, καὶ πάντα ἄρα τὰ ἐπὶ τῆς EZK ση-
 5 μεία ἐν τῷ AB ἐστὶν ἐπιπέδῳ. ἐν δὲ τῶν ἐπὶ τῆς
 EZK εὐθείας σημείων ἐστὶ τὸ K . τὸ K ἄρα ἐν τῷ
 AB ἐστὶν ἐπιπέδῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὸ K καὶ ἐν
 τῷ $\Gamma\Delta$ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· τὰ AB , $\Gamma\Delta$ ἄρα ἐπίπεδα ἐκ-
 βαλλόμενα συμπεσοῦνται. οὐ συμπίπτουσι δὲ διὰ τὸ
 10 παράλληλα ὑποκεῖσθαι· οὐκ ἄρα αἱ EZ , $H\Theta$ εὐθεῖαι
 ἐκβαλλόμεναι ἐπὶ τὰ Z , Θ μέρη συμπεσοῦνται. ὁμοίως
 δὴ δείξομεν, ὅτι αἱ EZ , $H\Theta$ εὐθεῖαι οὐδὲ ἐπὶ τὰ E ,
 H μέρη ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. αἱ δὲ ἐπὶ μηδ-
 15 ἄλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ EZ τῇ $H\Theta$.

Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα παράλληλα ὑπὸ ἐπιπέδου
 τινὸς τέμνῃται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοι
 εἰσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιζ'.

20 Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέ-
 δων τέμνωνται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμη-
 θήσονται.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ AB , $\Gamma\Delta$ ὑπὸ παραλλήλων
 ἐπιπέδων τῶν $H\Theta$, $K\Lambda$, MN τεμνέσθωσαν κατὰ τὰ
 25 A , E , B , Γ , Z , Δ σημεία· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ AE
 εὐθεῖα πρὸς τὴν EB , οὕτως ἡ ΓZ πρὸς τὴν $Z\Delta$.

1. τὰ] (alt.) supra scr. m. 2 B. συμπεσοῦνται] om. V.
 ἐκβεβλήσθω in ras. V. 2. ὡς] P, F m. 1; πρότερον ὡς BVb,
 F m. 2. 3. πρότερον] om. BFV. Post καὶ spatium 6 litt.
 reliq. φ. τῷ AB] ἐνὶ b, mg. γρ. ἐν τῷ AB ἐστὶν. 4. ἐπιπέδῳ

ad Z , \odot partes aut ad E , H . producantur ad Z , \odot partes et prius concurrant in K . et quoniam EZK in plano AB posita est, etiam omnia rectae EZK puncta in plano AB posita sunt [prop. I]. ex punctis autem rectae EZK unum est K . itaque K in plano AB positum est. eadem de causa K etiam in plano $\Gamma\Delta$ positum est. quare plana AB , $\Gamma\Delta$ producta concurrent. uerum non concurrunt, quia parallela esse supponuntur. itaque rectae EZ , $H\odot$ productae ad Z , \odot partes non concurrent. iam similiter demonstrabimus, rectas EZ , $H\odot$ ne ad E , H quidem partes productas concurrere. quae autem ad neutras partes concurrunt, parallelae sunt. itaque EZ rectae $H\odot$ parallela est.

Ergo si duo plana parallela plano aliquo secantur, communes eorum sectiones parallelae sunt; quod erat demonstrandum.

XVII.

Si duae rectae planis parallelis secantur, secundum eandem rationem secabuntur.

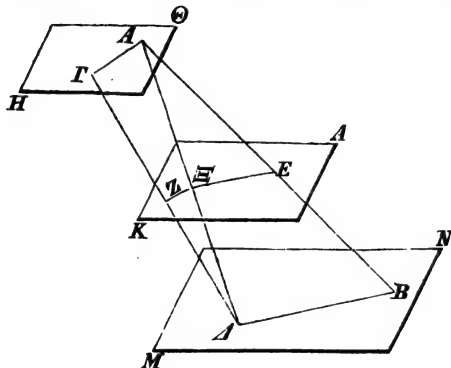
Nam duae rectae AB , $\Gamma\Delta$ planis parallelis $H\odot$, $K\Lambda$, MN in punctis A , E , B et Γ , Z , Δ secantur. dico, esse $AE:EB = \Gamma Z:Z\Delta$.

ἔστιν F. καὶ — 5. ἐπιπέδῳ] mg. F (euan.). 5. ἐπιπέδῳ
ἔστιν BV, F?; ἐπιπέδῳ εἰσὶν b. τῶν] τῷ B, et V, sed corr.
m. rec. 6. σημείῳ Bφ, et V (corr. m. rec.); σημείον b.
12. αὐ] καὶ αὐ BV. οὐδ' P. 13. μέρῃ] supra scr. m. 1 F.
ἐκβαλλόμεναι οὐ b. ἐπὶ] ἐπὶ τὰ Vφ. 14. τὰ] om. BV.
εἰσι Vb, comp. F. 15. ἡ] post ins. V. τῇ] om. b.
16. παράλληλα — 18. δεῖξαι]: ~ V. 17. τέμνεται B. 21. τέ-
μνονται P, corr. m. 1. 24. τεμνέτωσαν b. 25. Α] insert.
postea V. B] in ras. V. Δ, Z B. 26. ΖΔ] e corr. V,
in ras. m. 1 P; ΔZ B.

Ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ $ΑΓ$, $ΒΔ$, $ΑΔ$, καὶ συμβαλλέτω ἡ $ΑΔ$ τῷ $ΚΑ$ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ $Ξ$ σημεῖον, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $ΕΞ$, $ΞΖ$. καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ $ΚΑ$, $ΜΝ$ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ $ΕΒΔΞ$
 5 τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ $ΕΞ$, $ΒΔ$ παράλληλοι εἰσιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ $ΗΘ$, $ΚΑ$ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ $ΑΞΖΓ$ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ $ΑΓ$, $ΞΖ$ παράλληλοι εἰσιν. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ $ΑΒΔ$ παρὰ μίαν τῶν
 0 πλευρῶν τὴν $ΒΔ$ εὐθεῖα ἤκται ἡ $ΕΞ$, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $ΑΕ$ πρὸς $ΕΒ$, οὕτως ἡ $ΑΞ$ πρὸς $ΞΔ$. πάλιν ἐπεὶ τριγώνου τοῦ $ΑΔΓ$ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν $ΑΓ$ εὐθεῖα ἤκται ἡ $ΞΖ$, ἀνάλογόν ἐστὶν ὡς ἡ $ΑΞ$ πρὸς $ΞΔ$, οὕτως ἡ $ΓΖ$ πρὸς $ΖΔ$. ἐδείχθη
 5 δὲ καὶ ὡς ἡ $ΑΞ$ πρὸς $ΞΔ$, οὕτως ἡ $ΑΕ$ πρὸς $ΕΒ$. καὶ ὡς ἄρα ἡ $ΑΕ$ πρὸς $ΕΒ$, οὕτως ἡ $ΓΖ$ πρὸς $ΖΔ$.
 Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τέμνωνται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθήσονται· ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

2. τῷ] τό φ. 3. $ΞΖ$] $Ξ'' Ζ'$ b. ἐπίπεδοι φ. 4. παρ-
 ἀλληλα] = οἱ φ. $ΕΒΔΞ$] $Ξ$ in ras. V, corr. ex Z m. 1 F.
 5. $ΕΞ$, $ΒΔ$] in ras. V, $Ξ$ eras. B; $ΕΖ$, $ΒΔ$ b. 6. εἰσι
 Vb, comp. F. διὰ — 9. εἰσιν] mg. V. 7. ἐπιπέδου τοῦ]
 corr. ex ἐπιπέδου P. m. 2. $ΑΞΖΓ$] $Ξ$ in ras. V. 8. $ΞΖ$]
 corr. ex Z m. 2 B. 9. εἰσι b, comp. F. μία φ. 10. τὴν]
 τῇ b. εὐθεῖαν B, sed corr. 11. ἐστίν] om. V. τὴν $ΕΒ$ V.
 12. $ΑΔ'' Γ'$ b. 13. τὴν] τῶν φ (non F). εὐθεῖαν B, sed corr.
 ἐστίν] ἄρα FV. 14. τὴν $ΞΔ$ BF. $ΓΖ$] Z in ras. m. rec. V.
 τὴν $ΖΔ$ BFVb. ἐδείχθη — 15. $ΕΒ$] mg. m. 2 B. 15. τὴν
 $ΞΔ$ FVb. τὴν $ΕΒ$ V. 16. καὶ ὡς ἄρα] ἐστίν ἄρα καὶ
 ὡς b, ὅ in spatia plur. litt. φ. $ΑΕ$] A in ras. m. 2 V.
 τὴν $ΕΒ$ BFb. τὴν $ΖΔ$ B. 17. ὑπὸ — 19. δεῖξαι] καὶ τὰ
 εἰῆς V. 18. τέμνωνται, εἰς] στερεῶν seq. lac. φ. τμη-
 σονται B, corr. m. 2.

ducantur enim AG , BA , AA , et AA cum plano KA concurrat in puncto Ξ , et ducantur $E\Xi$, ΞZ . et quoniam duo plana parallela KA , MN plano $EB\Delta\Xi$ secantur, communes eorum sectiones $E\Xi$, $B\Delta$ parallelae sunt [prop. XVI]. eadem de causa, quoniam



duo plana parallela $H\Theta$, KA plano $A\Xi Z\Gamma$ secantur, communes eorum sectiones AG , ΞZ parallelae sunt. et quoniam in triangulo $AB\Delta$ uni laterum $B\Delta$ parallela ducta est recta $E\Xi$, erit $AE:EB = A\Xi:\Xi\Delta$ [VI, 2]. rursus quoniam in triangulo $A\Delta\Gamma$ uni laterum $A\Gamma$ parallela ducta est recta ΞZ , erit $A\Xi:\Xi\Delta = \Gamma Z:Z\Delta$. sed demonstratum est, esse etiam $A\Xi:\Xi\Delta = AE:EB$. quare etiam $AE:EB = \Gamma Z:Z\Delta$.

Ergo si duae rectae planis parallelis secantur, secundum eandem rationem secabuntur; quod erat demonstrandum.

ιη'.

Ἐὰν εὐθεῖα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾗ, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

5 Εὐθεῖα γάρ τις ἡ AB τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ πάντα τὰ διὰ τῆς AB ἐπίπεδα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστιν.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ διὰ τῆς AB ἐπίπεδον τὸ ΔE , καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ τοῦ ΔE ἐπιπέδου καὶ τοῦ ὑπο-
 10 κειμένου ἡ GE , καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς GE τυχόν σημείον τὸ Z , καὶ ἀπὸ τοῦ Z τῇ GE πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἐν τῷ ΔE ἐπιπέδῳ ἡ ZH . καὶ ἐπεὶ ἡ AB πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ὀρθὴ ἔστιν, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀποτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὐσας ἐν τῷ ὑπο-
 15 κειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὴ ἔστιν ἡ AB · ὥστε καὶ πρὸς τὴν GE ὀρθὴ ἔστιν· ἡ ἄρα ὑπὸ ABZ γωνία ὀρθὴ ἔστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ HZB ὀρθὴ· παράλληλος ἄρα ἔστιν ἡ AB τῇ ZH . ἡ δὲ AB τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστιν· καὶ ἡ ZH ἄρα τῷ ὑπο-
 20 κειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστιν. καὶ ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἔστιν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἐνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ᾖσιν. καὶ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων τῇ GE ἐν ἐνὶ τῶν
 25 ἐπιπέδων τῷ ΔE πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσα ἡ ZH ἐδείχθη

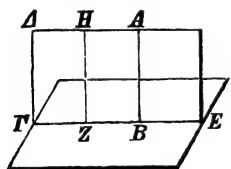
4. ἔσται] corr. ex ἔστιν V. 5. εὐθεῖα — 7. ἔστιν] mg. m. 1 V. 6. τῆς] om. φ (non F). 13. ἔστι PBFV, comp. b. 14. οὐσα P. 16. ἔστι V. γωνίαν φ. 17. HZB] in ras. V. 18. ἐστίν] om. V. τῷ] τῷ αὐτῷ F. 19. ἔστι B. καὶ ἡ — 20. ἔστιν] om. b, mg. V. 19. HZ P. 20. ἔστι PBV, comp. F. καὶ] καὶ ἐπεὶ BV. 21. πρὸς ἐπίπεδον] supra m. 2 V. 23. ἐπιπέδῳ] τῶν ἐπιπέδων V. ᾧσι V b.

XVIII.

Si recta ad planum aliquod perpendicularis est, etiam omnia plana, quae per eam ducuntur, ad idem planum perpendicularia erunt.

Nam recta AB ad planum subiacens perpendicularis sit. dico, etiam omnia plana, quae per AB ducantur, ad planum subiacens perpendicularia esse.

ducatur enim per AB planum $\triangle A\Gamma E$, et communis sectio plani $\triangle A\Gamma E$ et subiacentis sit ΓE , et in ΓE sumatur punctum aliquod Z , et ab Z ad ΓE perpen-



dicularis in plano $\triangle A\Gamma E$ ducatur ZH . et quoniam AB ad planum subiacens perpendicularis est, etiam ad omnes rectas eam tangentes et in plano subiacenti positas perpendicularis est AB [def. 3]. quare etiam

ad ΓE perpendicularis est. itaque $\angle ABZ$ rectus est. uerum etiam $\angle HZB$ rectus est. itaque AB rectae ZH parallela est [I, 28]. AB autem ad planum subiacens perpendicularis est. itaque etiam HZ ad planum subiacens perpendicularis est [prop. VIII]. et planum ad planum perpendiculare est, si rectae in altero plano ad communem planorum sectionem perpendiculares ductae ad reliquum planum perpendiculares sunt [def. 4]. et demonstratum est, ZH in altero plano $\triangle A\Gamma E$ ad communem planorum sectionem ΓE perpendicularem ductam ad planum subiacens perpen-

XVIII. Eutocius in Apollon. p. 23.

24. τῶν ἐπιπέδων τομῇ b. τομῇ] τομῇ ἄρα φ. τῇ]
-ῇ e corr. V.

τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς· τὸ ἄρα $\triangle E$ ἐπιπέδον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ πάντα τὰ διὰ τῆς AB ἐπίπεδα ὀρθὰ τυγχάνοντα πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον.

- 5 Ἐὰν ἄρα εὐθεία ἐπιπέδῳ τινι πρὸς ὀρθάς ᾗ, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΙΘ'.

- Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα ἐπιπέδῳ
10 τινι πρὸς ὀρθάς ᾗ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἔσται.

- Δύο γάρ ἐπίπεδα τὰ AB , $B\Gamma$ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἔστω, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω η $B\Delta$ · λέγω, ὅτι ἡ $B\Delta$ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς
15 ὀρθάς ἐστίν.

- Μὴ γάρ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐν μὲν τῷ AB ἐπιπέδῳ τῇ $A\Delta$ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθάς ἡ $\triangle E$, ἐν δὲ τῷ $B\Gamma$ ἐπιπέδῳ τῇ $\Gamma\Delta$ πρὸς ὀρθάς ἡ $\triangle Z$. καὶ ἐπεὶ τὸ AB ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑπο-
20 κείμενον, καὶ τῇ κοινῇ αὐτῶν τομῇ τῇ $A\Delta$ πρὸς ὀρθάς ἐν τῷ AB ἐπιπέδῳ ἥκται ἡ $\triangle E$, ἡ $\triangle E$ ἄρα ὀρθὴ ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ὁμοίως δὴ

2. *ἔστιν* P. Post ὑποκείμενον add. ἐπίπεδον b et mg. m. rec. V. 5. καὶ — 7. δεῖξαι]: ~ V. 6. τὰ δι' αὐτῆς ἐπι- euan. F. 9. τέμνοντα] στερεοντα φ (non F). ἐπιπέδῳ τινι] om. F, sed uidetur fuisse in mg. 10. τομῇ] in ras. m. 1 P. 12. τῷ] bis P; corr. m. 1. 15. *ἔστι* BV, comp. F. 16. ἀπὸ] ὑπὸ P. 17. τῇ] e corr. b. πρὸς] om. φ. $\triangle E$] \triangle e corr. V. 18. δέ] om. P. $\Gamma\Delta$] $\triangle\Gamma$ b. $\triangle Z$] Z in ras. V. 19. *ἔστι*] om. φ (non F). 20. καὶ] ἐπίπεδον, καὶ b. $A\Delta$] A in ras. FV.

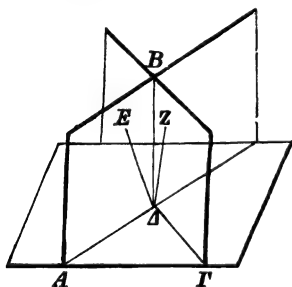
dicularem esse. ergo $\triangle E$ planum ad subiacens perpendicularare est. iam similiter demonstrabimus, etiam omnia plana, quae per AB ducantur, ad planum subiacens perpendiculararia esse.

Ergo si recta ad planum aliquod perpendicularis est, etiam omnia plana, quae per eam ducuntur, ad idem planum perpendiculararia erunt; quod erat demonstrandum.

XIX.

Si duo plana inter se secantia ad planum aliquod perpendiculararia sunt, etiam communis eorum sectio ad idem planum perpendiculararis erit.

Nam duo plana AB , $B\Gamma$ ad planum subiacens perpendiculararia sint, et communis eorum sectio sit $B\Delta$.



dico, $B\Delta$ ad planum subiacens perpendiculararem esse.

Ne sit enim, et a Δ puncto in plano AB ad rectam $A\Delta$ perpendicularis ducatur ΔE , in $B\Gamma$ autem plano ad $\Gamma\Delta$ perpendicularis ΔZ .¹⁾

et quoniam AB planum ad subiacens perpendicularare est, et ad communem eorum sectionem $A\Delta$ in plano AB perpendicularis ducta est ΔE , ΔE ad planum subiacens perpendicularis est [def. 4]. similiter demonstrabimus,

1) Nam si communis planorum sectio ad planum subiacens perpendicularis non est, ad rectas ΔA , $\Delta \Gamma$ rectos angulos non efficiet. ergo et in plano AB et in $B\Gamma$ locus est perpendiculari ad $A\Delta$ et ad $\Delta \Gamma$ in Δ erectae.

δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΔZ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἄρα σημείου τοῦ Δ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀνεσταμέναι εἰσὶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἀνασταθήσεται πρὸς ὀρθὰς πλὴν τῆς ΔB κοινῆς τομῆς τῶν AB , $B\Gamma$ ἐπιπέδων.

Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾗ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ τῷ αὐτῷ
10 ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κ'.

Ἐὰν στερεὰ γωνία ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται, δύο ὁποιοιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

15 Στερεὰ γὰρ γωνία ἡ πρὸς τῷ A ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ $B\Lambda\Gamma$, $\Gamma\Delta\Delta$, ΔAB περιεχέσθω· λέγω, ὅτι τῶν ὑπὸ $B\Lambda\Gamma$, $\Gamma\Delta\Delta$, ΔAB γωνιῶν δύο ὁποιοιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

20 Εἰ μὲν οὖν αἱ ὑπὸ $B\Lambda\Gamma$, $\Gamma\Delta\Delta$, ΔAB γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, φανερόν, ὅτι δύο ὁποιοιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσιν. εἰ δὲ οὐ, ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ $B\Lambda\Gamma$, καὶ συνεστήτω πρὸς τῇ AB εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A τῇ ὑπὸ ΔAB γωνίᾳ ἐν τῷ

1. ὅτι καὶ ἡ] om. φ (non F). ΔZ] $\Delta'' Z'$ b. 4. ἐστίν] om. V. 6. τῆς] e corr. m. 1 b. 8. ἐπίπεδα — 10. δεῖξαι] : ~ V. 9. ᾗ, καὶ] euan. F. 14. μείζονες V φ. πάντῃ seq. ras. 1 litt. P. 15. τῷ corr. in τό m. 1 b. 16. περιεχέσθω — 17. γωνιῶν] mg. m. 2 V, in text. eras. γωνιῶν. 16. $\Gamma\Delta\Delta$ b. 20. $\Gamma\Delta\Delta$] Δ e corr. V. 21. ἴσαι] εἰσι ἴσαι

etiam $\angle Z$ perpendiculararem esse ad planum subiacens. itaque ab eodem puncto A ad planum subiacens duae rectae ad easdem partes perpendiculares erectae sunt; quod fieri non potest [prop. XIII]. itaque a A puncto nulla recta ad planum subiacens perpendicularis erigetur praeter AB , quae communis est sectio planorum AB , $B\Gamma$.

Ergo si duo plana inter se secantia ad planum aliquod perpendicularia sunt, etiam communis eorum sectio ad idem planum perpendicularis erit; quod erat demonstrandum.

XX.

Si angulus solidus tribus angulis planis continetur, duo quilibet reliquo maiores erunt quoquo modo coniuncti.

Nam angulus solidus, qui ad A positus est, tribus angulis planis $B\Lambda\Gamma$, $\Gamma A\Delta$, ΔAB contineatur. dico, duos quoslibet angulorum $B\Lambda\Gamma$, $\Gamma A\Delta$, ΔAB reliquo maiores esse quoquo modo coniunctos.

iam si anguli $B\Lambda\Gamma$, $\Gamma A\Delta$, ΔAB inter se aequales sunt, adparet, duos quoslibet reliquo maiores esse. si minus, maior¹⁾ sit $\angle B\Lambda\Gamma$, et ad rectam AB et punctum eius A in plano rectarum BA , $A\Gamma$ angulo ΔAB

1) Sc. angulo ΔAB . neque enim necesse est, omnium eum maximum esse.

V. $\epsilon\lambda\sigma\iota\nu$] om. V. 22. $\epsilon\lambda\sigma\iota$ V, comp. F. 24. ΔAB] $\Delta A\Gamma P$. $\epsilon\nu$] om. B, supra scr. V.

διὰ τῶν $ΒΑΓ$ ἐπιπέδῳ ἴση ἢ ὑπὸ $ΒΑΕ$, καὶ κείσθω
 τῇ $ΑΔ$ ἴση ἢ $ΑΕ$, καὶ διὰ τοῦ $Ε$ σημείου διαχθεῖσα
 ἢ $ΒΕΓ$ ταμνέτω τὰς $ΑΒ$, $ΑΓ$ εὐθείας κατὰ τὰ $Β$, $Γ$
 σημεία, καὶ ἐπεξέχθωσαν αἱ $ΔΒ$, $ΔΓ$. καὶ ἐπεὶ ἴση
 5 ἐστὶν ἢ $ΔΑ$ τῇ $ΑΕ$, κοινὴ δὲ ἢ $ΑΒ$, δύο δυσὶν
 ἴσαι· καὶ γωνία ἢ ὑπὸ $ΔΑΒ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΒΑΕ$ ἴση·
 βάσις ἄρα ἢ $ΔΒ$ βάσει τῇ $ΒΕ$ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ
 δύο αἱ $ΒΔ$, $ΔΓ$ τῆς $ΒΓ$ μείζονές εἰσιν, ὧν ἢ $ΔΒ$ τῇ
 $ΒΕ$ ἐδείχθη ἴση, λοιπὴ ἄρα ἢ $ΔΓ$ λοιπῆς τῆς $ΕΓ$
 10 μείζων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἢ $ΔΑ$ τῇ $ΑΕ$,
 κοινὴ δὲ ἢ $ΑΓ$, καὶ βάσις ἢ $ΔΓ$ βάσεως τῆς $ΕΓ$
 μείζων ἐστίν, γωνία ἄρα ἢ ὑπὸ $ΔΑΓ$ γωνίας τῆς ὑπὸ
 $ΕΑΓ$ μείζων ἐστίν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἢ ὑπὸ $ΔΑΒ$ τῇ
 ὑπὸ $ΒΑΕ$ ἴση· αἱ ἄρα ὑπὸ $ΔΑΒ$, $ΔΑΓ$ τῆς ὑπὸ
 15 $ΒΑΓ$ μείζονές εἰσιν. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ
 λοιπαὶ σύνδυο λαμβανόμεναι τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν.
 Ἐὰν ἄρα στερεὰ γωνία ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπι-
 πέδων περιέχεται, δύο ὁποιαοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές
 εἰσι πάντῃ μεταλαμβάνομεναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

20

κα'.

Ἄπαντα στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων [ἢ] τεσσ-
 σάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται.

Ἐστω στερεὰ γωνία ἢ πρὸς τῷ $Α$ περιεχομένη ὑπὸ
 ἐπιπέδων γωνιῶν τῶν ὑπὸ $ΒΑΓ$, $ΓΑΔ$, $ΔΑΒ$ · λέγω,
 25 ὅτι αἱ ὑπὸ $ΒΑΓ$, $ΓΑΔ$, $ΔΑΒ$ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσ-
 σονές εἰσιν.

1. ἐπιπέδῳ] in ras. m. 1 P. ἢ] supra scr. V, ut lin. 2.
 κείσθω τῇ] διὰ τοῦ $Ε$ ση φ (non F). Hinc plerasque ineptias
 manus φ omisi, maxime ubi aut certa uestigia ueri super-
 erant, aut certe nulla erat causa de scriptura cod. F dubitandi.

aequalis construatur $\angle BAE$, et ponatur $AE = AD$, et BEG per punctum E ducta rectas AB , AG secet in B , G punctis, et ducantur AB , AG . et quoniam $AD = AE$, et AB communis est, duo latera duobus aequalia sunt; et $\angle DAB = BAE$. itaque $AB = BE$ [I, 4]. et quoniam $BD + DG > BG$ [I, 20], et demonstratum est, esse $AB = BE$, erit $DG > EG$. et quoniam $AD = AE$, et AG communis est, et $DG > EG$, erit $\angle DAG > EAG$ [I, 25]. et demonstratum est, esse etiam $\angle DAB = BAE$. itaque $DAB + DAG > BAG$. eodem modo demonstrabimus, etiam reliquos angulos duo simul coniunctos reliquo maiores esse.

Ergo si angulus solidus tribus angulis planis continetur, duo quilibet reliquo maiores sunt quoquo modo coniuncti; quod erat demonstrandum.

XXI.

Omnis angulus solidus planis angulis minoribus, quam sunt quattuor anguli recti, continentur.

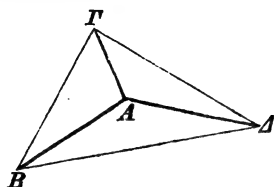
Sit angulus solidus, qui ad A positus est, comprehensus planis angulis BAG , GAD , DAB . dico, esse $BAG + GAD + DAB$ minores quattuor rectis.

3. Γ] corr. ex E m. 1 b. 4. $\angle B$] $B\Delta$ F. 6. Post $\epsilon\sigma\alpha\iota$ ras. 4 litt. hab. V. 7. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$ $\epsilon\sigma\eta$] $\epsilon\sigma\eta$ seq. spatium uacuo 3 litt. V. 8. $B\Delta$] $B''\Delta'$ b, $\angle B$ BV. $\tau\eta$ V? 10. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$] (prius) $\epsilon\sigma\tau\iota$ PBV, comp. Fb. AE] in ras. V. 11. $\angle \Gamma$] corr. ex AE B. 12. $\epsilon\sigma\tau\iota$ PBV, comp. F. Dein add. $\kappa\alpha\iota$ V. $\angle AG$] $\angle BG$ ϕ . 14. $\tau\eta\varsigma$] bis P, corr. m. 1; $\tau\omicron\iota\varsigma$ F. 17. $\acute{\upsilon}\pi\acute{o}$ — 19. $\delta\epsilon\iota\chi\alpha\iota$] $\kappa\alpha\iota$ $\tau\grave{\alpha}$ $\epsilon\xi\eta\varsigma$ V. 21. $\acute{\upsilon}\pi\acute{o}$] corr. ex $\acute{\alpha}\nu\acute{o}$ P. $\tilde{\eta}$] om. P. 22. $\acute{\epsilon}\pi\iota\kappa\acute{\epsilon}\delta\omega\nu$ $\acute{o}\rho\theta\acute{\omega}\nu$ $\gamma\omega\nu\iota\acute{\omega}\nu$ V. 23. $\tau\tilde{\phi}$] corr. in $\tau\acute{o}$ m. 1 b. 24. $\acute{\upsilon}\pi\acute{o}$ — 25. $\acute{\alpha}\ell$] mg. m. 2 B. 24. ΓAD] $\angle AG$ ϕ et in ras. V. 25. $\acute{\upsilon}\pi\acute{o}$] eras. B; m. 2 V. ΓAD] F m. 1, $\angle AG$ F m. 2 et V in ras. 26. $\epsilon\iota\sigma\iota$ V.

Εἰλήφθω γάρ ἐφ' ἐκάστης τῶν AB , AG , AD τυχόντα σημεῖα τὰ B , Γ , Δ , καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔB . καὶ ἐπεὶ στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ B ὑπὲρ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται τῶν ὑπὸ $\Gamma B A$,
 5 $AB \Delta$, $\Gamma B \Delta$, δύο ὁποιοιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσιν· αἱ ἄρα ὑπὸ $\Gamma B A$, $AB \Delta$ τῆς ὑπὸ $\Gamma B \Delta$ μείζονες εἰσιν.
 διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ μὲν ὑπὸ $B \Gamma A$, $AG \Delta$ τῆς ὑπὸ $B \Gamma \Delta$ μείζονες εἰσιν, αἱ δὲ ὑπὸ $\Gamma \Delta A$, $A \Delta B$ τῆς ὑπὸ $\Gamma \Delta B$ μείζονες εἰσιν· αἱ ἔξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ
 10 $\Gamma B A$, $AB \Delta$, $B \Gamma A$, $AG \Delta$, $\Gamma \Delta A$, $A \Delta B$ τριῶν τῶν ὑπὸ $\Gamma B \Delta$, $B \Gamma \Delta$, $\Gamma \Delta B$ μείζονες εἰσιν. ἀλλὰ αἱ τρεῖς αἱ ὑπὸ $\Gamma B \Delta$, $B \Delta \Gamma$, $B \Gamma \Delta$ δυσὲν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἔξ ἄρα αἱ ὑπὸ $\Gamma B A$, $AB \Delta$, $B \Gamma A$, $AG \Delta$, $\Gamma \Delta A$, $A \Delta B$ δύο ὀρθῶν μείζονες εἰσιν. καὶ ἐπεὶ ἐκάστων
 15 τῶν $AB \Gamma$, $AG \Delta$, $A \Delta B$ τριγώνων αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὲν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, αἱ ἄρα τῶν τριῶν τριγώνων ἐννέα γωνίαι αἱ ὑπὸ $\Gamma B A$, $AG B$, $BA \Gamma$, $AG \Delta$, $\Gamma \Delta A$, $\Gamma A \Delta$, $A \Delta B$, $\Delta B A$, $BA \Delta$ ἔξ ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, ὧν αἱ ὑπὸ $AB \Gamma$, $B \Gamma A$, $AG \Delta$, $\Gamma \Delta A$, $A \Delta B$,
 20 $\Delta B A$ ἔξ γωνίαι δύο ὀρθῶν εἰσι μείζονες· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ $BA \Gamma$, $\Gamma A \Delta$, ΔAB τρεῖς [γωνίαι] περιέχουσιν τὴν στερεὰν γωνίαν τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσιν.

2. Γ] supra scr. m. 1 V. 3. ΔB] AB φ. 4. Ante τριῶν ins. γάρ m. 2 V. 5. $\Gamma B \Delta$] in ras. m. 1 P. 6. ὑπό] (alt.) om. F. εἰσι BV, comp. Fb. 7. $B \Gamma A$] supra A scr. Δ m. 1 b. 8. $B \Gamma \Delta$] $\Gamma B \Delta$ F, corr. m. 2 (sed euan.). εἰσι BVb, comp. F. αἱ δέ] καὶ ἔτι αἱ BFVb. 10. $AB \Delta$] $B \Delta$ in ras. B, item litt. seq. $\Gamma \Delta A$] in ras. V. 11. $B \Gamma \Delta$] $\Gamma \Delta$ in ras. V. $\Gamma \Delta B$] in ras. V. ἀλλ' b. 12. $B \Gamma \Delta$] B et Δ in ras. V. εἰσί V, comp. F. 13. $AB \Delta$] m. rec. V. $\Gamma \Delta A$] in ras. V; $A \Delta \Gamma$ e corr. m. 2 B. 14. δύο] $AB \Delta$ δύο V. εἰσι BVb, comp. F. 15. αἱ τρεῖς τριγώνων F, corr. m. 1. τριγώνων P, et b, sed corr. m. 1. 17. $\Gamma B A$] $\Gamma B \Delta$ F, BA e corr. V. $AG B$] $AB \Gamma$ P. 18. $\Gamma \Delta A$]

sumatur enim in singulis rectis AB , AG , AD quaelibet puncta B , Γ , Δ , et ducantur $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔB .



et quoniam angulus solidus, qui ad B positus est, tribus angulis planis continetur ΓBA , $AB\Delta$, $\Gamma B\Delta$, duo quilibet reliquo maiores sunt [prop. XX]. itaque $\Gamma BA + AB\Delta > \Gamma B\Delta$.

eadem de causa erunt etiam $B\Gamma A + A\Gamma\Delta > B\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta A + A\Delta B > \Gamma\Delta B$.

itaque $\Gamma BA + AB\Delta + B\Gamma A + A\Gamma\Delta + \Gamma\Delta A + A\Delta B > \Gamma B\Delta + B\Gamma\Delta + \Gamma\Delta B$. uerum

$$\Gamma B\Delta + B\Delta\Gamma + B\Gamma\Delta$$

duobus rectis aequales sunt [I, 32]. itaque sex anguli

$$\Gamma BA + AB\Delta + B\Gamma A + A\Gamma\Delta + \Gamma\Delta A + A\Delta B$$

duobus rectis maiores sunt. et quoniam singulorum triangulorum $AB\Gamma$, $A\Gamma\Delta$, $A\Delta B$ tres anguli duobus rectis aequales sunt, nouem anguli trium triangulorum $\Gamma BA + A\Gamma B + B\Delta\Gamma + A\Gamma\Delta + \Gamma\Delta A + \Gamma\Delta\Delta + A\Delta B + \Delta B A + B\Delta\Delta$ sex rectis aequales sunt, quorum

$$AB\Gamma + B\Gamma A + A\Gamma\Delta + \Gamma\Delta A + A\Delta B + \Delta B A$$

duobus rectis maiores sunt. itaque reliqui

$$B\Delta\Gamma + \Gamma\Delta A + \Delta A B,$$

qui angulum solidum continent, quattuor rectis minores sunt.

in ras. V; $\Delta A\Gamma$ B. $\Gamma A\Delta$] $A\Delta$ in ras. V; $\Gamma\Delta A$ B. $B\Delta\Delta$] $B\Delta A$ P. 20. $\mu\epsilon\lambda\lambda\omicron\nu\epsilon\varsigma \epsilon\lambda\omicron\iota(\nu)$ BV. 21. $\gamma\omega\nu\lambda\alpha\iota$] om. P. 22. $\epsilon\lambda\iota$ V, comp. F. Seq. in V $\pi\acute{\alpha}\nu\tau\eta$, sed del.

Ἄπαντα ἄρα στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων [ῆ] τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κβ'.

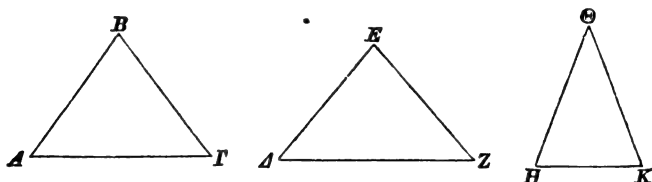
- Ἐὰν ὥσι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μελζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, περιέχωσι δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι, δυνατόν ἐστίν ἐκ τῶν ἐπιξευγνουσῶν τὰς ἴσας εὐθείας τρίγωνον συστήσασθαι.
- Ἐστῶσαν τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ $AB\Gamma$, ΔEZ , $H\Theta K$, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μελζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν ὑπὸ $AB\Gamma$, ΔEZ τῆς ὑπὸ $H\Theta K$, αἱ δὲ ὑπὸ ΔEZ , $H\Theta K$ τῆς ὑπὸ $AB\Gamma$, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ $H\Theta K$, $AB\Gamma$ τῆς ὑπὸ ΔEZ , καὶ ἔστῶσαν ἴσαι αἱ AB , $B\Gamma$, ΔE , EZ , $H\Theta$, ΘK εὐθεῖαι, καὶ ἐπεξέχθῳσαν αἱ $A\Gamma$, ΔZ , HK · λέγω, ὅτι δυνατόν ἐστίν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς $A\Gamma$, ΔZ , HK τρίγωνον συστήσασθαι, τοιτέστιν ὅτι τῶν $A\Gamma$, ΔZ , HK δύο ὁποιοιοῦν τῆς λοιπῆς μελζονές εἰσιν.
- Εἰ μὲν οὖν αἱ ὑπὸ $AB\Gamma$, ΔEZ , $H\Theta K$ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, φανερόν, ὅτι καὶ τῶν $A\Gamma$, ΔZ , HK ἴσων γινομένων δυνατόν ἐστίν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς $A\Gamma$, ΔZ , HK τρίγωνον συστήσασθαι. εἰ δὲ οὐ,

1. ἄρα] supra scr. m. 1 P. ὑπό — 3. δεῖξαι]: ~ V.
 1. ῆ] postea add. m. 1 P. 7. περιέχωσιν P, περιέχουσι F.
 8. Supra ἴσας add. γωνίας m. 2 B, del. m. rec.
 εὐθείας] γωνίας εὐθειῶν V. 11. εἰσι] ἔστῶσαν B F V et b
 (εσ- in ras.). 16. εὐθεῖαι] m. rec. V. 17. συστήσασθαι
 P, corr. m. 2. 18. ὅτι] corr. ex τό m. 2 F. 19. μελζους
 V. εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι Theon (B F V b). 21. εἰσι
 ἴσαι V. εἰσίν] εἰσί P B b, comp. F.; om. V. 22. γινομένων
 F, γενομένων b.

Ergo omnis¹⁾ angulus solidus planis angulis minoribus, quam sunt quattuor recti, continetur; quod erat demonstrandum.

XXII.

Si tres anguli plani sunt, quorum duo reliquo maiores sunt quoquo modo coniuncti, et eos aequales



continent rectae, fieri potest, ut ex rectis aequales rectas coniungentibus triangulus construatur.

Sint tres anguli plani $AB\Gamma$, ΔEZ , $H\Theta K$, quorum duo reliquo maiores sunt quoquo modo coniuncti,
 $AB\Gamma + \Delta EZ > H\Theta K$, $\Delta EZ + H\Theta K > AB\Gamma$,

$$H\Theta K + AB\Gamma > \Delta EZ,$$

et sit $AB = B\Gamma = \Delta E = EZ = H\Theta = \Theta K$, et ducantur $A\Gamma$, ΔZ , HK . dico, fieri posse, ut ex rectis aequalibus rectis $A\Gamma$, ΔZ , HK triangulus construatur, hoc est, rectarum $A\Gamma$, ΔZ , HK duas quaslibet reliqua maiores esse.

iam si anguli $AB\Gamma$, ΔEZ , $H\Theta K$ inter se aequales sunt, manifestum est, cum etiam $A\Gamma$, ΔZ , HK aequales sint [I, 4], fieri posse, ut ex rectis aequalibus rectis $A\Gamma$, ΔZ , HK triangulus construatur. sin minus, in-

1) Nam in angulis solidis, qui plus quam tribus planis angulis continentur, similiter ratiocinandum est.

Ἄπανα ἄρα στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων [ἥ] τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κβ'.

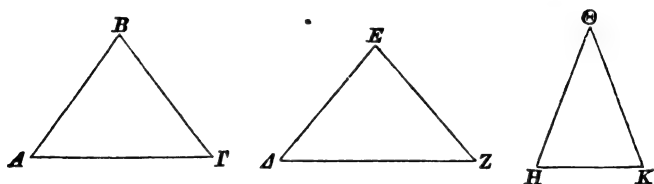
- Ἐὰν ὥσι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μεζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, περιέχωσι δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι, δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἐπιξενυγνουσῶν τὰς ἴσας εὐθείας τρίγωνον συστήσασθαι.
- Ἔστωσαν τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ $ABΓ$, $ΔEZ$, $HΘK$, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μεζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν ὑπὸ $ABΓ$, $ΔEZ$ τῆς ὑπὸ $HΘK$, αἱ δὲ ὑπὸ $ΔEZ$, $HΘK$ τῆς ὑπὸ $ABΓ$, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ $HΘK$, $ABΓ$ τῆς ὑπὸ $ΔEZ$, καὶ ἔστωσαν ἴσαι αἱ AB , $BΓ$, $ΔE$, EZ , $HΘ$, $ΘK$ εὐθεῖαι, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $ΑΓ$, $ΔZ$, HK · λέγω, ὅτι δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς $ΑΓ$, $ΔZ$, HK τρίγωνον συστήσασθαι, τουτέστιν ὅτι τῶν $ΑΓ$, $ΔZ$, HK δύο ὁποιοιοῦν τῆς λοιπῆς μεζονές εἰσιν.
- Εἰ μὲν οὖν αἱ ὑπὸ $ABΓ$, $ΔEZ$, $HΘK$ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, φανερόν, ὅτι καὶ τῶν $ΑΓ$, $ΔZ$, HK ἴσων γινομένων δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς $ΑΓ$, $ΔZ$, HK τρίγωνον συστήσασθαι. εἰ δὲ οὐ,

1. ἄρα] *supra scr.* m. 1 P. ὑπό — 3. δεῖξαι]: ~ V.
 1. ἥ] *postea add.* m. 1 P. 7. περιέχωσιν P, περιέχουσι F.
 8. *Supra* ἴσας *add.* γωνίας m. 2 B, *del.* m. *rec.*
 εὐθείας] γωνίας εὐθειῶν V. 11. εἰσι] ἔστωσαν BFV et b
 (εσ- in ras.). 15. εὐθεῖαι] m. *rec.* V. 17. συστήσασθαι
 P, *corr.* m. 2. 18. ὅτι] *corr.* ex τό m. 2 F. 19. μεζονές
 V. εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι Theon (BFVb). 21. εἰσι
 ἴσαι V. εἰσίν] εἰσί PBb, *comp.* F.; *om.* V. 22. γινομένων
 F, γενομένων b.

Ergo omnis¹⁾ angulus solidus planis angulis minoribus, quam sunt quattuor recti, continetur; quod erat demonstrandum.

XXII.

Si tres anguli plani sunt, quorum duo reliquo maiores sunt quoquo modo coniuncti, et eos aequales



continent rectae, fieri potest, ut ex rectis aequales rectas coniungentibus triangulus construatur.

Sint tres anguli plani $AB\Gamma$, ΔEZ , $H\Theta K$, quorum duo reliquo maiores sunt quoquo modo coniuncti,

$$AB\Gamma + \Delta EZ > H\Theta K, \Delta EZ + H\Theta K > AB\Gamma,$$

$$H\Theta K + AB\Gamma > \Delta EZ,$$

et sit $AB = B\Gamma = \Delta E = EZ = H\Theta = \Theta K$, et ducantur $A\Gamma$, ΔZ , HK . dico, fieri posse, ut ex rectis aequalibus rectis $A\Gamma$, ΔZ , HK triangulus construatur, hoc est, rectarum $A\Gamma$, ΔZ , HK duas quaslibet reliqua maiores esse.

iam si anguli $AB\Gamma$, ΔEZ , $H\Theta K$ inter se aequales sunt, manifestum est, cum etiam $A\Gamma$, ΔZ , HK aequales sint [I, 4], fieri posse, ut ex rectis aequalibus rectis $A\Gamma$, ΔZ , HK triangulus construatur. sin minus, in-

1) Nam in angulis solidis, qui plus quam tribus planis angulis continentur, similiter ratiocinandum est.

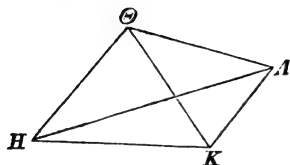
ἔστωσαν ἄνισοι, καὶ συνεστιάτω πρὸς τῇ ΘK εὐθείᾳ
καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Θ τῇ ὑπὸ $AB\Gamma$ γωνίᾳ
ἴση ἢ ὑπὸ $K\Theta A$ · καὶ κείσθω μιᾷ τῶν $AB, B\Gamma, \Delta E,$
 $EZ, H\Theta, \Theta K$ ἴση ἢ ΘA , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $KA,$
5 HA . καὶ ἐπεὶ δύο αἱ $AB, B\Gamma$ δυσὶ ταῖς $K\Theta, \Theta A$
ἴσαι εἰσὶν, καὶ γωνία ἢ πρὸς τῷ B γωνία τῇ ὑπὸ
 $K\Theta A$ ἴση, βάσις ἄρα ἡ $A\Gamma$ βάσει τῇ KA ἴση. καὶ
ἐπεὶ αἱ ὑπὸ $AB\Gamma, H\Theta K$ τῆς ὑπὸ ΔEZ μείζονές
εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$ τῇ ὑπὸ $K\Theta A$, ἡ ἄρα ὑπὸ
10 $H\Theta A$ τῆς ὑπὸ ΔEZ μείζων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ
 $H\Theta, \Theta A$ δύο ταῖς $\Delta E, EZ$ ἴσαι εἰσὶν, καὶ γωνία ἢ
ὑπὸ $H\Theta A$ γωνίας τῆς ὑπὸ ΔEZ μείζων, βάσις ἄρα
ἡ HA βάσεως τῆς ΔZ μείζων ἐστίν. ἀλλὰ αἱ $HK,$
 KA τῆς HA μείζονές εἰσιν. πολλῶν ἄρα αἱ HK, KA
15 τῆς ΔZ μείζονές εἰσιν. ἴση δὲ ἡ KA τῇ AG · αἱ
 AG, HK ἄρα τῆς λοιπῆς τῆς ΔZ μείζονές εἰσιν.
ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ μὲν $AG, \Delta Z$ τῆς HK
μείζονές εἰσιν, καὶ ἔτι αἱ $\Delta Z, HK$ τῆς AG μείζονές
εἰσιν. δυνατόν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς $AG,$
20 $\Delta Z, HK$ τρίγωνον συστήσασθαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κγ'.

Ἐκ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων, ὧν αἱ δύο τῆς
λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι,

1. Post ἄνισοι add. καὶ ἔστω μείζων ἢ πρὸς τῷ E mg. m.
rec. V. 2. αὐτὴν b. 3. AB] AG φ. 4. ἴση ἢ ΘA] supra
scr. m. 2 V; A in ras. B. ἐπεζεύχθωσαν — 5. καί] postea ins.
m. 1 P. 5. AB] in ras. m. 1 P. 6. εἰσί BVb, comp. F.
τῷ] mutat. in τό b. 7. ΘKA F. ἐστὶν ἴση BF. 8. αἱ] om.
F; uidetur supra scr. fuisse, sed euan. ΔEZ] in ras. V.
10. ΘHA F. ἐστὶ PBV, comp. F. 11. δυσὶ P. εἰσί Vb,

aequales sint, et ad rectam ΘK et punctum eius Θ angulo $AB\Gamma$ aequalis construat \bar{u} r $\angle K\Theta A$, et ponatur ΘA cuilibet rectarum AB , $B\Gamma$, ΔE , EZ , $H\Theta$, ΘK aequalis, et ducantur KA , HA . et quoniam duae AB , $B\Gamma$ duabus $K\Theta$, ΘA aequales sunt, et angulus



ad B positus angulo $K\Theta A$ aequalis est, erit etiam $A\Gamma = KA$ [I, 4]. et quoniam $AB\Gamma + H\Theta K > \Delta EZ$, et $AB\Gamma = K\Theta A$, erit $\angle H\Theta A > \Delta EZ$. et quoniam duae $H\Theta$, ΘA duabus ΔE , EZ aequales sunt, et $\angle H\Theta A > \Delta EZ$, erit $HA > \Delta Z$ [I, 24]. uerum $HK + KA > HA$ [I, 20]. itaque multo magis erunt

$$HK + KA > \Delta Z.$$

sed $KA = A\Gamma$. itaque $A\Gamma + HK > \Delta Z$. iam similiter demonstrabimus, esse etiam $A\Gamma + \Delta Z > HK$, $\Delta Z + HK > A\Gamma$. itaque fieri potest, ut ex rectis aequalibus rectis $A\Gamma$, ΔZ , HK triangulus construat \bar{u} r; quod erat demonstrandum.

XXIII.

Ex tribus angulis planis, quorum duo reliquo maiores sunt quoquo modo coniuncti, angulum solidum

comp. F. 12. $\dot{\iota}\pi\acute{o}\tau\epsilon\ \Delta EZ$] $\pi\rho\acute{o}\varsigma\ \tau\acute{\omega}\ E\ V$, et fort. F in mg., sed euan. 13. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}$ V, comp. F. 14. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}$ PV, comp. F.
 16. Post $\acute{\epsilon}\lambda\acute{o}\upsilon\upsilon$ una linea eras. in V. 17. $\acute{\omicron}\tau\acute{\iota}\ \kappa\alpha\iota$] $\kappa\alpha\iota\ \acute{\omicron}\tau\acute{\iota}$ V. 18. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}$ P, comp. F. $\kappa\alpha\iota\ \acute{\epsilon}\tau\iota\ \alpha\acute{\iota}$] P; $\alpha\acute{\iota}\ \delta\acute{\epsilon}$ Theon (BFVb); sed cfr. p. 64, 4. $\Delta Z''HK'$ b, HK , ΔZ BFV. $\mu\epsilon\lambda\lambda\omicron\nu\acute{\epsilon}\varsigma\ \acute{\epsilon}\lambda\acute{o}\upsilon\upsilon$] om. BFV. 19. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}$ b. 20. $\acute{\omicron}\pi\epsilon\rho\ \acute{\epsilon}\delta\epsilon\iota\ \delta\epsilon\dot{\iota}\xi\alpha\iota$] om. V. Seq. demonstr. alt.; u. app. 22. $\alpha\acute{\iota}$] of F.

στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι· δεῖ δὴ τὰς τρεῖς
τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονας εἶναι.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ
 $AB\Gamma$, ΔEZ , $H\Theta K$, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες
5 ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, ἔτι δὲ αἱ τρεῖς
τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες· δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων
ταῖς ὑπὸ $AB\Gamma$, ΔEZ , $H\Theta K$ στερεὰν γωνίαν συστή-
σασθαι.

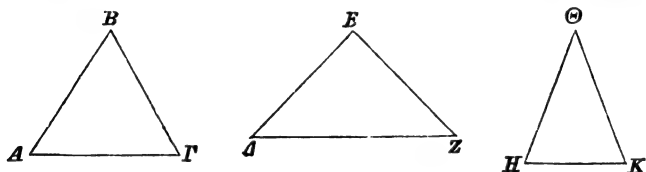
Ἀπειλήφθωσαν ἴσαι αἱ AB , $B\Gamma$, ΔE , EZ , $H\Theta$,
10 ΘK , καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $A\Gamma$, ΔZ , HK · δυνατόν
ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς $A\Gamma$, ΔZ , HK τρίγωνον
συστήσασθαι. συνεστήτω τὸ AMN , ὥστε ἴσην εἶναι
τὴν μὲν $A\Gamma$ τῇ AM , τὴν δὲ ΔZ τῇ MN , καὶ ἔτι
τὴν HK τῇ NA , καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ AMN
15 τρίγωνον κύκλος ὁ AMN , καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέν-
τρον καὶ ἔστω τὸ Ξ , καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $A\Xi$, $M\Xi$,
 $N\Xi$ · λέγω, ὅτι ἡ AB μείζων ἐστὶ τῆς $A\Xi$. εἰ γὰρ μὴ,
ἦτοι ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ $A\Xi$ ἢ ἐλάττω. ἔστω πρότερον
ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ $A\Xi$, ἀλλὰ ἡ μὲν AB
20 τῇ $B\Gamma$ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΞA τῇ ΞM , δύο δὴ αἱ AB ,
 $B\Gamma$ δύο ταῖς $A\Xi$, ΞM ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρα· καὶ

1. στερεὰ γωνία F, sed corr. συστήσασθαι γωνίαν V. συν-
στήσασθαι P, corr. m. 2. 2. ἐλάττωνας P. Post εἶναι add.
διὰ τὸ καὶ πᾶσαν στερεὰν γωνίαν ὑπὸ τριῶν (φ) ἢ τεσσάρων
ὀρθῶν γωνιῶν περιέχεσθαι F. 4. ὧν αἱ] γωνίαι F, ὧν αἱ
add. m. 2. 6. ἐλάττωνας P, ἐλάσσονες FV. Dein add. ἔστω-
σαν F. 7. συνεστήσασθαι P, corr. m. 2. 9. $B\Gamma$] $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$
b. ΔE] corr. ex ΓE m. 1 b. 11. ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων
ταῖς] δὴ ἐκ τριῶν τῶν b; mg. γρ. ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων.
12. συνεστήσασθαι P, corr. m. 2. 13. AM] AB φ. 14. τῇ]
supra scr. V. NA] AN BFV. 15. Post κέντρον add.
ἐστὶ δὴ ἦτοι ἐντὸς τοῦ AMN τριγώνου ἢ ἐπὶ μιᾷ τῶν πλευ-
ρῶν αὐτοῦ ἢ ἐκτός. ἔστω πρότερον ἐντός BV. 17. ἐστὶ] ἐστὶν

construere; oportet igitur¹⁾, tres angulos illos quattuor rectis minores esse [prop. XXI].

Sint dati tres anguli plani $AB\Gamma$, ΔEZ , $H\Theta K$, quorum duo reliquo maiores sint quoquo modo coniuncti, et praeterea tres illi quattuor rectis minores. oportet igitur ex angulis aequalibus angulis $AB\Gamma$, ΔEZ , $H\Theta K$ angulum solidum construere.

abscindantur inter se aequales AB , $B\Gamma$, ΔE , EZ , $H\Theta$, ΘK , et ducantur $A\Gamma$, ΔZ , HK . fieri igitur



potest, ut ex rectis aequalibus rectis $A\Gamma$, ΔZ , HK triangulus construatur [prop. XXII]. construatur AMN , ita ut sit $A\Gamma = AM$, $\Delta Z = MN$, $HK = NA$, et circum triangulum AMN circulus describatur AMN [IV, 5], et sumatur centrum eius et sit Ξ , et ducantur $A\Xi$, $M\Xi$, $N\Xi$. dico, esse $AB > A\Xi$; nam si minus, erit aut $AB = A\Xi$ aut $AB < A\Xi$. sit prius $AB = A\Xi$. et quoniam $AB = A\Xi$, et $AB = B\Gamma$, $\Xi A = \Xi M$, duo latera AB , $B\Gamma$ duobus lateribus $A\Xi$, ΞM alterum alteri aequalia sunt; et supposuimus,

1) Nam $\delta\eta$ cum omnibus codicibus retinendum est. idem I, 22 p. 52, 17 pro $\delta\epsilon$ cum codicibus restituendum est. nam etiam apud Eutocium in Apollonium p. 10 in codd. $\delta\eta$ scribi pro $\delta\epsilon$, nunc cognoui.

P. $\tau\eta\varsigma$] corr. ex $\tau\eta\iota$ B. 18. $\iota\sigma\eta$] supra scr. m. 1 V.
19. $\alpha\lambda\lambda'$ BF. 20. ΞA] $A\Xi$ Bb. 21. $\delta\upsilon\omicron$] $\delta\nu\omicron$ b.

βάσεις ἡ $ΑΓ$ βάσει τῇ $ΑΜ$ ὑπόκειται ἴση· γωνία ἄρα
 ἡ ὑπὸ $ΑΒΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΑΞΜ$ ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ
 αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ $ΔΕΖ$ τῇ ὑπὸ $ΜΞΝ$ ἐστὶν
 ἴση, καὶ ἔτι ἡ ὑπὸ $ΗΘΚ$ τῇ ὑπὸ $ΝΞΑ$ · αἱ ἄρα τρεῖς
 5 αἱ ὑπὸ $ΑΒΓ$, $ΔΕΖ$, $ΗΘΚ$ γωνίαι· τρισὶ ταῖς ὑπὸ
 $ΑΞΜ$, $ΜΞΝ$, $ΝΞΑ$ εἰσιν ἴσαι. ἀλλὰ αἱ τρεῖς αἱ
 ὑπὸ $ΑΞΜ$, $ΜΞΝ$, $ΝΞΑ$ τέτταρσιν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι·
 καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ὑπὸ $ΑΒΓ$, $ΔΕΖ$, $ΗΘΚ$ τέτταρσιν
 ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. ὑπόκεινται δὲ καὶ τεσσάρων ὀρ-
 10 θῶν ἐλάσσονες· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ $ΑΒ$ τῇ $ΑΞ$
 ἴση ἐστίν. λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶν ἡ $ΑΒ$
 τῆς $ΑΞ$. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· καὶ κείσθω τῇ μὲν
 $ΑΒ$ ἴση ἡ $ΞΟ$, τῇ δὲ $ΒΓ$ ἴση ἡ $ΞΠ$, καὶ ἐπεξεύχθω
 ἡ $ΟΠ$. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΑΒ$ τῇ $ΒΓ$, ἴση ἐστὶ
 15 καὶ ἡ $ΞΟ$ τῇ $ΞΠ$ · ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ $ΑΟ$ τῇ $ΠΜ$
 ἐστὶν ἴση. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ $ΑΜ$ τῇ $ΟΠ$, καὶ
 ἰσογώνιον τὸ $ΑΜΞ$ τῷ $ΟΠΞ$ · ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $ΞΑ$
 πρὸς $ΑΜ$, οὕτως ἡ $ΞΟ$ πρὸς $ΟΠ$ · ἐναλλάξ ὡς ἡ $ΑΞ$
 πρὸς $ΞΟ$, οὕτως ἡ $ΑΜ$ πρὸς $ΟΠ$. μείζων δὲ ἡ $ΑΞ$
 20 τῆς $ΞΟ$ · μείζων ἄρα καὶ ἡ $ΑΜ$ τῆς $ΟΠ$. ἀλλὰ ἡ
 $ΑΜ$ κείται τῇ $ΑΓ$ ἴση· καὶ ἡ $ΑΓ$ ἄρα τῆς $ΟΠ$ μεί-

2. $ΑΞΜ$] supra ras. m. 2 B. 3. $ΜΞΝ$] $ΞΝ$ in ras.
 m. 1 P V. 5. τρισί] ἴσαι εἰσὶ τρισί V. 6. $ΜΞΝ$] corr. ex
 $ΜΝΞ$ V, $ΜΝΞ$ b. $ΝΞΑ$ — 7. $ΜΞΝ$] mg. m. 2 B.
 6. εἰσιν ἴσαι] om. V φ, ἴσαι εἰσὶν Bb. ἀλλ' b. αἱ] (alt.)
 supra m. 2 F. 7. τέτρασιν B F V b. ἴσαι εἰσὶν B V. 8. καὶ
 αἱ — 9. εἰσὶν] mg. m. 2 V, euan. in F. 8. ἄρα αἱ] αἱ ἄρα
 P. τέσσαρσιν V, τέτρασι B F b. 9. εἰσιν ἴσαι Bb. 11. ἐστὶν
 ἴση V. 13. ἡ] (prius) supra scr. V. 14. ἐστὶ] ἐστὶν P B, δέ
 euan. V. 15. $ΟΑΒ$. λοιπὴ τῇ Theon (B F V b). $ΠΜ$
 in ras. V, $ΜΠ$ F. 16. ἐστὶν] in ras. V. ἐστὶν] om.
 V. $ΑΜ$] $Α$ in ras. m. 1 B. 17. Post $ΑΜΞ$ add. τρίγω-
 νον comp. b. $ΞΑ$] $ΑΞ$ F, corr. m. 2. 18. τὴν $ΑΜ$, $Μ$

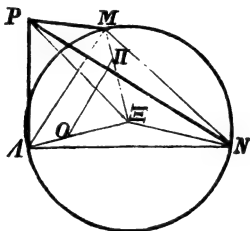
esse $AF = AM$. itaque erit $\angle AB\Gamma = \angle \Xi M$ [I, 8].
eadem de causa etiam

$$\angle \Delta EZ = \angle \Xi N, \angle H\Theta K = \angle \Xi A.$$

ergo

$$\angle AB\Gamma + \angle \Delta EZ + \angle H\Theta K = \angle \angle \Xi M + \angle \Xi N + \angle \Xi A.$$

sed $\angle \angle \Xi M + \angle \Xi N + \angle \Xi A$ quattuor rectis aequales sunt.¹⁾ quare etiam $\angle AB\Gamma + \angle \Delta EZ + \angle H\Theta K$ quattuor



rectis aequales sunt. uerum supposuimus, eos quattuor rectis minores esse; quod absurdum est. itaque non erit $AB = \angle \Xi$. iam dico, ne minorem quidem esse AB quam $\angle \Xi$. nam si fieri potest, sit minor. et ponatur $\Xi O = AB$, $\Xi \Pi = B\Gamma$, et ducatur $O\Pi$. et quoniam $AB = B\Gamma$, erit etiam $\Xi O = \Xi \Pi$: quare etiam $\angle O = \angle \Pi$. ergo AM rectae $O\Pi$ parallela est [VI, 2], et $\angle AM\Xi$ triangulo $O\Pi\Xi$ aequiangularus est [I, 29]. itaque erit $\Xi A : AM = \Xi O : O\Pi$ [VI, 4]. permutando $\angle \Xi : \Xi O = AM : O\Pi$ [V, 16]. uerum $\angle \Xi > \Xi O$. itaque etiam $AM > O\Pi$ [V, 14]. sed posuimus $AM = AF$. itaque etiam $AF > O\Pi$. quo-

1) Hoc nusquam demonstratum est, sed facillime ex I, 13 concluditur; cfr. ad I, 15 coroll.

in ras. V. $\tau\eta\nu$ $O\Pi$ V. $\acute{\omega}\varsigma$] $\acute{\alpha}\rho\alpha$ $\acute{\omega}\varsigma$ V (F?). η] ins.
m. 2 V. 20. $\kappa\alpha\iota$] om. V. η] ins. m. 2 F. $\acute{\alpha}\lambda\lambda'$ BF.

ζων ἐστίν. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ AB , $BΓ$ δυσὶ ταῖς $OΞ$,
 $ΞΠ$ ἴσαι εἰσίν, καὶ βάσις ἡ $ΑΓ$ βάσεως τῆς $ΟΠ$ μεί-
 ζων ἐστίν, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $ΑΒΓ$ γωνίας τῆς ὑπὸ
 $OΞΠ$ μείζων ἐστίν. ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι καὶ ἡ
 5 μὲν ὑπὸ $ΔΕΖ$ τῆς ὑπὸ $ΜΞΝ$ μείζων ἐστίν, ἡ δὲ
 ὑπὸ $ΗΘΚ$ τῆς ὑπὸ $ΝΞΑ$. αἱ ἄρα τρεῖς γωνίαι αἱ
 ὑπὸ $ΑΒΓ$, $ΔΕΖ$, $ΗΘΚ$ τριῶν τῶν ὑπὸ $ΑΞΜ$, $ΜΞΝ$,
 $ΝΞΑ$ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ $ΑΒΓ$, $ΔΕΖ$,
 $ΗΘΚ$ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες ὑπόκεινται· πολλῶ
 10 ἄρα αἱ ὑπὸ $ΑΞΜ$, $ΜΞΝ$, $ΝΞΑ$ τεσσάρων ὀρθῶν
 ἐλάσσονές εἰσιν. ἀλλὰ καὶ ἴσαι· ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον.
 οὐκ ἄρα ἡ $ΑΒ$ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς $ΑΞ$. ἐδείχθη δέ,
 ὅτι οὐδὲ ἴση· μείζων ἄρα ἡ $ΑΒ$ τῆς $ΑΞ$. ἀνεστάτω
 δὴ ἀπὸ τοῦ $Ξ$ σημείου τῷ τοῦ $ΑΜΝ$ κύκλου ἐπιπέδῳ
 15 πρὸς ὀρθὰς ἡ $ΞΡ$, καὶ ᾧ μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$
 τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τῆς $ΑΞ$, ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ
 ἀπὸ τῆς $ΞΡ$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $ΡΑ$, $ΡΜ$, $ΡΝ$.
 καὶ ἐπεὶ ἡ $ΡΞ$ ὀρθή ἐστὶ πρὸς τὸ τοῦ $ΑΜΝ$ κύκλου
 ἐπίπεδον, καὶ πρὸς ἐκάστην ἄρα τῶν $ΑΞ$, $ΜΞ$, $ΝΞ$
 20 ὀρθή ἐστὶν ἡ $ΡΞ$. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΑΞ$ τῇ $ΞΜ$,
 κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ $ΞΡ$, βάσις ἄρα ἡ $ΡΑ$
 βάσει τῇ $ΡΜ$ ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ $ΡΝ$
 ἐκατέρῃ τῶν $ΡΑ$, $ΡΜ$ ἐστὶν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ $ΡΑ$,
 $ΡΜ$, $ΡΝ$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ ἐπεὶ ᾧ μείζον
 25 ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΑΞ$, ἐκείνῳ ἴσον
 ὑπόκειται τὸ ἀπὸ τῆς $ΞΡ$, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ ἴσον

1. Post δύο add. εὐθεῖαι FV, B supra scr. m. 2. δυσί] δύο b(F?). 2. εἰσί Vb, comp. F. 3. ἐστὶ BVb, comp. F.
 5. $ΜΞΝ$] $Ξ$ in ras. m. 1 P. 6. ὑπό] (prius) om. V, supra scr. m. 2 B. 7. $ΑΒ$, $BΓ$, $ΔΕ$, $ΕΖ$, $ΗΘ$, $ΘΚ$ P. τριῶν — 9. $ΗΘΚ$] mg. m. 2 V. 8. ἀλλ' FVb. 9. ἐλάττονες

niam igitur duo latera AB , $B\Gamma$ duobus $O\Xi$, $\Xi\P$ aequalia sunt, et $A\Gamma > O\P$, erit $\angle AB\Gamma > O\Xi\P$ [I, 25]. similiter demonstrabimus, esse etiam $\angle \Delta EZ > M\Xi N$, $\angle H\Theta K > N\Xi A$. itaque $AB\Gamma + \Delta EZ + H\Theta K > A\Xi M + M\Xi N + N\Xi A$. uerum supponimus, esse

$$AB\Gamma + \Delta EZ + H\Theta K$$

quattuor rectis minores. multo igitur magis $A\Xi M + M\Xi N + N\Xi A$ quattuor rectis minores sunt. sed iidem quattuor rectis aequales sunt; quod absurdum est. itaque AB recta $A\Xi$ minor non est. et demonstratum est, eam ne aequalem quidem esse. ergo $AB > A\Xi$. erigatur igitur in puncto Ξ ad planum circuli AMN perpendicularis ΞP [prop. XII]. et sit $\Xi P^2 = AB^2 \div A\Xi^2$, et ducantur PA , PM , PN . et quoniam $P\Xi$ ad planum circuli AMN perpendicularis est, $P\Xi$ ad singulas rectas $A\Xi$, $M\Xi$, $N\Xi$ perpendicularis est. et quoniam $A\Xi = \Xi M$, et ΞP communis est et perpendicularis, erit

$$PA = PM \text{ [I, 4].}$$

eadem de causa erit etiam $PN = PA = PM$. itaque PA , PM , PN inter se aequales sunt. et quoniam suppositum est, esse $\Xi P^2 = AB^2 \div A\Xi^2$, erit $AB^2 = A\Xi^2 + \Xi P^2$. uerum

P. 10. $M\Xi N$] ΞN in ras. m. 1 P. 11. $\epsilon\lambda\acute{\iota}\sigma\iota\nu \epsilon\lambda\acute{\alpha}\sigma\sigma\omicron\nu\epsilon\varsigma$
P. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$] om. V. 12. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$ P. 13. $\acute{\alpha}\rho\alpha$] $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu \acute{\alpha}\rho\alpha$ F.
 $\acute{\alpha}\nu\epsilon\sigma\tau\acute{\alpha}\tau\omega$] bis b; litt. ν in ras. m. 1 P. 14. $\kappa\upsilon\kappa\lambda\omicron\nu$]
om. ϕ . 15. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$ P. 16. $\tau\acute{o}$] corr. ex $\tau\tilde{\omega}$ m. 2 F.
17. PN] supra scr. V. 18. $P\Xi$] ΞP B. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$ P.
 $\acute{\epsilon}\pi\acute{\iota}\pi\epsilon\delta\omicron\nu \kappa\upsilon\kappa\lambda\omicron\nu$ F. 20. ΞM] $M\Xi$ corr. ex $N\Xi$ m. 1 b.
22. PN] N e corr. V. 23. $\acute{\iota}\sigma\eta \acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$ V. 24. $\epsilon\lambda\acute{\iota}\sigma\iota$ b,
corr. ex $\epsilon\lambda\acute{\iota}\sigma\iota\nu$ V, comp. F. 26. $\tau\acute{o}$] (prius) corr. ex $\tau\tilde{\omega}$ F.

ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΑΞ$, $ΞΡ$. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν $ΑΞ$,
 $ΞΡ$ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΡ$ ὁρθῇ γὰρ ἡ ὑπὸ $ΑΞΡ$
τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΡΑ$ ἴση
ἄρα ἡ $ΑΒ$ τῇ $ΡΑ$. ἀλλὰ τῇ μὲν $ΑΒ$ ἴση ἐστὶν ἐκάστη
5 τῶν $ΒΓ$, $ΔΕ$, $ΕΖ$, $ΗΘ$, $ΘΚ$, τῇ δὲ $ΡΑ$ ἴση ἐκατέρω
τῶν $ΡΜ$, $ΡΝ$. ἐκάστη ἄρα τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$, $ΔΕ$, $ΕΖ$,
 $ΗΘ$, $ΘΚ$ ἐκάστη τῶν $ΡΑ$, $ΡΜ$, $ΡΝ$ ἴση ἐστίν. καὶ
ἐπεὶ δύο αἱ $ΑΡ$, $ΡΜ$ δυσὶ ταῖς $ΑΒ$, $ΒΓ$ ἴσαι εἰσίν,
καὶ βάσις ἡ $ΑΜ$ βάσει τῇ $ΑΓ$ ὑπόκειται ἴση, γωνία
10 ἄρα ἡ ὑπὸ $ΑΡΜ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΑΒΓ$ ἐστὶν ἴση. διὰ
τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ $ΜΡΝ$ τῇ ὑπὸ $ΔΕΖ$ ἐστὶν
ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ $ΑΡΝ$ τῇ ὑπὸ $ΗΘΚ$.

Ἐκ τριῶν ἄρα γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ $ΑΡΜ$,
 $ΜΡΝ$, $ΑΡΝ$, αἱ εἰσὶν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις ταῖς
15 ὑπὸ $ΑΒΓ$, $ΔΕΖ$, $ΗΘΚ$, στερεὰ γωνία συνέσταιται
ἡ πρὸς τῷ $Ρ$ περιεχομένη ὑπὸ τῶν $ΑΡΜ$, $ΜΡΝ$,
 $ΑΡΝ$ γωνιῶν ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Λήμμα.

Ὅν δὲ τρόπον, ᾧ μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ τοῦ
20 ἀπὸ τῆς $ΑΞ$, ἐκείνῳ ἴσον λαβεῖν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΞΡ$,
δειξομεν οὕτως. ἐκκείσθωσαν αἱ $ΑΒ$, $ΑΞ$ εὐθεῖαι,

1. τοῖς δέ — 2. $ΑΡ$] mg. m. 1 F. 3. $ΡΑ$] e corr. V.
4. $ΡΑ$] corr. ex $ΑΡ$ V. 5. $ΘΚ$] corr. ex $ΗΚ$ m. 1 B.
Ante $ΡΑ$ del. $Α$ m. 1 P. 6. Post $ΡΝ$ ras. 3 litt. V.
7. ἐστίν] om. V. 8. $ΑΡ$] $ΡΑ$ F. εἰς Vb, comp. F.
9. Ante γωνία ins. καὶ m. 2 V. 10. γωνία] om. B; post
ins. F. 11. $ΜΝΡ$ F. ἴση ἐστίν FV. 14. τρισίν B.
15. συνίσταται FVb. 16. ἡ] om. φ. τῷ] mut. in
τό b, τό φ. τῶν] τῶν ὑπό b. 17. ὅπερ ἔδει ποιῆσαι] om.
V. ποιῆσαι] δεῖξαι Pb, γρ. ποιῆσαι mg. b. Seq. duo casus
singulares cum demonstrationibus, u. app. Hoc lemma in
b et in textu (b) et in mg. a m. 1 (β) reperitur, add. γρ.

$$AP^2 = A\Xi^2 + \Xi P^2 \text{ [I, 47];}$$

nam $\angle A\Xi P$ rectus est. quare $AB^2 = PA^2$. itaque $AB = PA$. sed

$$AB = B\Gamma = AE = EZ = H\Theta = \Theta K \quad \text{et} \\ PA = PM = PN.$$

itaque

$$AB = B\Gamma = AE = EZ = H\Theta = \Theta K = PA = PM \\ = PN.$$

et quoniam duae rectae AP , PM duabus rectis AB , $B\Gamma$ aequales sunt, et suppositum est, esse $AM = A\Gamma$, erit etiam $\angle APM = AB\Gamma$ [I, 8]. eadem de causa erit etiam $\angle MPN = AEZ$, $\angle APN = H\Theta K$.

Ergo ex tribus angulis planis APM , MPN , APN , qui tribus datis angulis $AB\Gamma$, AEZ , $H\Theta K$ aequales sunt, solidus angulus constructus est, qui ad P positus est angulis APM , MPN , APN comprehensus; quod oportebat fieri.¹⁾

Corollarium.

Quomodo autem fieri possit, ut sumatur $\Xi P^2 = AB^2 \div A\Xi^2$, sic demonstrabimus.

exponentur rectae AB , $A\Xi$, et maior sit AB , et

1) Quae in codd. sequuntur demonstrationes casuum singularium, ab Euclide profectae esse non possunt. nam praeparatio p. 62, 14 (u. adn. crit.) omnino necessaria, si tres casus separantur, manifesto interpolata est, neque post clausulam legitimam p. 68, 13—17 plura addi possunt. praeterea demonstrationes ipsae uerbosiores sunt neque apud Campanum inueniuntur, neque consuetudo fert Euclidis, ut ad omnes casus respiciatur.

$\sigma\tilde{\nu}\tau\omega\varsigma$. 18. $\lambda\eta\mu\mu\alpha$] om. codd. 20. $\tau\acute{o}$] om. F; add. m. 2, sed euan. 21. $\delta\epsilon\lambda\tilde{\xi}\omega\mu\epsilon\nu$ I'.

καὶ ἔστω μείζων ἡ AB , καὶ γεγραφθῶ ἐπ' αὐτῆς ἡμικύκλιον τὸ $ABΓ$, καὶ εἰς τὸ $ABΓ$ ἡμικύκλιον ἐνηρμόσθω τῇ $ΑΞ$ εὐθείᾳ μὴ μείζονι οὕσῃ τῆς AB διαμέτρου ἴση ἡ $ΑΓ$, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ $ΓΒ$. ἐπεὶ οὖν
 5 ἐν ἡμικυκλίῳ τῷ $ΑΓΒ$ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὲρ $ΑΓΒ$, ὀρθή ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΑΓΒ$. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AB ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$. ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ μείζον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΓΒ$. ἴση δὲ ἡ $ΑΓ$ τῇ $ΑΞ$. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς
 10 $ΑΞ$ μείζον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΓΒ$. ἐὰν οὖν τῇ $ΒΓ$ ἴσην τὴν $ΞΡ$ ἀπολάβωμεν, ἔσται τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς $ΑΞ$ μείζον τῷ ἀπὸ τῆς $ΞΡ$ ὅπερ προέκειτο ποιῆσαι.

κδ'.

15 Ἐὰν στερεὸν ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιέχῃται, τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμά ἐστιν.

Στερεὸν γὰρ τὸ $ΓΔΘΗ$ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιεχέσθω τῶν $ΑΓ$, $ΗΖ$, $ΑΘ$, $ΔΖ$, $ΒΖ$, $ΑΕ$.
 20 λέγω, ὅτι τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμά ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ $ΒΗ$, $ΓΕ$ ὑπὸ ἐπιπέδον τοῦ $ΑΓ$ τέμνεται, αἱ κοινὰ αὐτῶν το-

2. $ΑΓΒ$ b. εἰς — ἡμικύκλιον] om. b. $ABΓ]$
 AB P. ἡμικύκλιον] © β. ἡρμόσθω β. 3. μὴ μείζονι
 — διαμέτρου] om. Bb. $AB]$ m. 2 P. 5. τῷ] corr. ex τό m.
 1 F. τῷ $ΑΓΒ$ γωνία] om. b. $ΑΓΒ]$ B ins. m. 1 P, B in
 ras. F. ὑπό] om. b. ὀρθή — 6. $ΑΓΒ]$ γωνία ὀρθή ἐστὶν
 b. 7. τῶν] τῆς b. $ΓΒ]$ supra scr. m. rec. P. ὥστε]
 om. b. $AB]$ AB ἄρα b. 8. μείζον ἐστὶ] ὑπερέχει P.
 9. τῇ] postea ins. V. τὸ ἄρα] ὥστε τό P; τό b. $AB]$ AB
 ἄρα b, AB μείζον ἐστὶ P. 10. μείζον ἐστὶ] om. P. τῆς]
 m. 2 F. ἐὰν — 13. ποιῆσαι] om. b. 10. $ΒΓ]$ corr. ex

in ea semicirculus describatur $AB\Gamma$, et in semicirculo $AB\Gamma$ recta $A\Gamma$ aptetur [IV, 1] rectae $A\Xi$ aequalis, quae maior non est diametro AB , et ducatur ΓB .

iam quoniam in semicirculo $AB\Gamma$ positus est $\angle A\Gamma B$, rectus erit $\angle A\Gamma B$ [III, 31]. itaque $AB^2 = A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ [I, 47]. quare erit $AB^2 \div A\Gamma^2 = \Gamma B^2$. uerum $A\Gamma = A\Xi$. itaque $\Gamma B^2 = AB^2 \div A\Xi^2$. ergo si sumpserimus $\Xi P = B\Gamma$, erit $\Xi P^2 = AB^2 \div A\Xi^2$; quod oportebat fieri.



XXIV.

Si solidum planis parallelis comprehenditur, plana eius inter se opposita aequalia sunt et parallelogramma.¹⁾

Nam solidum $\Gamma A\Theta H$ planis parallelis comprehendatur $A\Gamma$, HZ , $A\Theta$, AZ , BZ , AE . dico, plana eius inter se opposita aequalia esse et parallelogramma.

nam quoniam duo plana parallela BH , ΓE plano $A\Gamma$ secantur, communes eorum sectiones inter se

1) Haec propositio parum diligenter exposita est; intelligitur enim solidum sex planis parallelis comprehensum neque pluribus, et plana, quamquam omnia parallelogramma sunt, non omnia aequalia sunt, sed opposita sola inter se aequalia.

ΓB V, ΓB BF β . 11. τό] τῷ β . AB μεῖζον P. 12. μεῖζον] om. P. $P\Xi$ P. ὅπερ — 13. ποιῆσαι] om. V. 14. κδ'] corr. ex κη' F. 17. παραλληλόγραμμα] παράλληλα b, mg. m. 1 γρ. παραλληλόγραμμα (comp). — γραμμὰ ἐστὶ φ, m. 2 add. V. ἐστὶ B b. 18. $\Gamma A\Theta H$] corr. ex $\Gamma A H\Theta$ V, $\Gamma A H\Theta$ b. 19. ZB BF. 21. παράλληλά b et seq. ras. F. — γραμμὰ ἐστὶν supra m. 2 V. 22. Post ἐπίπεδα ins. ὅμοια m. 2 F. παράλληλα] supra ras. m. 2 V. 23. τέμνονται V.

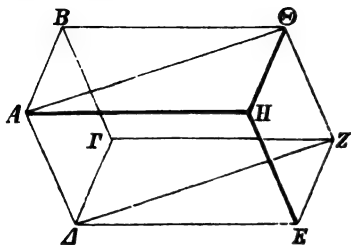
μαὶ παράλληλοί εἰσιν. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ AB
 τῇ $\Delta\Gamma$. πάλιν, ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ BZ ,
 AE ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ AG τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν
 τομαὶ παράλληλοί εἰσιν. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ $B\Gamma$
 5 τῇ AD . ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ AB τῇ $\Delta\Gamma$ παράλληλος·
 παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ AG . ὁμοίως δὲ δεί-
 ξομεν, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν ΔZ , ZH , HB , BZ , AE
 παραλληλόγραμμόν ἐστιν.

Ἐπεξεύχθωσαν αἱ $A\Theta$, ΔZ . καὶ ἐπεὶ παράλληλός
 10 ἐστὶν ἡ μὲν AB τῇ $\Delta\Gamma$, ἡ δὲ $B\Theta$ τῇ ΓZ , δύο δὲ
 αἱ AB , $B\Theta$ ἀπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας
 τὰς $\Delta\Gamma$, ΓZ ἀπτομένας ἀλλήλων εἰσὶν οὐκ ἐν τῷ
 αὐτῷ ἐπιπέδῳ· ἴσας ἄρα γωνίας περιέξουσιν· ἴση ἄρα
 ἡ ὑπὸ $AB\Theta$ γωνία τῇ ὑπὸ $\Delta\Gamma Z$. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ
 15 AB , $B\Theta$ δυσὲ ταῖς $\Delta\Gamma$, ΓZ ἴσαι εἰσὶν, καὶ γωνία ἡ
 ὑπὸ $AB\Theta$ γωνία τῇ ὑπὸ $\Delta\Gamma Z$ ἐστὶν ἴση, βάσεις ἄρα
 ἡ $A\Theta$ βάσει τῇ ΔZ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ $AB\Theta$ τριγώνον
 τῷ $\Delta\Gamma Z$ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν. καὶ ἐστὶ τοῦ μὲν $AB\Theta$
 διπλάσιον τὸ BH παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ $\Delta\Gamma Z$
 20 διπλάσιον τὸ ΓE παραλληλόγραμμον· ἴσον ἄρα τὸ BH
 παραλληλόγραμμον τῷ ΓE παραλληλογράμῳ. ὁμοίως
 δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ τὸ μὲν AG τῷ HZ ἐστὶν ἴσον,
 τὸ δὲ AE τῷ BZ .

Ἐὰν ἄρα στερεὸν ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περι-
 25 ἔχεται, τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ
 παραλληλόγραμμά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

1. εἰσὶ Vb, comp. F. 2. $\Gamma\Delta B$. παράλληλα] om. V.
 BZ] supra scr. Γb ; corr. ex $B\Gamma V$. 3. τέμνεται] corr. ex
 τέμνονται b. 4. εἰσὶ Vb, comp. F. $B\Gamma$] corr. ex $AG b$; B
 in ras. B. 9. ἐστὶ παράλληλος Vb. 10. $\Delta\Gamma$] corr. ex $\Gamma\Delta V$,
 $\Gamma\Delta b$. 13. περιέχουσιν BF (in F corr. m. 2). 15. εἰσὶ Vb,

parallelæ sunt [prop. XVI]. itaque AB rectæ $\Delta\Gamma$ parallela est. rursus quoniam duo plana parallela BZ , AE plano $\Delta\Gamma$ secantur, communes eorum sectiones



parallelæ sunt. itaque $B\Gamma$ rectæ $\Delta\Delta$ parallela est. sed demonstratum est, esse etiam AB rectæ $\Delta\Gamma$ parallelam. itaque $\Delta\Gamma$ parallelogrammum est. similiter demonstrabimus, etiam singula ΔZ ,

ZH , HB , BZ , AE parallelogramma esse.

ducantur $A\Theta$, ΔZ . et quoniam AB rectæ $\Delta\Gamma$, $B\Theta$ rectæ ΓZ parallelæ sunt, duæ rectæ AB , $B\Theta$ inter se tangentes duabus rectis $\Delta\Gamma$, ΓZ inter se tangentibus parallelæ sunt non in eodem plano positæ. æquales igitur comprehendunt angulos [prop. XV]. itaque $\angle AB\Theta = \angle \Gamma Z$. et quoniam duæ rectæ AB , $B\Theta$ duabus $\Delta\Gamma$, ΓZ æquales sunt [I, 34], et $\angle AB\Theta = \angle \Gamma Z$, erit etiam $A\Theta = \Delta Z$, et $\triangle AB\Theta = \triangle \Gamma Z$ [I, 4]. et $BH = 2AB\Theta$, $\Gamma E = 2\angle \Gamma Z$ [I, 34]. itaque $BH = \Gamma E$. similiter demonstrabimus, esse etiam $AF = HZ$, $AE = BZ$.

Ergo si solidum planis parallelis comprehenditur, plana eius inter se opposita æqualia sunt et parallelogramma; quod erat demonstrandum.

comp. F. 17. ἴση ἐστὶ BV b. 18. ἴσον ἐστὶν καὶ ἐστὶ
om. F, hab. φ. ἐστὶν] ἐστὶ PBV, comp. b. 20. BH] φ
seq. lac. 4 litt. 21. τῶν ΓΕ παραλληλογράμμω] om. F.
22. HZ] mut. in HΞ b. 24. ἐπιπέδων — 26. δεῖξαι] καὶ
τα ἐξῆς V. 26. παραλληλόγραμμω] παράλληλα b, corr. mg.
m. 1.

κε'.

Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ
 τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπι-
 πέδοις, ἔσται ὥς ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν, οὕ-
 5 τως τὸ στερεὸν πρὸς τὸ στερεόν.

Στερεὸν γὰρ παραλληλεπίπεδον τὸ $ΑΒΓΔ$ ἐπι-
 πέδῳ τῷ ZH τετμήσθω παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναν-
 τίων ἐπιπέδοις τοῖς PA , $ΔΘ$. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὥς ἡ
 $AEZΦ$ βάσις πρὸς τὴν $EΘΓZ$ βάσιν, οὕτως τὸ
 10 $ABZT$ στερεὸν πρὸς τὸ $EΗΓΔ$ στερεόν.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ $ΔΘ$ ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη, καὶ
 κείσθωσαν τῇ μὲν AE ἴσαι ὅσαιδηποτοῦν αἱ AK ,
 KA , τῇ δὲ $EΘ$ ἴσαι ὅσαιδηποτοῦν αἱ $ΘM$, MN , καὶ
 συμπεπληρώσθω τὰ $ΔO$, $KΦ$, $ΘX$, $MΣ$ παραλληλό-
 15 γραμμα καὶ τὰ $ΔΠ$, KP , $ΔM$, MT στερεά. καὶ ἐπεὶ
 ἴσαι εἰσὶν αἱ $ΔK$, KA , AE εὐθεῖαι ἀλλήλαις, ἴσα
 ἐστὶ καὶ τὰ μὲν $ΔO$, $KΦ$, AZ παραλληλόγραμμα
 ἀλλήλοις, τὰ δὲ $KΞ$, KB , AH ἀλλήλοις καὶ ἔτι τὰ
 $ΔΨ$, $KΠ$, AP ἀλλήλοις· ἀπεναντίον γάρ. διὰ τὰ
 20 αὐτὰ δὴ καὶ τὰ μὲν $EΓ$, $ΘX$, $MΣ$ παραλληλόγραμμα
 ἴσα εἰσὶν ἀλλήλοις, τὰ δὲ $ΘH$, $ΘI$, IN ἴσα εἰσὶν ἀλ-
 λήλοις, καὶ ἔτι τὰ $ΔΘ$, $MΩ$, NT . τρία ἄρα ἐπίπεδα
 τῶν $ΔΠ$, KP , AT στερεῶν τρισὶν ἐπιπέδοις ἐστὶν
 ἴσα. ἀλλὰ τὰ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἐστὶν ἴσα·

1. κε'] κθ' F. 2. παράλληλον ἐπίπεδον Fb.
 4. οὕτω B. 6. παράλληλον ἐπίπεδον Fb. τῷ b.
 10. $ABZT$] Z in ras. m. 1 B. 14. $ΔO$] in ras. F; corr. ex
 $ΔΘ$ m. 1 b. 15. $ΔΠ$] $Δ$ corr. ex $Δ$ b. $ΔM$] $M''Δ'$
 b. MT] NT P, $MΓ$ b. 19. AP] A e corr. b. 21. τὰ
 δέ — ἀλλήλοις] mg. m. 2 euan. F. $ΘI$] $ΘP$ e corr. b.
 IN] $I''N$, I corr. ex P b. 23. ἐστίν] εἰσὶν P. 24. τρι-
 σὶν P. ἐστίν] mut. in εἰσὶν b, εἰσὶν F.

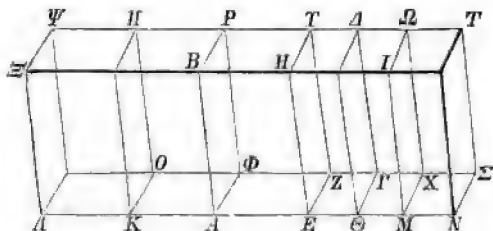
XXV.

Si solidum parallelepipedum¹⁾ plano secatur planis inter se oppositis parallelo, erit ut basis ad basim, ita solidum ad solidum.

Nam solidum parallelepipedum $AB\Gamma\Delta$ secetur
 plano ZH planis PA , $\Delta\Theta$ parallelo. dico, esse

$$AEZ\Phi: E\Theta\Gamma Z = ABZ\Upsilon: EH\Gamma\Delta.$$

producatur enim AO in utramque partem, et ponantur quotlibet rectae AK, KA rectae AE aequales,



rectae autem $E\Theta$ aequales quotlibet ΘM , MN , et
expleantur parallelogramma AO , $K\Phi$, ΘX , $M\Sigma$ et
solida AP , KP , AM , MT . et quoniam $AK = KA$
 $= AE$, erit $AO = K\Phi = AZ$, $K\xi = KB = AH^2)$
et praeterea $AP = KP = AP$; nam inter se oppo-
sita sunt [prop. XXIV]. eadem de causa erit etiam
 $EG = \Theta X = M\Sigma$, $\Theta H = \Theta I = IN$, $AO = M\Omega$
 $= NT$. itaque solidorum AP , KP , AT tria plana
tribus planis aequalia sunt. uerum tria illa plana tribus,

1) Sicut in primo libro (prop. 34) post propositionem praecedenti correspondentem sine definitione infertur uocabulum *παράλληλόγραμμον*, ita hic *παράλληλεπίπεδον* usurpatur, nomen per se perspicuum etiam nulla praemissa definitione.

2) Nam et angulos et latera aequalia habent. ergo etiam similia sunt.

τὰ ἄρα τρία στερεὰ τὰ $ΑΠ$, $ΚΡ$, $ΑΤ$ ἴσα ἀλλήλοις
 ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ τρία στερεὰ τὰ $ΕΔ$,
 $ΔΜ$, $ΜΤ$ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅσαπλασίον ἄρα ἐστὶν
 ἢ $ΑΖ$ βάσις τῆς $ΑΖ$ βάσεως, τοσανταπλάσιόν ἐστι
 5 καὶ τὸ $ΑΤ$ στερεὸν τοῦ $ΑΤ$ στερεοῦ. διὰ τὰ αὐτὰ
 δὴ ὅσαπλασίον ἐστὶν ἢ $ΝΖ$ βάσις τῆς $ΖΘ$ βάσεως,
 τοσανταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ $ΝΤ$ στερεὸν τοῦ $ΘΤ$ στε-
 ρεοῦ. καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἢ $ΑΖ$ βάσις τῇ $ΝΖ$ βάσει,
 ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ $ΑΤ$ στερεὸν τῷ $ΝΤ$ στερεῷ, καὶ εἰ
 10 ὑπερέχει ἢ $ΑΖ$ βάσις τῆς $ΝΖ$ βάσεως, ὑπερέχει καὶ
 τὸ $ΑΤ$ στερεὸν τοῦ $ΝΤ$ στερεοῦ, καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλ-
 λείπει. τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν βά-
 σεων τῶν $ΑΖ$, $ΖΘ$, δύο δὲ στερεῶν τῶν $ΑΤ$, $ΤΘ$,
 εἰληπται ἰσάκεις πολλαπλάσια τῆς μὲν $ΑΖ$ βάσεως καὶ
 15 τοῦ $ΑΤ$ στερεοῦ ἢ τε $ΑΖ$ βάσις καὶ τὸ $ΑΤ$ στερεόν,
 τῆς δὲ $ΘΖ$ βάσεως καὶ τοῦ $ΘΤ$ στερεοῦ ἢ τε $ΝΖ$
 βάσις καὶ τὸ $ΝΤ$ στερεόν, καὶ δέδεικται, ὅτι εἰ ὑπερ-
 ἔχει ἢ $ΑΖ$ βάσις τῆς $ΖΝ$ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ
 $ΑΤ$ στερεὸν τοῦ $ΝΤ$ [στερεοῦ], καὶ εἰ ἴση, ἴσον, καὶ
 20 εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει. ἔστιν ἄρα ὥς ἢ $ΑΖ$ βάσις πρὸς
 τὴν $ΖΘ$ βάσιν, οὕτως τὸ $ΑΤ$ στερεὸν πρὸς τὸ $ΤΘ$
 στερεόν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κς'.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ
 25 σημείῳ τῇ δοθείσῃ στερεᾷ γωνίᾳ ἴσην στερεὰν
 γωνίαν συστήσασθαι.

1. ἄρα] ᾗ supra m. rec. P; post ras. 2 litt. F. τὰ] e
 corr. V. $ΑΠ$] $ΚΗ$ F; supra $Α$ scr. $Α$ m. 1 b. 2. ἐστὶ $ΒV$,
 comp. b, εἰσὶ F. τὰ] (alt.) ins. m. 2 F. 3. ἐστίν] mut.
 in εἰσίν m. 1 P. 4. $ΑΖ$] $ΔΖ$ supra scr. $ΑΒ$ m. 1 b.
 τοσανταπλάσιον b et e corr. F. 7. ἐστι] supra m. 1 P.

quae iis opposita sunt, aequalia sunt [prop. XXIV]. ergo $AN = KP = AT$.¹⁾ eadem de causa erit $EA = AM = MT$. itaque quoties multiplex est AZ basis basis AZ , toties multiplex erit etiam solidum AT solidi AT . eadem de causa quoties multiplex est basis NZ basis $Z\Theta$, toties multiplex erit etiam solidum NT solidi ΘT . et si $AZ = NZ$, erit etiam $AT = NT$, sin $AZ > NZ$, erit etiam $AT > NT$, sin autem $AZ < NZ$, erit $AT < NT$. itaque datis quatuor magnitudinibus, duabus basibus AZ , $Z\Theta$ et duobus solidis AT , $T\Theta$ sumpta sunt aequae multiplicia basis AZ et solidi AT basis AZ et solidum AT , basis autem ΘZ et solidi ΘT basis NZ et solidum NT , et demonstratum est, si $AZ > ZN$, esse etiam $AT > NT$, sin $AZ = ZN$, esse $AT = NT$, sin autem $AZ < ZN$, esse $AT < NT$. erit igitur $AZ : Z\Theta = AT : T\Theta$ [V def. 5]; quod erat demonstrandum.

XXVI.

Ad datam rectam et punctum eius angulum solidum construere dato angulo solido aequalem.

1) Ex def. 10, quia plana ea comprehendunt etiam similia sunt bina simul coniuncta. de trinis u. pag. 75 not. 2. de ceteris ex prop. 24 sequitur, nec opus erat, ut ibi propria demonstratione ostenderetur, quia p. 72, 17 demonstratum est, triangulos congruentes esse (u. I, 4), h. e. $\epsilon\sigma\alpha\ \tau\epsilon\ \kappa\alpha\iota\ \delta\mu\omicron\iota\alpha$.

8. $\eta\ AZ]$ bis P, corr. m. 1. 9. $\epsilon\sigma\tau\epsilon]$ supra scr. comp. m. 2 F.
 $AT]$ supra A scr. A m. 1 b. 10. $NZ]$ Z in ras. V.
13. $\tau\acute{\omega}\nu]$ supra scr. m. 2 B. $\delta\epsilon]$ corr. ex $\delta\eta$ m. 2 V, $\delta\eta$ b.
 $\tau\acute{\omega}\nu]$ supra scr. m. 2 B. 15. $AZ]$ corr. ex AZ m. 1 et
m. 2 b. 16. $\Theta T]$ EA , E in ras. P. 18. $ZN]$ NZ BVb.
19. $\sigma\tau\epsilon\sigma\epsilon\omicron\upsilon]$ om. BFVb. $\iota\sigma\eta]$ $\iota\sigma\omicron\nu$ PFV et in ras. b.
20. $\eta]$ supra scr. m. 1 P. 25. $-\sigma\eta\nu$ e corr. m. rec. V.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεία ἡ AB , τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ δοθὲν σημεῖον τὸ A , ἡ δὲ δοθεῖσα στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ Δ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ὑπὸ $E\Delta\Gamma$, $E\Delta Z$, $Z\Delta\Gamma$ γωνιῶν ἐπιπέδων· δεῖ δὴ πρὸς τῇ AB
 5 εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A τῇ πρὸς τῷ Δ στερεᾷ γωνίᾳ ἴσην στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι.

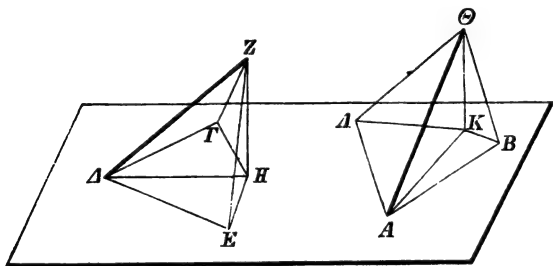
Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΔZ τυχὸν σημεῖον τὸ Z , καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Z ἐπὶ τὸ διὰ τῶν $E\Delta$, $\Delta\Gamma$ ἐπίπεδον κάθετος ἡ ZH , καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ
 10 κατὰ τὸ H , καὶ ἐπεξέχθω ἡ ΔH , καὶ συνεστήτω πρὸς τῇ AB εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A τῇ μὲν ὑπὸ $E\Delta\Gamma$ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ BAA , τῇ δὲ ὑπὸ $E\Delta H$ ἴση ἡ ὑπὸ BAK , καὶ κείσθω τῇ ΔH ἴση ἡ AK , καὶ ἀνεστήτω ἀπὸ τοῦ K σημεῖου τῷ διὰ τῶν
 15 BAA ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ $K\Theta$, καὶ κείσθω ἴση τῇ HZ ἡ $K\Theta$, καὶ ἐπεξέχθω ἡ ΘA . λέγω, ὅτι ἡ πρὸς τῷ A στερεὰ γωνία περιεχομένη ὑπὸ τῶν BAA , $BA\Theta$, ΘAA γωνιῶν ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Δ στερεᾷ γωνίᾳ τῇ περιεχομένη ὑπὸ τῶν $E\Delta\Gamma$, $E\Delta Z$, $Z\Delta\Gamma$
 20 γωνιῶν.

Ἀπειλήφθωσαν γὰρ ἴσαι αἱ AB , ΔE , καὶ ἐπεξέχθωσαν αἱ ΘB , KB , ZE , HE . καὶ ἐπεὶ ἡ ZH ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὕσας ἐν τῷ
 25 ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας· ὀρθὴ ἄρα

3. τῷ] mut. in τό m. 1 b. 4. $E\Delta Z$] Z non liquet in F.
 5. τῷ Δ] τῇ ΔP . 9. τῷ] om. P. τῷ ἐπιπέδῳ] supra scr. m. 1 F.
 12. δέ] om. F. 14. AK] K e corr. m. 1 F. 16. ἡ] (tert.) supra m. 2 P. 18. ἐστὶν B , corr. m. 2. Post Δ ras. 1 lit. B.
 19. τῇ] om. Vbφ. $Z\Delta\Gamma$] supra scr. m. 2 B. 21. αἱ ἴσαι B , corr. m. 2. 22. KB , ZE , HE] $ZE'' HE'' KB'$ Vb (in HE tertia lineola add. in b); ZE , HE F uel potius φ, in ZE nestig. 2 lineolarum.

Sit data recta AB et datum eius punctum A , datus autem angulus solidus is, qui ad A positus est angulis planis $E\Delta\Gamma$, $E\Delta Z$, $Z\Delta\Gamma$ comprehensus. oportet igitur ad rectam AB et punctum eius A angulum solidum construere solido angulo, qui ad A positus est, aequalem.

sumatur enim in ΔZ punctum aliquod Z , et a Z ad planum rectarum $E\Delta$, $\Delta\Gamma$ perpendicularis ducatur ZH [prop. XI], et cum plano concurrat in H , et du-



catur ΔH , et ad rectam AB et punctum eius A construatur $\angle BAA = E\Delta\Gamma$, $\angle BAK = E\Delta H$ [I, 23], et ponatur $AK = \Delta H$, et in puncto K ad planum rectarum BA , AA perpendicularis erigatur $K\Theta$ [prop. XII], et ponatur $K\Theta = HZ$, et ducatur ΘA . dico, angulum solidum, qui ad A positus sit angulis BAA , $BA\Theta$, ΘAA comprehensus, aequalem esse angulo solido, qui ad A positus sit angulis $E\Delta\Gamma$, $E\Delta Z$, $Z\Delta\Gamma$ comprehensus.

abscindantur enim AB , ΔE inter se aequales, et ducantur ΘB , KB , ZE , HE . et quoniam ZH ad planum subiaccens perpendicularis est, etiam ad omnes rectas eam tangentes et in plano subiaccenti positas

ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ $ZH\Delta$, ZHE γωνιῶν. διὰ τὰ
 αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΘKA , ΘKB γωνιῶν
 ὀρθή ἐστίν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ KA , AB δύο ταῖς $H\Delta$,
 ΔE ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνίας ἴσας περι-
 5 ἔχουσιν, βάσις ἄρα ἡ KB βάσει τῇ HE ἴση ἐστίν.
 ἔστι δὲ καὶ ἡ $K\Theta$ τῇ HZ ἴση· καὶ γωνίας ὀρθὰς
 περιέχουσιν· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΘB τῇ ZE . πάλιν ἐπεὶ
 δύο αἱ AK , $K\Theta$ δυοὶ ταῖς ΔH , HZ ἴσαι εἰσὶν, καὶ
 γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ $A\Theta$ βάσει τῇ
 10 $Z\Delta$ ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ AB τῇ ΔE ἴση· δύο
 δὴ αἱ ΘA , AB δύο ταῖς ΔZ , ΔE ἴσαι εἰσὶν. καὶ
 βάσις ἡ ΘB βάσει τῇ ZE ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ
 $BA\Theta$ γωνία τῇ ὑπὸ $E\Delta Z$ ἐστίν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ
 δὴ καὶ ἡ ὑπὸ $\Theta A\Delta$ τῇ ὑπὸ $Z\Delta\Gamma$ ἐστίν ἴση [ἐπειδήπερ
 15 ἐὰν ἀπολάβωμεν ἴσας τὰς $A\Delta$, $\Delta\Gamma$ καὶ ἐπιξέυωμεν
 τὰς KA , ΘA , $H\Gamma$, $Z\Gamma$, ἐπεὶ ὅλη ἡ ὑπὸ $BA\Delta$ ὅλη
 τῇ ὑπὸ $E\Delta\Gamma$ ἐστίν ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ BAK τῇ ὑπὸ
 $E\Delta H$ ὑπόκειται ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $KA\Delta$ λοιπὴ
 τῇ ὑπὸ $H\Delta\Gamma$ ἐστίν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ KA , $A\Delta$
 20 δυοὶ ταῖς $H\Delta$, $\Delta\Gamma$ ἴσαι εἰσὶν, καὶ γωνίας ἴσας περι-
 ἔχουσιν, βάσις ἄρα ἡ KA βάσει τῇ $H\Gamma$ ἐστίν ἴση.
 ἔστι δὲ καὶ ἡ $K\Theta$ τῇ HZ ἴση· δύο δὴ αἱ AK , $K\Theta$
 δυοὶ ταῖς ΓH , HZ εἰσὶν ἴσαι· καὶ γωνίας ὀρθὰς
 περιέχουσιν· βάσις ἄρα ἡ ΘA βάσει τῇ $Z\Gamma$ ἐστίν ἴση.
 25 καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΘA , $A\Delta$ δυοὶ ταῖς $Z\Delta$, $\Delta\Gamma$ εἰσὶν
 ἴσαι, καὶ βάσις ἡ ΘA βάσει τῇ $Z\Gamma$ ἐστίν ἴση, γωνία
 ἄρα ἡ ὑπὸ $\Theta A\Delta$ γωνία τῇ ὑπὸ $Z\Delta\Gamma$ ἐστίν ἴση].
 ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $BA\Delta$ τῇ ὑπὸ $E\Delta\Gamma$ ἴση.

Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ AB καὶ τῷ πρὸς

3. ἐστὶ V, comp. Fb.
 ἔχουσι PVb.

5. BKB.

δύο] (alt.) δυοὶ Vb.
 HE] E'H" F.

4. περι-
 ἐστίν] om. Vb.

rectos angulos efficiet [def. 3]. itaque uterque angulus ZHA , ZHE rectus est. eadem de causa etiam uterque angulus ΘKA , ΘKB rectus est. et quoniam duae rectae KA , AB duabus HA , AE singulae singulis aequales sunt, et angulos aequales comprehendunt, erit $KB = HE$ [I, 4]. uerum etiam $K\Theta = HZ$; et angulos rectos comprehendunt. itaque $\Theta B = ZE$ [id.]. rursus quoniam duae rectae AK , $K\Theta$ duabus AH , HZ aequales sunt, et angulos rectos comprehendunt, erit $A\Theta = ZA$ [id.]. uerum etiam $AB = AE$. itaque duae rectae ΘA , AB duabus AZ , AE aequales sunt; et $\Theta B = ZE$. itaque $\angle B A \Theta = \angle E A Z$ [I, 8]. eadem de causa¹⁾ erit etiam $\angle \Theta A A = \angle A \Gamma$. uerum erat etiam $\angle B A A = \angle A \Gamma$.

Ergo²⁾ ad datam rectam AB et punctum eius A

1) Haec uerba (lin. 13 seq.) satis ostendunt, ea quae sequuntur lin. 14—27 genuina esse non posse; huc adcredit, quod totus ille locus perplexiore sententiarum nexu laborat, quam quo utitur Euclides.

2) Simsonus iure uituperauit, quod nusquam demonstratum est, angulos solidos, qui aequalibus angulis planis eodem ordine contineantur, aequales esse. nam hoc quasi axiomate nititur demonstratio Euclidis. saltem ad similitudinem def. 10 definiri debuerunt aequales anguli solidi.

6. $\xi\sigma\tau\iota\nu$ PB, comp. b. 7. $\pi\epsilon\rho\iota\acute{\epsilon}\chi\omicron\upsilon\sigma\iota$ Vb ϕ . $\iota\sigma\eta$] $\beta\acute{\alpha}\sigma\iota\varsigma$ Vb et ϕ (non F). $\kappa\alpha\iota$] om. V et ϕ (non F). ZE] ZE $\iota\sigma\eta$ $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ Vb; $\gamma\epsilon$. $\iota\sigma\eta$ $\acute{\alpha}\rho\alpha$ $\kappa\alpha\iota$ η ΘB $\tau\eta$ ZE mg. m. 1 b.
8. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ Vb, comp. F. 9. $\pi\epsilon\rho\iota\acute{\epsilon}\chi\omicron\upsilon\sigma\iota$ Vb et ϕ (non F).
10. $Z\Delta$] $\Xi\Delta$ F, ΔZ B. $\xi\sigma\tau\iota\nu$ B. 11. ΔZ , ΔE] " ΔZ " ZE , supra alt. Z scr. Δ m. 1 b; litt. ΔZ , Z eras. V; $Z\Delta$, ΔE B. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ V, comp. Fb. 14. $\Theta A A$] $\Theta A A$, corr. m. 1 b. $Z\Delta \Gamma$] " $\Delta Z \Gamma$ " F. 15. $\Delta \Gamma$] $A \Gamma$, sed corr. b. 16. $K A$] $A K$ F. ΘA] corr. ex ΘA Fb. 20. $\delta\upsilon\sigma\iota\nu$ B. $\acute{\epsilon}\sigma\iota\nu$] comp. F, $\acute{\epsilon}\sigma\iota\iota$ PVb. $\pi\epsilon\rho\iota\acute{\epsilon}\chi\omicron\upsilon\sigma\iota\nu$] BF, $\pi\epsilon\rho\iota\acute{\epsilon}\chi\omicron\upsilon\sigma\iota$ PVb ϕ . 22. $\xi\sigma\tau\iota\nu$ FB. $K\Theta$] ΘK F. $A K$] e corr. b. 24. $\pi\epsilon\rho\iota\acute{\epsilon}\chi\omicron\upsilon\sigma\iota$ Vb.
25. $\iota\sigma\alpha\iota$ $\acute{\epsilon}\sigma\iota\nu$ B. 26. $Z \Gamma$] ΓZ F. $\gamma\omega\nu\iota\alpha$] $\kappa\alpha\iota$ $\gamma\omega\nu\iota\alpha$ BFVb.
27. $\Theta A A$] corr. ex $\Theta B A$ m. 1 b.

αὐτῇ σημείῳ τῷ A τῇ δοθείσῃ στερεᾷ γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ Δ ἴση συνέσταται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

κξ'.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἀναγράψαι.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB , τὸ δὲ δοθὲν στερεον παραλληλεπίπεδον τὸ $\Gamma\Delta$. δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς
10 δοθείσης εὐθείας τῆς AB τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ τῷ $\Gamma\Delta$ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἀναγράψαι.

Συνεστιάτω γὰρ πρὸς τῇ AB εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A τῇ πρὸς τῷ Γ στερεᾷ γωνίᾳ ἴση
15 ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν $BA\Theta$, ΘAK , KAB , ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ὑπὸ $BA\Theta$ γωνίαν τῇ ὑπὸ EGZ , τὴν δὲ ὑπὸ BAK τῇ ὑπὸ EGH , τὴν δὲ ὑπὸ $KA\Theta$ τῇ ὑπὸ HGZ . καὶ γερονέτω ὥς μὲν ἡ $ΕΓ$ πρὸς τὴν ΓH , οὕτως ἡ BA πρὸς τὴν AK , ὥς δὲ ἡ $HΓ$ πρὸς
20 τὴν ΓZ , οὕτως ἡ KA πρὸς τὴν $A\Theta$. καὶ δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὥς ἡ $ΕΓ$ πρὸς τὴν ΓZ , οὕτως ἡ BA πρὸς τὴν $A\Theta$. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΘB παραλληλόγραμμον καὶ τὸ AA στερεόν.

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὥς ἡ $ΕΓ$ πρὸς τὴν ΓH , οὕτως ἡ
25 BA πρὸς τὴν AK , καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ $ΕΓ H$, BAK αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ HE παραλληλόγραμμον τῷ KB παραλληλο-

2. συνίσταται, ι in ras., V; συνεστιάτω φ. ποιῆσαι] δεῖξαι, mg. γρ. ποιῆσαι, m. 1 Vb. 3. κξ'] m. rec. F. 5. παραλληλεπιπ. corr. in παραλληλοεπιπ. b, qui hanc formam lin. 6

dato angulo solido, qui ad \angle positus est, aequalis angulus constructus est; quod oportebat fieri.

XXVII.

In data recta solidum parallelepipedum construere dato solido parallelepipedo simile et similiter positum.

Sit data recta AB et datum solidum parallelepipedum ΓA . oportet igitur in data recta AB solidum parallelepipedum construere dato solido parallelepipedo ΓA simile et similiter positum.

construatur enim ad rectam AB et punctum eius A solido angulo, qui ad Γ positus est, aequalis angulus angulis $BA\Theta$, ΘAK , KAB comprehensus, ita ut sit $\angle BA\Theta = E\Gamma Z$, $BAK = E\Gamma H$, $KA\Theta = H\Gamma Z$ [prop. XXVI]. et fiat

$$E\Gamma : \Gamma H = BA : AK, \quad H\Gamma : \Gamma Z = KA : A\Theta.$$

quare etiam ex aequo erit $E\Gamma : \Gamma Z = BA : A\Theta$ [V, 22]. et expleantur parallelogrammum ΘB et solidum AA .

et quoniam est $E\Gamma : \Gamma H = BA : AK$, et latera aequales angulos $E\Gamma H$, BAK comprehendentia proportionalia sunt¹⁾, erit $HE \sim KB$. eadem de causa

1) H. e. „et quoniam aequales sunt anguli, quos latera haec proportionalia comprehendunt“. de eo, quod inde concluditur, esse $HE \sim KB$, cfr. nol. II p. 153 not. 2.

praebet. 8. εὐθεία] postea add. m. 1 P. 14. γωνία στερεᾶ Vb. 15. τῶν] τῶν ὑπὸ Vb. 17. τὴν δεξίαν καὶ ἐπὶ τὴν Theon (BFVb). 18. HΓZ] litt. HΓ e corr. b. τὴν] om. FVb. 19. HΓ] ΓH Vb. 21. ΓΕ P. ZΓ P. 22. ΘB] Pb et corr. ex ΘΓ m. 1 V; BΘ B et ut videtur F (HEφ). 23. AA] in ras. V, AA b. 24. ἡ] (prius) supra m. 1 F. τὴν ΓH] mg. m. 1 V, Γ litt. e corr. b. 26. αἱ] καὶ comp. b, καὶ corr. in αἱ V. Ante ἄρα eras. γ m. 1 P. 27. ἐστὶν P. KB] litt. B e corr. b. παρ- αλληλογράμω P.

γράφω. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν $K\Theta$ παραλληλό-
 γραμμον τῷ HZ παραλληλογράμῳ ὁμοῖόν ἐστι καὶ
 ἔτι τὸ ZE τῷ ΘB · τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ
 ΓA στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμοις τοῦ AA στε-
 5 ρεοῦ ὁμοιά ἐστιν. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναν-
 τίων ἴσα τέ ἐστι καὶ ὁμοια, τὰ δὲ τρία τρισὶ τοῖς
 ἀπεναντίον ἴσα τέ ἐστι καὶ ὁμοια· ὅλον ἄρα τὸ ΓA
 στερεὸν ὅλῳ τῷ AA στερεῷ ὁμοῖόν ἐστιν.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς AB τῷ δο-
 10 θέντι στερεῷ παραλληλεπίεδῳ τῷ ΓA ὁμοῖόν τε καὶ
 ὁμοίως κείμενον ἀναγράφεται τὸ AA · ὅπερ ἔδει
 ποιῆσαι.

κη'.

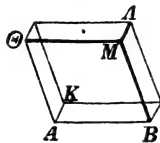
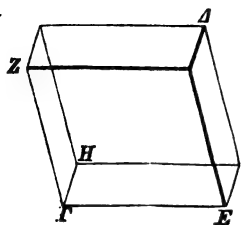
Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ
 15 τμηθῇ κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον
 ἐπιπέδων, δίχα τμηθήσεται τὸ στερεὸν ὑπὸ τοῦ
 ἐπιπέδου.

Στερεὸν γὰρ παραλληλεπίπεδον τὸ AB ἐπιπέδῳ
 τῷ $\Gamma A E Z$ τετμήσθω κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεν-
 20 αντίον ἐπιπέδων τὰς ΓZ , ΔE · λέγω, ὅτι δίχα τμηθή-
 σεται τὸ AB στερεὸν ὑπὸ τοῦ $\Gamma A E Z$ ἐπιπέδου.

Ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν $\Gamma H Z$ τριγώνον τῷ
 $\Gamma Z B$ τριγώνῳ, τὸ δὲ $A \Delta E$ τῷ $\Delta E \Theta$, ἐστὶ δὲ καὶ τὸ
 μὲν ΓA παραλληλόγραμμον τῷ $E B$ ἴσον· ἀπεναντίον
 25 γάρ· τὸ δὲ $H E$ τῷ $\Gamma \Theta$, καὶ τὸ πρῶμα ἄρα τὸ περι-

1. μέν] mg. m. 1 V. 3. τοῦ] mg. m. 1 V; ante hoc vocab.
 rep. lin. 2. ὁμοῖόν — 3. τοῦ, sed delet. m. 1 V. 4. τρισὶν B.
 6. τε] om. P. τὰ δέ — 7. ὁμοια] punctis del. b, del. m.
 2 B, om. FV. 6. τρισὶν P. 9. ἄρα δοθείσης Theon (BFVb).
 12. ποιῆσαι] δεῖξαι PFVb; γρ. ποιῆσαι mg. m. 1 b. 13. λβ'
 F. 16. -μη- in ras. m. 1 P. 21. ὑπὸ τοῦ ΓA in ras. m. 1 B.
 23. ΓZ B' Vb. ἐστιν P. καί] καὶ ὡς P. 24. BE F.

erit etiam $K\Theta \sim HZ$ et $ZE \sim \Theta B$. itaque tria parallelogramma solidi ΓA tribus parallelogrammis solidi

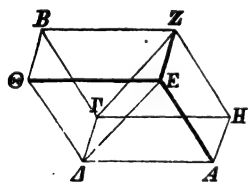


AA similia sunt. uerum in utroque solido tria parallelogramma tribus, quae iis opposita sunt, aequalia¹⁾ sunt et similia. itaque $\Gamma A \sim AA$ [def. 9].

Ergo in data recta AB dato solido parallelepipedo ΓA simile et similiter positum constructum est AA ; quod oportebat fieri.

XXVIII.

Si solidum parallelepipedum secundum diagonales planorum inter se oppositorum plano secatur, solidum plano in duas partes aequales secabitur.



Nam solidum parallelepipedum AB plano ΓAEZ secundum diagonales planorum ΓZ , AE inter se oppositorum secetur. dico, solidum AB plano ΓAEZ in duas partes aequales secari.

Quoniam enim $\Gamma HZ = \Gamma ZB$ et $A\Delta E = \Delta E\Theta$ [I, 34], et praeterea $\Gamma A = BE$ (nam inter se opposita sunt) et $HE = \Gamma\Theta$ [prop. XXIV], prisma duobus

1) Ex prop. XXIV. cur eadem similia sint, supra dictum est p. 77 not. hoc solo utitur; nam ut adhibeatur def. 9, satis est demonstrare, duo solida omnibus planis similibus contineri.

εχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΓΗΖ, ΑΔΕ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΗΕ, ΑΓ, ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΓΖΒ, ΔΕΘ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων
 5 τῶν ΓΘ, ΒΕ, ΓΕ· ὑπὸ γὰρ ἴσων ἐπιπέδων περιέχονται τῷ τε πλήθει καὶ τῷ μεγέθει. ὥστε ὅλον τὸ ΑΒ στερεὸν δίχα τέμνεται ὑπὸ τοῦ ΓΔΕΖ ἐπιπέδου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κθ'.

10 Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφесτωσάαι ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσὶν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΑΒ στερεὰ παρα-
 15 αλληλεπίπεδα τὰ ΓΜ, ΓΝ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφесτωσάαι αἱ ΑΗ, ΑΖ, ΑΜ, ΑΝ, ΓΔ, ΓΕ, ΒΘ, ΒΚ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν ἔστωσαν τῶν ΖΝ, ΔΚ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΜ στερεὸν τῷ ΓΝ στερεῷ.

Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστὶν ἑκάτερον τῶν
 20 ΓΘ, ΓΚ, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ ἑκατέρᾳ τῶν ΔΘ, ΕΚ· ὥστε καὶ ἡ ΔΘ τῇ ΕΚ ἐστὶν ἴση. κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ ΕΘ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΕ λοιπῇ τῇ ΘΚ ἐστὶν ἴση. ὥστε καὶ τὸ μὲν ΔΓΕ τριγώνον τῷ ΘΒΚ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, τὸ δὲ ΔΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΘΝ
 25 παραλληλογράμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΖΗ τριγώνον τῷ ΜΑΝ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ

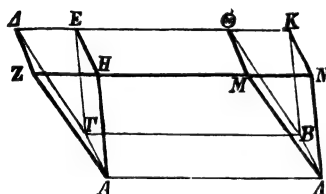
7. τέμνεται BF. 9. λγ' F. 15. ὑπό] ὑ- e corr. m.
 2 b. 16. ΑΗ] e corr. b, ΑΖ BF V. ΑΖ] ΑΗ BF et
 e corr. V. 20. ΓΒ] ΒΓ F. 23. ΘΒΚ] ΘΒ'''Κ'' F, ΘΚΒ

triangulis ΓHZ , $A\Delta E$ et tribus parallelogrammis HE , $A\Gamma$, ΓE comprehensum prismati duobus triangulis ΓZB , $\Delta E\Theta$ et tribus parallelogrammis $\Gamma\Theta$, BE , ΓE comprehenso aequale est; nam planis et numero et magnitudine aequalibus comprehenduntur [def. 10].¹⁾ quare totum solidum AB plano $\Gamma\Delta EZ$ in duas partes aequales sectum est; quod erat demonstrandum.

XXIX.

Solida parallelepipedum in eadem basi collocata et eandem altitudinem habentia, quorum rectae eminentes in iisdem rectis sint, inter se aequalia sunt.

In eadem basi AB solida parallelepipedum ΓM , ΓN



collocata sint eandem altitudinem habentia, quorum rectae eminentes AH , AZ , AM , AN , $\Gamma\Delta$, ΓE , $B\Theta$, BK in iisdem sint rectis ZN , ΔK . dico, esse $\Gamma M = \Gamma N$.

Nam quoniam utrumque $\Gamma\Theta$, ΓK parallelogrammum est, erit ΓB utrique $\Delta\Theta$, EK aequalis [I, 34]. quare etiam $\Delta\Theta = EK$. auferatur, quae communis est, $E\Theta$. itaque $\Delta E = \Theta K$. quare etiam

$\Delta\Gamma E = \Theta BK$ [I, 4] et $\Delta H = \Theta N$ [I, 36].

eadem de causa erit etiam $AZH = MAN$. uerum

1) Cum hic nihil ad rem pertineat, quod parallelogramma, quae solida comprehendunt, et ipsa solida eadem similia sunt, parte sola definitionis 10 usus est Euclides.

e corr. V. 24. $\epsilon\sigma\tau\iota$ PB, comp. Fb. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$, $\tau\acute{o}$] $\epsilon\sigma\tau\iota$ $\tau\acute{o}$,
corr. ex $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$ V. 25. AZH] AHZ BF.

τὸ μὲν ΓΖ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΜ παραλληλο-
 γράμμῳ ἴσον, τὸ δὲ ΓΗ τῷ ΒΝ· ἀπεναντίον γάρ·
 καὶ τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τρι-
 γώνων τῶν ΑΖΗ, ΔΓΕ, τριῶν δὲ παραλληλογράμ-
 5 μων τῶν ΑΔ, ΔΗ, ΓΗ ἴσον ἐστὶ τῷ πρίσματι τῷ
 περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΜΑΝ,
 ΘΒΚ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΒΜ, ΘΝ,
 ΒΝ. κοινὸν προσκείσθω τὸ στερεὸν, οὗ βάσις μὲν
 τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΗΕΘΜ·
 10 ὅλον ἄρα τὸ ΓΜ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ὅλῳ τῷ
 ΓΝ στερεῷ παραλληλεπίπεδῳ ἴσον ἐστίν.

Τὰ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παρ-
 αλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφ-
 εστῶσαι ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν·
 15 ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λ'.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παρ-
 αλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφ-
 εστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, ἴσα
 20 ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐστω ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΑΒ στερεὰ παρ-
 αλληλεπίπεδα τὰ ΓΜ, ΓΝ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ
 ἐφ-εστῶσαι αἱ ΑΖ, ΑΗ, ΑΜ, ΑΝ, ΓΔ, ΓΕ, ΒΘ,
 ΒΚ μὴ ἔστωσαν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν· λέγω, ὅτι
 25 ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΜ στερεὸν τῷ ΓΝ στερεῷ.

Ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ αἱ ΝΚ, ΔΘ καὶ συμπιπτε-

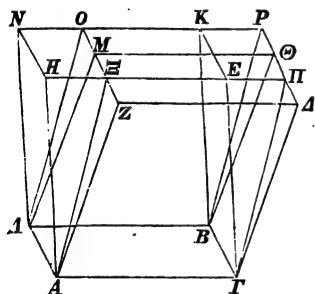
2. τό] corr. ex τῷ m. 1 F. 3. μὲν ὑπὸ δύο Vb.
 4. ΔΓΕ] ΔΕΓ B. 5. ΓΗ] ΗΓ V, et supra scr. m. 1,
 corr. in ΓΗ m. 2 b. 6. ΜΑΝ] Ν e corr. V. 7. τῶν]
 sustulit macula in V, supra est ὦ add. v m. 2. ΘΝ] ΝΘ
 BF. et e corr. V. 9. τὸ ΗΕΘΜ] mg. (addito γρ.) b; in textu

etiam $\Gamma Z = BM$, $\Gamma H = BN$ [prop. XXIV]; nam inter se opposita sunt. itaque etiam prisma duobus triangularibus AZH , ΔFE et tribus parallelogrammis AA , ΔH , ΓH comprehensum prismati duobus triangularibus MAN , ΘBK et tribus parallelogrammis BM , ΘN , BN comprehenso aequale est. commune adiiciatur solidum, cuius basis est AB parallelogrammum, ei autem oppositum $HE\Theta M$. itaque $\Gamma M = \Gamma N$.

Ergo solida parallelepipeda in eadem basi collocata et eandem altitudinem habentia, quorum rectae eminentes in iisdem rectis sint, inter se aequalia sunt; quod erat demonstrandum.

XXX.

Solida parallelepipeda in eadem basi collocata et



eandem altitudinem habentia, quorum rectae eminentes in iisdem rectis non sint, inter se aequalia sunt.

In eadem basi AB solida sint parallelepipeda ΓM , ΓN eandem altitudinem habentia, quorum rectae eminentes AZ , AH , AM , AN , ΓA , ΓE , $B\Theta$, BK in iisdem rectis non sint. dico, esse $\Gamma M = \Gamma N$. producantur enim NK , $\Delta\Theta$ et inter se concurrant

ras. est. 10. στερε- in ras.-m. 1 B. 11. ΓN] N e corr. F.
 ἐστὶ V, comp. Fb. 16. λ'] om. φ. 21. ἔστωσαν BFV.
 παράλληλα ἐπικεῖθα F. 22. αὐ] supra scr. m. rec. P.
 26. NK] N e corr. m. 2 b.

τωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ *P*, καὶ ἔτι ἐκβεβλήσθωσαν
 αἱ *ZM*, *HE* ἐπὶ τὰ *O*, *Π*, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ *AΞ*,
ΑΟ, *ΓΠ*, *BP*. ἴσον δὴ ἔστι τὸ *ΓΜ* στερεόν, οὗ βάσις
 μὲν τὸ *ΑΓΒΑ* παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ
 5 *ZΔΘΜ*, τῷ *ΓΟ* στερεῷ, οὗ βάσις μὲν τὸ *ΑΓΒΑ*
 παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ *ΞΠΡΟ*. ἐπὶ τε
 γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως εἰσι τῆς *ΑΓΒΑ* καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ
 ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ *AZ*, *AΞ*, *ΑΜ*, *ΑΟ*, *ΓΔ*,
ΓΠ, *ΒΘ*, *BP* ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν τῶν *ZO*,
 10 *ΔΡ*. ἀλλὰ τὸ *ΓΟ* στερεόν, οὗ βάσις μὲν ἔστι τὸ
ΑΓΒΑ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ *ΞΠΡΟ*,
 ἴσον ἔστι τῷ *ΓΝ* στερεῷ, οὗ βάσις μὲν τὸ *ΑΓΒΑ*
 παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ *ΗΕΚΝ*. ἐπὶ τε
 γὰρ πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεως εἰσι τῆς *ΑΓΒΑ* καὶ
 15 ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ *AH*, *AΞ*,
ΓΕ, *ΓΠ*, *ΑΝ*, *ΑΟ*, *BK*, *BP* ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν
 εὐθειῶν τῶν *ΗΠ*, *NP*. ὥστε καὶ τὸ *ΓΜ* στερεὸν
 ἴσον ἔστι τῷ *ΓΝ* στερεῷ.

Τὰ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως στερεὰ παραλληλ-
 20 ἐπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ
 εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν·
 ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

3. ἔστιν *P*. 5. *ZΔΘΜ*] *Δ* e corr. b, *ZΔΜΘ* *F*?, sed
ΜΘ euan.; corr. in mg. Pro τὸ *ZΔΘΜ* in *B* est τὸ *ΞΠΡΟ*,
 sed del. τὸ *ZΔΘΜ* — 6. *ΞΠΡΟ*] mg. m. rec. *B*. 5. *ΑΓΒ*
B. 6. τε] eras. *V*. 7. ἔστι comp. *V*. *ΑΓΒΑ*] *Δ* e corr.,
 supra scr. *Α* m. 1 b. καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος] August; om.
P φ; καὶ *BVb*. 8. ὧν] om. φ; αὐτῶν *B* et corr. ex αὐτῶν
 ὧν m. 2 *V*; αὐτῶν ὧν b. *AZ*] corr. ex *AΞ* m. 2 *V*.
 9. *ΓΠ*] *ΤΠ*, sed *Τ* e corr. m. 2 b; *ΓΕΡ*, sed corr. m. 2 euan.
 10. μέν] om. *B*, supra add. postea m. 1 *F*. ἔστι] om. *FVb*.
 11. *ΑΓΒΑ*] *Γ* in ras. m. 2 *B*. *ΞΠ''ΟΡ'* *V*, *ΞΠΡ'Ο'* b.
 12. μέν] om. *P*. μὲν τὸ *ΑΓΒΑ*] om. φ. 13. ἐπὶ] corr.

in P , et praeterea producantur ZM , HE ad O , Π , et ducantur $A\Xi$, AO , $\Gamma\Pi$, BP . itaque solidum ΓM , cuius basis est parallelogrammum $A\Gamma B A$, ei autem oppositum $Z\Delta\Theta M$, aequale est solido ΓO , cuius basis est parallelogrammum $A\Gamma B A$, ei autem oppositum $\Xi\Pi P O$; nam in eadem basi sunt $A\Gamma B A$ et sub eadem altitudine, et rectae eorum eminentes AZ , $A\Xi$, AM , AO , $\Gamma\Delta$, $\Gamma\Pi$, $B\Theta$, BP in iisdem rectis sunt ZO , ΔP [prop. XXIX]. sed solidum ΓO , cuius basis est parallelogrammum $A\Gamma B A$, ei autem oppositum $\Xi\Pi P O$, aequale est solido ΓN , cuius basis est parallelogrammum $A\Gamma B A$, ei autem oppositum $HEKN$; nam rursus in eadem basi sunt $A\Gamma B A$ et sub eadem altitudine, et rectae eorum eminentes AH , $A\Xi$, ΓE , $\Gamma\Pi$, ΔN , AO , BK , BP in iisdem rectis sunt $H\Pi$, NP [id.]. quare erit $\Gamma M = \Gamma N$.

Ergo solida parallelepipedata in eadem basi collocata et eandem altitudinem habentia, quorum rectae eminentes in iisdem rectis non sint, inter se aequalia sunt; quod erat demonstrandum.

ex ἐπεὶ V. 14. πάλιν] om. BF. καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος] August; om. PF; καὶ BVb. 15. ὧν] αὐτῶν B et corr. ex αὐτῶν ὧν V; αὐτὸ ὧν b. 16. $\Gamma\Pi$] e corr. m. 2 V, $\Gamma''\Pi'$ b. ΔN] N e corr. m. 2 V. 19. τῆς αὐτῆς βάσεως στερεά] P; τ. α. β. ὄντα στερεά in ras. V, τῆς αὐτῆς βάσεως b; ἴσων βάσεων στερεά BF et mg. Vb m. 1. 20. αὐτῶν] καὶ P, supra scr. αὐτῶν m. 2. 21. αὐτῶν] om. F. ἐστὶν] εἰσὶν BF.

λα'.

Τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

- 5 Ἐστω ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν $AB, ΓΔ$ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ $AE, ΓΖ$ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ AE στερεὸν τῷ $ΓΖ$ στερεῷ.

- Ἐστωσαν δὴ πρότερον αἱ ἐφεσθηκῶνται αἱ $ΘΚ, ΒΕ, ΑΗ, ΑΜ, ΟΠ, ΔΖ, ΓΞ, ΡΣ$ πρὸς ὀρθὰς ταῖς $AB, ΓΔ$ βάσεσιν, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ $ΓΡ$ εὐθεῖα $η PT$, καὶ συνεστήτω πρὸς τῇ PT εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ P τῇ ὑπὸ $ΑΔΒ$ γωνία ἴση ἢ ὑπὸ TPP , καὶ κείσθω τῇ μὲν $ΑΔ$ ἴση ἢ PT , τῇ δὲ AB ἴση ἢ PT , καὶ συμπληρώσθω ἡ τε PX βά-
 15 σις καὶ τὸ $ΨΤ$ στερεόν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ $TP, ΡΤ$ δυοὶ ταῖς $ΑΔ, AB$ ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιον τὸ PX παραλληλόγραμμον τῷ $ΘΔ$ παραλληλογράμμῳ. καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση μὲν ἢ $ΑΔ$ τῇ PT , ἢ δὲ $ΑΜ$ τῇ $ΡΣ$, καὶ γωνίας
 20 ὀρθὰς περιέχουσιν, ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιον ἐστὶ τὸ $PΨ$ παραλληλόγραμμον τῷ $ΑΜ$ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ AE τῷ $ΣΤ$ ἴσον τέ ἐστὶ καὶ ὅμοιον· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ AE στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῦ $ΨΤ$ στερεοῦ ἴσα τέ ἐστὶ καὶ
 25 ὅμοια. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα

1. λα'] om. φ. 5. AB] A e corr. b. 7. AE] E e corr. b.
 9. $PΣ$] $Σ$ e corr. B. ταῖς] e corr. m. 2 B. AB] A e
 corr. b. 10. βάσει Vb Deīn add. B: ἢ δὲ ὑπὸ $ΑΔΒ$ τῇ
 ὑπὸ $ΓΡΔ$ ἄνισος. τῇ] τῆς Fb. 12. $ΑΔΒ$] A e corr. m. 2 b.
 13. $ΑΔ$] corr. ex $ΗΔ$ et m. 1 et m. 2 b. 14. $ΒΔ$ F.
 16. $ΑΔ$] ut lin. 13 b. εἰς BVb, comp. F. 18. $ΘΔ$] $Θ$ e
 corr. b; $ΔΘ$ F, et V, corr. ex $ΘΔ$. 19. μὲν ἢ] ἢ μὲν B.

XXXI.¹⁾

Solida parallelepipeda in aequalibus basibus collocata et eandem altitudinem habentia inter se aequalia sunt.

Solida parallelepipeda AE , ΓZ in aequalibus basibus AB , ΓA collocata eandem altitudinem habeant. dico, esse $AE = \Gamma Z$.

Iam prius rectae eminentes ΘK , BE , AH , AM , $O\Pi$, AZ , $\Gamma\Xi$, $P\Sigma$ ad bases AB , ΓA perpendiculares sint, et recta ΓP in directum producat, ut fiat PT , et ad rectam PT et punctum eius P angulo AAB aequalis construatur $\angle TPT$ [I, 23], et ponatur $PT = AA$, $PT = AB$, et expleantur basis PX et solidum ΨT . et quoniam duae rectae TP , PT duabus AA , AB aequales sunt, et angulos aequales comprehendunt, parallelogrammum PX parallelogrammo ΘA et aequale et simile est [VI, 14]. et rursus quoniam $AA = PT$, $AM = P\Sigma$, et rectos angulos comprehendunt, parallelogrammum $P\Psi$ parallelogrammo AM aequale et simile est [id.]. eadem de causa etiam AE parallelogrammo ΣT et aequale et simile est. itaque tria parallelogramma solidi AE tribus parallelogrammis solidi ΨT et aequalia et similia sunt. uerum in utro-

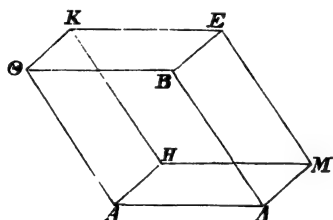
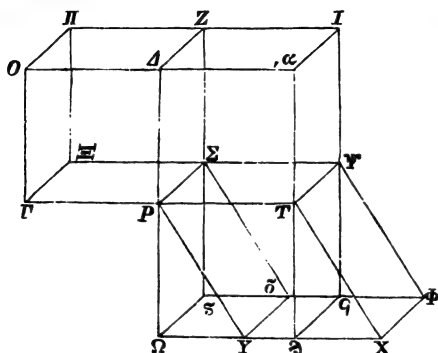
1) Prior figura huius propositionis ita prorsus descripta est, ut in cod. P inuenitur, in quo in mg. add. m. 1: γρ. ἐν ἄλλοις γ (id quod ad litt. siue compendium ὁ referendum est), nisi quod solidum AE ibi non satis accurate descriptum hic emendatum est.

AA] A e corr. b. 21. AM] A e corr. b. 22. ΣT] T in ras. B. 23. τὰ τετρα F. 24. ἐστίν P. 25. μέν] supra scr. F et m. 2 B. ὑπεραντίον F. Ante ἴσα in b τὰ δὲ τετρα τοῖσι τοῖς ὑπεραντίον (v corr. in α m. 1) del. m. 2.

τέ ἐστὶ καὶ ὁμοία, τὰ δὲ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον·
 ὅλον ἄρα τὸ AE στερεὸν παραλληλεπίπεδον ὅλῳ τῷ
 ΨT στερεῷ παραλληλεπίπεδῳ ἴσον ἐστίν. διήχθωσαν
 αὖ ΔP , XT καὶ συμπιπτεύωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Ω ,
 5 καὶ διὰ τοῦ T τῇ $\Delta \Omega$ παράλληλος ἦχθῳ ἡ $\alpha T \mathcal{D}$, καὶ
 ἐκβεβλήσθῳ ἡ $O \Delta$ κατὰ τὸ α , καὶ συμπληρωσθῶ
 τὰ $\Omega \Psi$, PI στερεά. ἴσον δὴ ἐστὶ τὸ $\Psi \Omega$ στερεόν,
 οὗ βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $P \Psi$ παραλληλόγραμμον, ἀπεν-
 10 $\alpha \nu \tau \iota \omega \nu$ δὲ τὸ $\Omega \alpha$, τῷ ΨT στερεῷ, οὗ βάσις μὲν τὸ
 $P \Psi$ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ $T \Phi$. ἐπὶ
 τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως εἰσι τῆς $P \Psi$ καὶ ὑπὸ τὸ
 αὐτὸ ὕψος, ὧν αὖ ἐφесτιῶσαι αὖ $P \Omega$, PT , $T \mathcal{D}$, TX ,
 $\Sigma \varsigma$, $\Sigma \omicron$, $\Psi \alpha$, $\Psi \Phi$ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν τῶν
 ΩX , $\varsigma \Phi$. ἀλλὰ τὸ ΨT στερεὸν τῷ AE ἐστὶν ἴσον·

1. τὰ δὲ τρία — ἀπεναντίον] om. BFVb. 2. στερεόν]
 bis P, alterum del. m. 1, sed renou. π. 3. ἐστὶ PBV, comp.
 Fb. 4. ΔP] e corr. V. 5. $\Delta \Omega$] Δ e corr. V. $\alpha T \mathcal{D}$]
 $\tau \mathcal{D}$ post ras. 1 litt. FV, $\tau \mathcal{D}$ B, eras. \mathcal{D} , λτρ b, $\tau \mathcal{D}$ mg.
 m. 2. 6. α] corr. ex l m. 2b. 9. ωq B, eras. q; ως b,
 corr. m. 2. 10. $T \Phi$] e corr. m. 2 b. 11. εἰσι] comp. in
 ras. V, corr. ex ἐστὶ b; εἰσιν B. 12. ὧν] PFVb, καὶ αὐτῶν
 B; γε. καὶ αὐτῶν καὶ (comp.) mg. b m. 1. αὖ] (alt.) om. B.
 $T \mathcal{D}$] \mathcal{D} in ras. FV, e corr. m. 2b. TX] in ras. V, ras.
 4 litt. b. 13. $\Sigma \varsigma$] in ras. V, σξ F. $\Sigma \omicron$] $\sigma \omicron$ P; σς F, supra
 scr. ση m. 1; σγ in ras. V et corr. ex εγ B; $\sigma \gamma''$ b (γ e corr.).
 $\Psi \alpha$] q e corr. b. 14. τῷ] post ras. 1 litt. b; corr. ex
 τό m. 1 P.

que solido tria parallelogramma tribus, quae iis opposita sunt, et aequalia et similia sunt [p. 77 not. 1]. itaque totum solidum parallelepipedum AE toti solido parallelepipedo ΨT aequale est [def. 10]. edu-



cantur AP , XT et inter se concurrant in Ω , et per T rectae $\Delta\Omega$ parallela ducatur $\alpha T\Delta$, et producat $O\Delta$ ad α , et expleantur solida $\Omega\P$, PI . itaque solidum $\Psi\Omega$, cuius basis est $P\P$ parallelogrammum, ei autem oppositum Ω_Q , solido ΨT , cuius basis est $P\P$ parallelogrammum, ei autem oppositum $T\Phi$, aequale est; nam et in eadem basi sunt $P\P$ et sub eadem altitudine, et rectae eorum eminentes $P\Omega$, PT , $T\Delta$, TX , $\Sigma\varsigma$, $\Sigma\delta$, Ψ_Q , $\Psi\Phi$ in iisdem rectis sunt ΩX , $\varsigma\Phi$ [prop. XXIX].

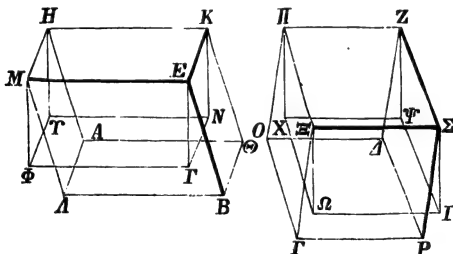
καὶ τὸ $\Psi\Omega$ ἄρα στερεὸν τῷ AE στερεῷ ἐστὶν ἴσον.
καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ $PTXT$ παραλληλόγραμμον τῷ
 ΩT παραλληλογράμῳ· ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως
εἰσι τῆς PT καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς PT ,
5 ΩX · ἀλλὰ τὸ $PTXT$ τῷ $\Gamma\Delta$ ἐστὶν ἴσον, ἐπεὶ καὶ
τῷ AB , καὶ τὸ ΩT ἄρα παραλληλόγραμμον τῷ $\Gamma\Delta$
ἐστὶν ἴσον. ἄλλο δὲ τὸ ΔT · ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $\Gamma\Delta$
βάσις πρὸς τὴν ΔT , οὕτως ἡ ΩT πρὸς τὴν ΔT . καὶ
ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΓI ἐπιπέδῳ τῷ PZ
10 τέμνεται παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις,
ἐστὶν ὡς ἡ $\Gamma\Delta$ βάσις πρὸς τὴν ΔT βάσιν, οὕτως
τὸ ΓZ στερεὸν πρὸς τὸ PI στερεόν. διὰ τὰ αὐτὰ
δὴ, ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΩI ἐπιπέδῳ
τῷ $P\Psi$ τέμνεται παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπι-
15 πέδοις, ἐστὶν ὡς ἡ ΩT βάσις πρὸς τὴν $T\Delta$ βάσιν,
οὕτως τὸ $\Omega\Psi$ στερεὸν πρὸς τὸ PI . ἀλλ' ὡς ἡ $\Gamma\Delta$
βάσις πρὸς τὴν ΔT , οὕτως ἡ ΩT πρὸς τὴν ΔT · καὶ
ὡς ἄρα τὸ ΓZ στερεὸν πρὸς τὸ PI στερεόν, οὕτως
τὸ $\Omega\Psi$ στερεὸν πρὸς τὸ PI . ἐκάτερον ἄρα τῶν ΓZ ,
20 $\Omega\Psi$ στερεῶν πρὸς τὸ PI τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον
ἄρα ἐστὶ τὸ ΓZ στερεὸν τῷ $\Omega\Psi$ στερεῷ. ἀλλὰ τὸ
 $\Omega\Psi$ τῷ AE ἐδείχθη ἴσον· καὶ τὸ AE ἄρα τῷ ΓZ
ἐστὶν ἴσον.

Μὴ ἔστωσαν δὴ αἱ ἐφεσθηκυῖαι αἱ AH , ΘK , BE ,
25 AM , ΓN , OP , ΔZ , $P\Sigma$ πρὸς ὁρθὰς ταῖς AB , $\Gamma\Delta$
βάσεσιν· λέγω πάλιν, ὅτι ἴσον τὸ AE στερεὸν τῷ

2. $PTXT$] T e corr. b. 4. εἰσιν B. PT] (prius) $P\Gamma B$.
5. ἴσον ἐστὶν BF. 6. AB] A e corr. m. 1 b. ΩT] T e
corr. m. 2 P. ἄρα] supra scr. m. rec. B. 7. $\Gamma\Delta$] $\Delta\Gamma F$;
" $\Delta\Gamma V$ b. 11. οὕτω PB. 12. τό] (alt.) e corr. F. 13. ΩI]
 I add. m. 2 b. 15. $T\Delta$] T e corr. m. 2 P. 16. οὕτω B.
ἀλλ' ὡς — 19. PI] om. F. 17. ΩT βάσις P. ΔT] in ras. V;

uerum $\Psi T = AE$. itaque etiam $\Psi \Omega = AE$. et quoniam $PTXT = \Omega T$ (nam et in eadem basi sunt PT et in iisdem parallelis PT , ΩX [I, 35]), sed $PTXT = \Gamma \Delta$, quoniam $PTXT = AB$, erit etiam $\Omega T = \Gamma \Delta$. aliud autem quoduis est ΔT . itaque $\Gamma \Delta : \Delta T = \Omega T : \Delta T$ [V, 7]. et quoniam solidum parallelepipedum ΓI sectum est plano PZ parallelo planis oppositis, erit $\Gamma \Delta : \Delta T = \Gamma Z : PI$ [prop. XXV]. iam eadem de causa, quoniam solidum parallelepipedum ΩI sectum est plano $P\Psi$ parallelo planis oppositis, erit $\Omega T : T\Delta = \Omega \Psi : PI$ [id.]. sed $\Gamma \Delta : \Delta T = \Omega T : \Delta T$. quare etiam $\Gamma Z : PI = \Omega \Psi : PI$. itaque utrumque solidum ΓZ , $\Omega \Psi$ ad PI eandem rationem habet. quare $\Gamma Z = \Omega \Psi$ [V, 9]. uerum demonstratum est, esse $\Omega \Psi = AE$. quare etiam $AE = \Gamma Z$.

iam rectae eminentes AH , ΘK , BE , AM , ΓN ,



OH , ΔZ , $P\Sigma$ ad bases AB , $\Gamma \Delta$ perpendiculares ne sint. rursus dico, esse $AE = \Gamma Z$. ducantur enim a

$T\Delta B$; " $T'\Delta b$. 19. PI] I euan. V. Dein add. $\sigma\tau\epsilon\rho\epsilon\acute{o}\nu$ Theon (BFVb). 20. $\sigma\tau\epsilon\rho\epsilon\acute{o}\nu$ B, corr. m. rec. $\lambda\acute{o}\gamma\omicron\nu$ $\xi\chi\epsilon\iota$ B. 21. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$ P. $\tau\acute{o}$] (alt.) mut. in $\tau\acute{o}$ b; $\tau\acute{o}$ BV. 22. $\Omega \Psi$] Ω e corr. b. $\tau\acute{o}$] mut. in $\tau\acute{o}$ b, $\tau\acute{o}$ BV; $\omicron\upsilon\tau\omega\varsigma$ $\acute{\epsilon}\nu$ $\acute{\alpha}\lambda\lambda\omega$ mg. m. 1 Vb. 23. $\acute{\iota}\sigma\omicron\nu$ $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$ Vb. Dein add. $\omicron\pi\epsilon\rho$ $\acute{\epsilon}\delta\epsilon\iota$ $\delta\epsilon\acute{\iota}\xi\alpha\iota$ PFVb. 25. ΓN] N in ras. V. 26. $\beta\acute{\alpha}\sigma\epsilon\sigma\iota$ b et supra scr. m. 2 V. $\acute{\iota}\sigma\omicron\nu$ $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}$ Theon (BFVb).

- ΓΖ στερεῶ. ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν K, E, H, M, Π, Z, N, Σ σημείων ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετοι αἱ KΞ, ET, HT, MΦ, ΠΧ, ΖΨ, ΝΩ, ΣΙ, καὶ συμβαλλέτωσαν τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ Ξ, Τ, 5 Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω, Ι σημεία, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΞΤ, ΞΥ, ΥΦ, ΤΦ, ΧΨ, ΧΩ, ΩΙ, ΙΨ. ἴσον δὴ ἔστι τὸ ΚΦ στερεὸν τῷ ΠΙ στερεῶ· ἐπὶ τε γὰρ ἴσων βάσεων εἰσι τῶν ΚΜ, ΠΣ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφesiτῶσαι πρὸς ὀρθάς εἰσι ταῖς βάσεσιν. ἀλλὰ 10 τὸ μὲν ΚΦ στερεὸν τῷ ΑΕ στερεῶ ἔστιν ἴσον, τὸ δὲ ΠΙ τῷ ΓΖ· ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως εἰσι καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφesiτῶσαι οὐκ εἰσιν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν. καὶ τὸ ΑΕ ἄρα στερεὸν τῷ ΓΖ στερεῶ ἔστιν ἴσον.
- 15 Τὰ ἄρα ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λβ'.

Τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστω ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΒ, ΓΔ· λέγω, ὅτι τὰ ΑΒ, ΓΔ στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις, τουτέστιν ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ βάσις πρὸς τὴν ΓΖ βάσιν, οὕτως 25 τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεόν.

2. Π] e corr. b. N] in ras. V. 3. KΞ] KZ F; Ξ in ras. V. ΠΧ] Π in ras. m. 1 P. ΝΩ] Ν in ras. V.

4. ΣΥ Ρ. συμβαλλέτωσαν V. Ξ] in ras. V. Τ, Τ b.

5. σημείωι Β, ω in ras. 6. ΞΤ] Ξ in ras. V. ΞΤ] Ξ in ras. V; ΤΦ F. ΤΦ] ΞΥ F. ΙΨ] ΩΨ b. 7. ΚΦ] Φ e corr. V. 8. ΠΣ] corr. ex ΠΕ m. 1 b. ὑπό] ἐπὶ b; corr. mg. m.

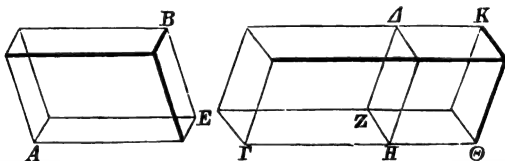
1. 9. εἰσιν Β. 11. εἰσιν Ρ. 12. ὑπό] ἐπὶ b; corr. mg.

punctis $K, E, H, M, \Pi, Z, N, \Sigma$ ad planum subiacens perpendiculares $K\Xi, ET, HT, M\Phi, \Pi X, Z\Psi, N\Omega, \Sigma I$, et cum plano in punctis $\Xi, T, \Gamma, \Phi, X, \Psi, \Omega, I$ concurrant, et ducantur $\Xi T, \Xi \Gamma, \Gamma \Phi, T \Phi, X \Psi, X \Omega, \Omega I, I \Psi$. iam erit $K\Phi = \Pi I$; nam in aequalibus basibus sunt $KM, \Pi \Sigma$ et sub eadem altitudine, et rectae eorum eminentes ad bases perpendiculares sunt [per priorem partem huius prop.]. uerum $K\Phi = AE, \Pi I = \Gamma Z$; nam et in eadem basi sunt et sub eadem altitudine, et rectae eorum eminentes in iisdem rectis non sunt [prop. XXX]. itaque etiam $AE = \Gamma Z$.

Ergo solida parallelepipeda in aequalibus basibus collocata et eandem altitudinem habentia inter se aequalia sunt; quod erat demonstrandum.

XXXII.

Solida parallelepipeda, quae eandem habent altitudinem, inter se eandem rationem habent quam bases.



Solida parallelepipeda $AB, \Gamma \Delta$ eandem altitudinem habeant. dico, solida parallelepipeda $AB, \Gamma \Delta$ eandem inter se rationem habere quam bases, hoc est, esse $AE : \Gamma Z = AB : \Gamma \Delta$.

m. 1. 13. στερεὸν ἄρα b. 14. ἴσον ἐστίν b. 18. λβ']
om. φ. 19. παραλληλοεπίπεδα, eras. o, V; item lin. 22.
21. παραλληλοεπίπεδα V, ut p. 100, 3, 6. 23. ἐστίν] om. φ.
βάσις] om. FV. 25. στερεόν] (prius) om. V.

Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ την ZH τῷ AE ἴσον
 τὸ $Z\Theta$, καὶ ἀπὸ βάσεως μὲν τῆς $Z\Theta$, ὕψους δὲ τοῦ
 αὐτοῦ τῷ $\Gamma\Delta$ στερεὸν παραλληλεπίπεδον συμπεπλη-
 ρώσθω τὸ HK . ἴσον δὴ ἐστὶ τὸ AB στερεὸν τῷ HK
 5 στερεῷ· ἐπὶ τε γὰρ ἴσων βάσεων εἰσι τῶν AE , $Z\Theta$
 καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. καὶ ἐπεὶ στερεὸν παραλλη-
 λεπίπεδον τὸ ΓK ἐπιπέδῳ τῷ ΔH τέμνεται παραλλήλῳ
 ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΓZ
 βάσις πρὸς την $Z\Theta$ βάσιν, οὕτως τὸ $\Gamma\Delta$ στερεὸν
 10 πρὸς τὸ $\Delta\Theta$ στερεόν. ἴση δὲ ἡ μὲν $Z\Theta$ βάσις τῇ
 AE βάσει, τὸ δὲ HK στερεὸν τῷ AB στερεῷ· ἐστὶν
 ἄρα καὶ ὡς ἡ AE βάσις πρὸς τὴν ΓZ βάσιν, οὕτως
 τὸ AB στερεὸν πρὸς τὸ $\Gamma\Delta$ στερεόν.

Τὰ ἄρα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλ-
 15 ἐπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστὶν ὡς αἱ βάσεις· ὅπερ ἔδει
 δεῖξαι.

λγ'.

Τὰ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλ-
 ληλα ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων
 20 πλευρῶν.

Ἐστω ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ AB , $\Gamma\Delta$,
 ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ AE τῇ ΓZ · λέγω, ὅτι τὸ AB
 στερεὸν πρὸς τὸ $\Gamma\Delta$ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει,
 ἥπερ ἡ AE πρὸς τὴν ΓZ .

25 Ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ ἐπ' εὐθείας ταῖς AE , HE ,
 ΘE αἱ EK , EA , EM , καὶ κείσθω τῇ μὲν ΓZ ἴση ἡ
 EK , τῇ δὲ ZN ἴση ἡ EA , καὶ ἔτι τῇ ZP ἴση ἡ EM ,
 καὶ συμπεπληρώσθω τὸ $K\Lambda$ παραλληλόγραμμον καὶ
 τὸ KO στερεόν.

3. τῷ] τό post ins., euan. F; supra scr. V. καὶ συμπ.
 b. 4. ἐστὶν P. 5. τε] om. b. εἶσι] ἐστι B, om. FV.

nam rectae ZH parallelogrammo AE aequale adplicetur $Z\Theta$ [I, 45], et in $Z\Theta$ basi, altitudine autem eadem, qua ΓA , solidum parallelepipedum expleatur HK . erit igitur $AB = HK$; nam et in aequalibus basibus sunt AE , $Z\Theta$ et sub eadem altitudine [prop. XXXI]. et quoniam solidum parallelepipedum ΓK sectum est plano ΔH parallelo planis oppositis, erit

$$\Gamma Z : Z\Theta = \Gamma A : \Delta\Theta \text{ [prop. XXV].}$$

uerum $Z\Theta = AE$ et $HK = AB$. erit igitur

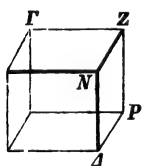
$$AE : \Gamma Z = AB : \Gamma A.$$

Ergo solida parallelepipeda, quae eandem habent altitudinem, inter se eandem rationem habent quam bases; quod erat demonstrandum.

XXXIII.

Similia solida parallelepipeda triplicatam inter se rationem habent quam latera correspondentia.

Similia sint solida parallelepipeda AB , ΓA , et AE lateri ΓZ correspondens. dico, esse $AB : \Gamma A = AE^3 : \Gamma Z^3$.



producantur enim in directum AE , HE , ΘE , ut fiant EK , EA , EM , et ponatur

$$EK = \Gamma Z, \quad EA = ZN, \quad EM = ZP,$$

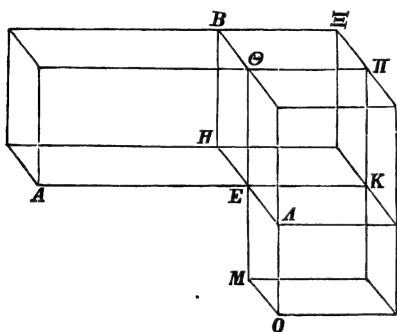
et expleantur parallelogrammum $K\Delta$ et solidum KO .

8. ἀρα] om. FV. ΓZ] P; " ΓZ b; ΘZ BFV. 9. $Z\Theta$] Pb; ΓZ B; $Z\Gamma F$ et in ras. V. οὐτω B. ΓA] P, " ΓA " b; ΘA BFV. 10. $\Delta\Theta$] P, $\Delta\Theta$ b; $\Delta\Gamma$ BFV. 12. ΓZ] Z in ras. F. 14. παραλληλοεπίπεδα V. 15. εἰσιν] εἰσιν FV. 17. λγ'] om. φ. 18. παραλληλοεπίπεδα V, ut lin. 21. 19. εἰσιν B. 22. AE] corr. ex AE m. 2 P. 25. ταῖς] τῆς b. 26. αλ] supra m. 2 B; εὐθεῖαι αλ FV. EM] M corr. ex N m. 1 F. 27. ετι] om. φ. 29. KO] in ras. B; O in ras. m. 1 P.

Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ $ΚΕ$, $ΕΛ$ δυσὶ ταῖς $ΓΖ$, $ΖΝ$ ἴσαι εἰσίν, ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΚΕΛ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΓΖΝ$ ἐστὶν ἴση, ἐπειδήπερ καὶ ἡ ὑπὸ $ΑΕΗ$ τῇ ὑπὸ $ΓΖΝ$ ἐστὶν ἴση διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν $ΑΒ$, $ΓΔ$ 5 στερεῶν, ἴσον ἄρα ἐστὶ [καὶ ὅμοιον] τὸ $ΚΑ$ παραλληλόγραμμον τῷ $ΓΝ$ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δη καὶ τὸ μὲν $ΚΜ$ παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ καὶ ὅμοιον τῷ $ΓΡ$ [παραλληλογράμμῳ] καὶ ἔτι τὸ $ΕΟ$ τῷ $ΔΖ$ · τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ $ΚΟ$ στερεοῦ 10 τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῦ $ΓΔ$ στερεοῦ ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια, τὰ δὲ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια· ὅλον ἄρα τὸ $ΚΟ$ στερεὸν ὅλῳ τῷ $ΓΔ$ στερεῷ ἴσον ἐστὶ καὶ ὅμοιον. συμπεπληρώσθω 15 τὸ $ΗΚ$ παραλληλόγραμμον, καὶ ἀπὸ βάσεων μὲν τῶν $ΗΚ$, $ΚΑ$ παραλληλογράμμων, ὕψους δὲ τοῦ αὐτοῦ τῷ $ΑΒ$ στερεὰ συμπεπληρώσθω τὰ $ΕΞ$, $ΑΠ$. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν $ΑΒ$, $ΓΔ$ στερεῶν ἐστὶν ὡς ἡ $ΑΕ$ πρὸς τὴν $ΓΖ$, οὕτως ἡ $ΕΗ$ πρὸς τὴν $ΖΝ$, 20 καὶ ἡ $ΕΘ$ πρὸς τὴν $ΖΡ$, ἴση δὲ ἡ μὲν $ΓΖ$ τῇ $ΕΚ$, ἡ δὲ $ΖΝ$ τῇ $ΕΛ$, ἡ δὲ $ΖΡ$ τῇ $ΕΜ$, ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $ΑΕ$ πρὸς τὴν $ΕΚ$, οὕτως ἡ $ΗΕ$ πρὸς τὴν $ΕΛ$ καὶ ἡ $ΘΕ$ πρὸς τὴν $ΕΜ$. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ $ΑΕ$ πρὸς τὴν $ΕΚ$, οὕτως τὸ $ΑΗ$ [παραλληλόγραμμον] πρὸς τὸ $ΗΚ$ παρ-

1. $ΚΕ$] $ΕΚ$ BFV. 4. $ΓΖΝ$] $ΖΝ$ in ras. B. ἐστὶν ἴση] supra m. 2 V. κατὰ κορυφὴν γάρ mg. m. 1 b. 5. καὶ ὅμοιον] postea add. mg. m. 1 P. 7. παραλληλόγραμμον] om. F. 8. παραλληλογράμμῳ] om. P. $ΕΟ$] $Ο$ in ras. B. 9. $ΖΔ$ BFV. στερεοῦ] so eras. B. 10. ἴσα — 11. ἀπεναντίον] mg. m. 2 B. 10. ἐστὶ] εἰσίν P. 12. ἐστὶ] εἰσίν P; τέ ἐστὶ FV. τρία] λοιπὰ τρία V et bis F. 13. ἴσα] ἴσα τε b; τε add. m. 2 B. ἐστὶ] τε FV. In V lin. 12 τὰ δέ — 13. ὅμοια punctis del. 13. $ΚΟ$] $Ο$ in ras. V. 15. ἀπὸ] ἐπὶ b.

et quoniam duo latera KE , EA duobus ΓZ , ZN aequalia sunt, uerum etiam $\angle KEA = \Gamma ZN$ (quia $\angle AEH = \Gamma ZN$ propter similitudinem solidorum AB , ΓA)¹⁾, erit $KA = \Gamma N$.²⁾ eadem de causa etiam KM parallelogrammum parallelogrammo ΓP aequale est et simile et praeterea EO parallelogrammo AZ . itaque tria parallelogramma solidi KO tribus paralle-



logrammis solidi ΓA aequalia sunt et similia. uerum in utroque solido tria parallelogramma tribus, quae iis opposita sunt, aequalia sunt et similia [prop. XXIV]. itaque totum solidum KO toti solido ΓA aequale est

et simile [def. 10]. expleatur parallelogrammum HK , et in basibus parallelogrammis HK , KA , altitudine autem eadem, qua AB , solida expleantur $E\Xi$, $A\Pi$. et quoniam propter similitudinem solidorum AB , ΓA est $AE:\Gamma Z = EH:ZN = E\Theta:ZP$ [def. 9; VI def. 1], et $\Gamma Z = EK$, $ZN = EA$, $ZP = EM$, erit $AE:EK$

1) Def. 9; VI def. 1. et $\angle AEH = KEA$ [I, 15].

2) VI, 14. eadem similia esse ut per se intellegitur, ita addi debuit. sed cfr. p. 75 not. 2.

17. $\tau\omega$] corr. ex $\tau\omega\sigma$ m. 1 V. 20. $E\Theta$] Θ e corr. m. 1 b. ΓZ] $Z\Gamma$ V. 22. AE] EA b. η HE — 24. $\sigma\tilde{\upsilon}\tau\omega\varsigma$] om. b. 24. $\pi\alpha\rho\alpha\lambda\lambda\eta\lambda\acute{o}\gamma\rho\alpha\mu\omicron\nu$] om. P. $\tau\acute{o}$] corr. ex $\tau\acute{\eta}\nu$ V.

αλληλόγραμμον, ὥς δὲ ἡ HE πρὸς τὴν EA , οὕτως
τὸ HK πρὸς τὸ KA , ὥς δὲ ἡ OE πρὸς EM , οὕτως
τὸ PE πρὸς τὸ KM · καὶ ὥς ἄρα τὸ AH παραλλη-
λόγραμμον πρὸς τὸ HK , οὕτως τὸ HK πρὸς τὸ KA
5 καὶ τὸ PE πρὸς τὸ KM . ἀλλ' ὥς μὲν τὸ AH πρὸς
τὸ HK , οὕτως τὸ AB στερεὸν πρὸς τὸ $EΞ$ στερεόν,
ὥς δὲ τὸ HK πρὸς τὸ KA , οὕτως τὸ $ΞE$ στερεὸν
πρὸς τὸ $ΠA$ στερεόν, ὥς δὲ τὸ PE πρὸς τὸ KM ,
οὕτως τὸ $ΠA$ στερεὸν πρὸς τὸ KO στερεόν· καὶ ὥς
10 ἄρα τὸ AB στερεὸν πρὸς τὸ $EΞ$, οὕτως τὸ $EΞ$ πρὸς
τὸ $ΠA$ καὶ τὸ $ΠA$ πρὸς τὸ KO . ἐὰν δὲ τέσσαρα με-
γέθη κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἦ, τὸ πρῶτον πρὸς
τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ πρὸς τὸ δεύ-
τερον· τὸ AB ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ KO τριπλασίονα
15 λόγον ἔχει ἥπερ τὸ AB πρὸς τὸ $EΞ$. ἀλλ' ὥς τὸ
 AB πρὸς τὸ $EΞ$, οὕτως τὸ AH παραλληλόγραμμον
πρὸς τὸ HK καὶ ἡ AE εὐθεῖα πρὸς τὴν EK · ὥστε
καὶ τὸ AB στερεὸν πρὸς τὸ KO τριπλασίονα λόγον
ἔχει ἥπερ ἡ AE πρὸς τὴν EK . ἴσον δὲ τὸ [μὲν] KO
20 στερεὸν τῷ $ΓA$ στερεῷ, ἡ δὲ EK εὐθεῖα τῇ $ΓZ$ · καὶ
τὸ AB ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ $ΓA$ στερεὸν τριπλασίονα
λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ὁμόλογος αὐτοῦ πλευρὰ ἡ AE πρὸς
τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τὴν $ΓZ$.

Τὰ ἄρα ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἐν τριπλα-
25 σίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· ὅπερ ἔδει
δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι
ἀνάλογον ᾗσιν, ἔσται ὥς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην,

1. HE] corr. ex NE m. 1 b. 2. τὴν EM BV .
8. Post $ΠE$ add. παραλληλόγραμμον V et m. rec. F . 5. τὸ

$= HE:EA = \Theta E:EM$. sed $AE:EK = AH:HK$,
 $HE:EA = HK:KA$, $\Theta E:EM = \Pi E:KM$ [VI, 1].

itaque $AH:HK = HK:KA = \Pi E:KM$. uerum

$$AH:HK = AB:E\Xi, \quad HK:KA = \Xi E:\Pi A,$$

$$\Pi E:KM = \Pi A:KO \text{ [prop. XXXII].}$$

quare $AB:E\Xi = E\Xi:\Pi A = \Pi A:KO$. sin quatuor magnitudines deinceps proportionales sunt, prima ad quartam triplicatam rationem habere dicitur quam ad secundam [V def. 10]. itaque $AB:KO = AB^3:E\Xi^3$. est autem $AB:E\Xi = AH:HK = AE:EK$. quare $AB:KO = AE^3:EK^3$. sed $KO = \Gamma A$, $EK = \Gamma Z$. quare etiam $AB:\Gamma A = AE^3:\Gamma Z^3$.

Ergo similia solida parallelepipeda triplicatam rationem habent quam latera correspondentia; quod erat demonstrandum.

Corollarium.¹⁾

Hinc manifestum est, si quattuor rectae inter se proportionales sint, esse, ut prima ad quartam, ita

1) Num hoc corollarium genuinum sit, iure ambigi potest.

$KM]$ KM F. 7. $\tau\acute{o}$ $KA]$ KA b. 11. $KO]$ O non liquet, supra scr. Θ m. 1 b. 13. $\eta\pi\epsilon\rho]$ $\tau\acute{o}$ $\pi\rho\acute{\omega}\tau\omicron\nu$ φ . 14. $K\acute{O}]$ O in ras. B. $\tau\rho\iota\pi\lambda\alpha\sigma\acute{o}$ in ras. m. 1 P. 16. $\tau\acute{o}$ $AH]$ $\tau\acute{o}$ $\tau\epsilon$ AH F? (F hoc loco difficilis est lectu). $AH]$ corr. ex AB m. 1 b; H e corr. B m. rec. 18. $KO]$ O in ras. B; supra scr. Θ m. 1 b. 19. $\mu\acute{\epsilon}\nu]$ om. P. $KO]$ O in ras. B. 20. $\sigma\tau\epsilon\rho\epsilon\tilde{\omega}]$ om. b. 21. $\sigma\tau\epsilon\rho\epsilon\delta\acute{o}\nu$ $\acute{\alpha}\rho\alpha$ B. 23. $\alpha\upsilon\tau\omicron\upsilon$ $\pi\lambda\epsilon\nu\rho\acute{\alpha}\nu$ b. 24. $\pi\alpha\rho\alpha\lambda\lambda\eta\lambda\omicron\sigma\epsilon\pi$. V. 25. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$ B. 28 sq. Ex porismate nullum uestigium est in F; in b totum in mg. est m. 1, add. $\omicron\upsilon\tau\omega\varsigma$ $\acute{\epsilon}\nu$ $\acute{\alpha}\lambda\lambda\omega$. 29. Ante $\acute{\alpha}\nu\acute{\alpha}\lambda\omicron\gamma\omicron\nu$ ras. 1 litt. P.

οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης στερεὸν παραλληλεπίπεδον
πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀνα-
γραφόμενον, ἐπέπερ καὶ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην
τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ πρὸς τὴν δευτέραν.

5

λδ'.

Τῶν ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντι-
πεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· καὶ ὧν στε-
ρεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ
βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκείνα.

- 10 Ἔστω ἴσα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ AB , $\Gamma\Delta$.
λέγω, ὅτι τῶν AB , $\Gamma\Delta$ στερεῶν παραλληλεπιπέδων
ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἐστὶν ὥς
ἡ $E\Theta$ βάσις πρὸς τὴν $N\Pi$ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ $\Gamma\Delta$
στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ AB στερεοῦ ὕψος.

- 15 Ἐστῶσαν γὰρ πρότερον αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ AH ,
 EZ , AB , ΘK , ΓM , $N\Xi$, $O\Delta$, ΠP πρὸς ὀρθὰς ταῖς
βάσεσιν αὐτῶν· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὥς ἡ $E\Theta$ βάσις πρὸς
τὴν $N\Pi$ βάσιν, οὕτως ἡ ΓM πρὸς τὴν AH .

- Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ $E\Theta$ βάσις τῇ $N\Pi$ βάσει,
20 ἔστι δὲ καὶ τὸ AB στερεὸν τῷ $\Gamma\Delta$ στερεῷ ἴσον, ἔσται
καὶ ἡ ΓM τῇ AH ἴση. τὰ γὰρ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος
στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστὶν ὥς αἱ βά-

1. οὕτως FVb. παραλληλοεπ. V. 3. ἐπειδήπερ BV.
5. 1 seq. ras. 1 litt. F. 7. ὕψει Vb et seq. ras. 3 litt. φ.
12. ὕψει FVb. 16. AB] A e corr. B. ΘK] corr. ex
 ΘH m. 1 b. ΓM] supra scr. N m. 1 b. 17. βάσει b.
αὐτῶν] om. b. 18. AH] inter A et H 1 litt. eras. P.
20. ἔστιν B. ἔσται] ἔστι Vbφ. 21. τὰ γὰρ — 22. βάσεις]
om. BV; hab. Pb et fuerunt in F, sed nihil relictum est nisi
το υψος στερε, quibus add. φ: -ον τοῖς ὕψει omissis uerbis εἰ
γὰρ — οὐσῶν p. 108, 1.

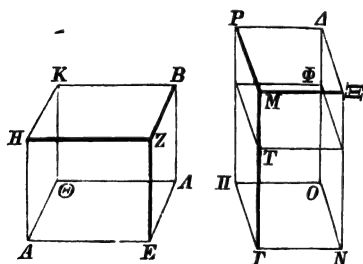
solidum parallelepipedum in prima descriptum ad solidum in secunda simile et similiter descriptum, quoniam etiam prima ad quartam triplicatam habet rationem quam ad secundam.

XXXIV.

Aequalium solidorum parallelepipedorum bases in contraria ratione sunt atque altitudines; et quorum solidorum parallelepipedorum bases in contraria ratione sunt atque altitudines, ea aequalia sunt.

Sint AB , $\Gamma\Delta$ aequalia solida parallelepipeda. dico, solidorum parallelepipedorum AB , $\Gamma\Delta$ bases in contraria ratione esse atque altitudines, et esse, ut $E\Theta$ ad $N\Pi$, ita altitudinem solidi $\Gamma\Delta$ ad altitudinem solidi AB .

Prius enim rectae eminentes AH , EZ , AB , ΘK , ΓM , $N\Xi$, $O\Delta$, ΠP ad bases suas perpendiculares sint. dico, esse $E\Theta : N\Pi = \Gamma M : AH$.



iam si $E\Theta = N\Pi$, et $AB = \Gamma\Delta$, erit etiam $\Gamma M = AH$; nam solida parallelepipeda, quae eandem ha-

σεις [εἰ γὰρ τῶν $E\Theta$, $N\Pi$ βάσεων ἴσων οὐσῶν μὴ εἴη τὰ AH , ΓM ὕψη ἴσα, οὐδ' ἄρα τὸ AB στερεὸν ἴσον ἔσται τῷ $\Gamma\Delta$. ὑπόκειται δὲ ἴσον· οὐκ ἄρα ἄνισόν ἐστι τὸ ΓM ὕψος τῷ AH ὕψει· ἴσον ἄρα]. καὶ ἔσται
 5 ὥς ἡ $E\Theta$ βάσις πρὸς τὴν $N\Pi$, οὕτως ἡ ΓM πρὸς τὴν AH , καὶ φανερόν, ὅτι τῶν AB , $\Gamma\Delta$ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

Μὴ ἔστω δὴ ἴση ἡ $E\Theta$ βάσις τῇ $N\Pi$ βάσει, ἀλλ' ἔστω μείζων ἡ $E\Theta$. ἔστι δὲ καὶ τὸ AB στερεὸν τῷ
 10 $\Gamma\Delta$ στερεῷ ἴσον· μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΓM τῆς AH [εἰ γὰρ μὴ, οὐδ' ἄρα πάλιν τὰ AB , $\Gamma\Delta$ στερεὰ ἴσα ἔσται· ὑπόκειται δὲ ἴσα]. κείσθω οὖν τῇ AH ἴση ἡ ΓT , καὶ συμπεπληρώσθω ἀπὸ βάσεως μὲν τῆς $N\Pi$, ὕψους δὲ τοῦ ΓT , στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ $\Phi\Gamma$.
 15 καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ AB στερεὸν τῷ $\Gamma\Delta$ στερεῷ, ἐξῳθεν δὲ τὸ $\Gamma\Phi$, τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἔστιν ἄρα ὥς τὸ AB στερεὸν πρὸς τὸ $\Gamma\Phi$ στερεόν, οὕτως τὸ $\Gamma\Delta$ στερεὸν πρὸς τὸ $\Gamma\Phi$ στερεόν. ἀλλ' ὥς μὲν τὸ AB στερεὸν πρὸς τὸ $\Gamma\Phi$ στερεόν,
 20 οὕτως ἡ $E\Theta$ βάσις πρὸς τὴν $N\Pi$ βάσιν· ἰσοῦσὴ γὰρ τὰ AB , $\Gamma\Phi$ στερεὰ· ὥς δὲ τὸ $\Gamma\Delta$ στερεὸν πρὸς τὸ $\Gamma\Phi$ στερεόν, οὕτως ἡ $M\Pi$ βάσις πρὸς τὴν $T\Pi$ βάσιν καὶ ἡ ΓM πρὸς τὴν $I'T$ · καὶ ὥς ἄρα ἡ $E\Theta$ βάσις πρὸς τὴν $N\Pi$ βάσιν, οὕτως ἡ $M\Gamma$ πρὸς τὴν ΓT . ἴση
 25 δὲ ἡ ΓT τῇ AH · καὶ ὥς ἄρα ἡ $E\Theta$ βάσις πρὸς τὴν

2. εἴη] ἔστω φ. 3. ἔσται] ἐστὶ b. $\Gamma\Delta$ στερεῷ FV.
 5. $N\Pi$ βάσιν b. 7. ὕψει Vbφ. 10. ἐστὶ] om. V.
 11. πάλιν] supra m. rec. V. 12. ἔσονται P. ὑπόκειται BV.
 $AH]$ H in ras. m. 1 P. 14. $\Gamma T]$ Γ in ras. B.
 παραλληλοεπ. V. $\Phi\Gamma]$ Γ in ras. B. 16. ἐξῳθεν δέ] ἄλλο
 δέ τί ἐστι b, ἄλλο δέ τι V, ἄλλο τι supra scr. δέ m. 2 B.
 $\Phi\Gamma$ Bb, et F, sed corr. Dein add. στερεόν FV. In F uerba

bent altitudinem, inter se eandem rationem habent quam bases [prop. XXXII].¹⁾ et erit

$$E\Theta : N\Pi = \Gamma M : A H,$$

et adparet, solidorum AB , ΓA parallelepipedorum bases in contraria ratione esse atque altitudines.

iam ne sit $E\Theta = N\Pi$, sed $E\Theta > N\Pi$. uerum etiam $AB = \Gamma A$. itaque etiam $\Gamma M > A H$.²⁾

ponatur igitur $\Gamma T = A H$, et in basi $N\Pi$, altitudine autem ΓT expleatur solidum parallelepipedum $\Phi\Gamma$. et quoniam $AB = \Gamma A$, extrinsecus autem adsumptum est $\Gamma\Phi$, et aequalia ad idem eandem rationem habent [V, 7], erit $AB : \Gamma\Phi = \Gamma A : \Gamma\Phi$. uerum $AB : \Gamma\Phi = E\Theta : N\Pi$ [prop. XXXII]; nam solida AB , $\Gamma\Phi$ eandem habent altitudinem. et $\Gamma A : \Gamma\Phi = M\Pi : T\Pi$ [prop. XXV] = $\Gamma M : \Gamma T$ [VI, 1]. quare etiam $E\Theta : N\Pi = M\Gamma : \Gamma T$. sed $\Gamma T = A H$. itaque etiam

1) Ita concludi uoluit Euclides: adparet, solida aequalia eandem rationem habere quam bases et ipsas aequales, nec hoc fieri potest, nisi altitudines et ipsae aequales erunt. et hanc concludendi rationem recte, sed paullo breuius indicauit citata prop. 32. hoc interpreti alicui satis antiquo ansam dedit uerbis $\epsilon\lambda\ \gamma\acute{\alpha}\rho$ — $\iota\sigma\omicron\nu\ \acute{\alpha}\rho\alpha$ lin. 1—4 interpolatis mentem Euclidis uerbose explicandi. quo facto in codd. deterioribus uerba illa genuina $\tau\grave{\alpha}\ \gamma\acute{\alpha}\rho$ — $\beta\acute{\alpha}\sigma\epsilon\iota\varsigma$ p. 106, 21—22 deleta sunt, cum intellexeretur, duplicem causae indicationem per $\gamma\acute{\alpha}\rho$ illatam ferri non posse. illo loco damnato sequitur, uerba simillima $\epsilon\lambda\ \gamma\acute{\alpha}\rho$ — $\iota\sigma\alpha$ p. 108, 11—12 et ipsa esse interpolata. et per se suspectissima sunt, quippe quae causam idoneam eius rei, quam confirmare debeant, minime contineant.

2) Hoc uia indirecta ex prop. 31 demonstrari potest, cum adpareat, solida augeri et basibus et altitudinibus auctis.

$\acute{\alpha}\lambda\lambda\omicron\ \delta\acute{\epsilon}\ \acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\ \tau\omicron\ \Phi\Gamma\ \sigma\tau\epsilon\phi\epsilon\omicron\nu\ \text{mg. m. 1, ut uidetur. 17. } \sigma\tau\epsilon\phi\epsilon\omicron\nu\ \text{om. V. 18. } \omicron\tilde{\upsilon}\tau\omega\ \text{BV, comp. F. 22. } \sigma\tau\epsilon\phi\epsilon\omicron\nu\ \text{ins. m. 2 F. } T\Pi\ \text{mut. in } \Pi T\ \text{V, } \Pi T\ \text{Bb. 23. } M\Gamma\ \text{BFV. 24. } \beta\acute{\alpha}\sigma\iota\nu\ \text{supra m. 2 F. } M\Gamma\ \text{] } N\Gamma\ \text{B.}$

$ΝΠ$ βάσιν, οὕτως ἡ $ΜΓ$ πρὸς τὴν $ΑΗ$. τῶν $ΑΒ$, $ΓΔ$ ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

Πάλιν δὴ τῶν $ΑΒ$, $ΓΔ$ στερεῶν παραλληλεπιπέδων
 5 ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἔστω ὥς
 ἡ $ΕΘ$ βάσις πρὸς τὴν $ΝΠ$ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ $ΓΔ$
 στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ $ΑΒ$ στερεοῦ ὕψος· λέγω,
 ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ $ΑΒ$ στερεὸν τῷ $ΓΔ$ στερεῷ.

Ἔστωσαν [γάρ] πάλιν αἱ ἐφεστηκυῖαι πρὸς ὀρθὰς
 10 ταῖς βάσεσιν. καὶ εἰ μὲν ἴση ἐστὶν ἡ $ΕΘ$ βάσις τῇ
 $ΝΠ$ βάσει, καὶ ἐστὶν ὥς ἡ $ΕΘ$ βάσις πρὸς τὴν $ΝΠ$
 βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ $ΓΔ$ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ
 $ΑΒ$ στερεοῦ ὕψος, ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ τοῦ $ΓΔ$ στε-
 15 ρεοῦ ὕψος τῷ τοῦ $ΑΒ$ στερεοῦ ὕψει. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων
 βάσεων στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος
 ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΒ$ στερεὸν τῷ
 $ΓΔ$ στερεῷ.

Μὴ ἔστω δὴ ἡ $ΕΘ$ βάσις τῇ $ΝΠ$ [βάσει] ἴση, ἀλλ'
 ἔστω μείζων ἡ $ΕΘ$ · μείζον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ τοῦ $ΓΔ$ στερεοῦ
 20 ὕψος τοῦ τοῦ $ΑΒ$ στερεοῦ ὕψους, τουτέστιν ἡ $ΓΜ$
 τῆς $ΑΗ$. κείσθω τῇ $ΑΗ$ ἴση πάλιν ἡ $ΓΤ$, καὶ συμ-
 πεπληρώσθω ὁμοίως τὸ $ΓΦ$ στερεόν. ἐπεὶ ἐστὶν ὥς
 ἡ $ΕΘ$ βάσις πρὸς τὴν $ΝΠ$ βάσιν, οὕτως ἡ $ΜΓ$ πρὸς
 τὴν $ΑΗ$, ἴση δὲ ἡ $ΑΗ$ τῇ $ΓΤ$, ἐστὶν ἄρα ὥς ἡ $ΕΘ$
 25 βάσις πρὸς τὴν $ΝΠ$ βάσιν, οὕτως ἡ $ΓΜ$ πρὸς τὴν
 $ΓΤ$. ἀλλ' ὥς μὲν ἡ $ΕΘ$ [βάσις] πρὸς τὴν $ΝΠ$ βάσιν,
 οὕτως τὸ $ΑΒ$ στερεὸν πρὸς τὸ $ΓΦ$ στερεόν· ἰσοῦψῃ
 γάρ ἐστι τὰ $ΑΒ$, $ΓΦ$ στερεά· ὥς δὲ ἡ $ΓΜ$ πρὸς τὴν

1. $ΓΜ$ b. $ΑΒ$, $ΓΔ$] om. FV. 2. ἄρα] δε F.
 3. ὕψει Vb. 4. $ΓΔ$ ἄρα b. παραλληλεπιπέδων] om. V.

$E\Theta : N\Pi = M\Gamma : AH$. ergo solidorum parallelepipedorum AB , $\Gamma\Delta$ bases in contraria ratione sunt atque altitudines.

Rursus solidorum parallelepipedorum AB , $\Gamma\Delta$ bases in contraria ratione sint atque altitudines, et sit ut $E\Theta$ ad $N\Pi$, ita altitudo solidi $\Gamma\Delta$ ad altitudinem solidi AB . dico, esse $AB = \Gamma\Delta$.

rursus rectae eminentes ad bases perpendiculares sint. et si $E\Theta = N\Pi$, et est ut basis $E\Theta$ ad basim $N\Pi$, ita altitudo solidi $\Gamma\Delta$ ad altitudinem solidi AB , erit altitudo solidi $\Gamma\Delta$ altitudini solidi AB aequalis. uerum solida parallelepipeda in aequalibus basibus collocata et eandem altitudinem habentia inter se aequalia sunt [prop. XXXI]. ergo $AB = \Gamma\Delta$.

iam ne sit $E\Theta = N\Pi$, sed $E\Theta > N\Pi$. itaque etiam altitudo solidi $\Gamma\Delta$ maior est altitudine solidi AB [p. 109 not. 2], hoc est $\Gamma M > AH$. ponatur rursus $\Gamma T = AH$, et similiter expleatur solidum $\Gamma\Phi$. quoniam $E\Theta : N\Pi = M\Gamma : AH$, et est $AH = \Gamma T$, erit $E\Theta : N\Pi = \Gamma M : \Gamma T$. uerum $E\Theta : N\Pi = AB : \Gamma\Phi$ [prop. XXXII]; nam solida AB , $\Gamma\Phi$ eandem altitudi-

5. ἀντιπεπόνθασιν b. ὕψει Vb. 6. βάσιν] om. V.
 $\Gamma\Delta$] in ras. V. 7. AB] in ras. V. λέγω — 8. ἐστὶ] mg. φ.
 9. γὰρ] om. P. 10. βάσεις Vbφ. ἐστὶν] om. Vφ.
 ἢ $E\Theta$ βάσις] mg. φ. 12. τό] (prius) mg. m. 2 P. 13. ἔσον
 ἄρα — 14. ὕψει] om. φ. 13. ἐστὶ] om. V. καὶ] om. b.
 14. δέ] δ' b. 15. βάσεων ὄντα Theon (BFVb). παρ-
 αλληλοεπ. V. 16. ἐστὶ] ἐστὶν P. 18. βάσει] om. BFVb.
 19. μείζον] μείζων F. ἐστὶ] om. V. 21. τῆς] τῇ b.
 22. Ante ἐπεὶ add. καὶ m. 2 V. 23. ΓM b.
 25. ΓM] PB, V m. 2; $M\Gamma$ b, V m. 1, F in mg. m. 2.
 πρὸς — 26. βάσιν] om. F; in mg. quaedam euan. 26. βάσις]
 om. P. 27. οὕτως — πρὸς] φ.

ΓΤ, οὕτως ἢ τε ΜΠ βάσις πρὸς τὴν ΠΤ βάσιν καὶ
τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν. καὶ ὥς ἄρα
τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν, οὕτως τὸ ΓΔ
στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν· ἐκάτερον ἄρα τῶν ΑΒ,
5 ΓΔ πρὸς τὸ ΓΦ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴσον ἄρα
ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Μὴ ἔστωσαν δὲ αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ΖΕ, ΒΛ, ΗΑ,
ΘΚ, ΞΝ, ΔΟ, ΜΓ, ΡΠ πρὸς ὁρθὰς ταῖς βάσεσιν
αὐτῶν, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Ζ, Η, Β, Κ, Ξ, Μ,
10 Δ, Ρ σημείων ἐπὶ τὰ διὰ τῶν ΕΘ, ΝΠ ἐπίπεδα κάθετοι
καὶ συμβαλλέτωσαν τοῖς ἐπιπέδοις κατὰ τὰ Σ, Τ, Υ,
Φ, Χ, Ψ, Ω, ς, καὶ συμπληρώσθω τὰ ΖΦ, ΞΩ
στερεά· λέγω, ὅτι καὶ οὕτως ἴσων ὄντων τῶν ΑΒ, ΓΔ
στερεῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ
15 ἐστὶν ὥς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ
τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος.

Ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ,
ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΒΤ ἐστὶν ἴσον· ἐπὶ τε γὰρ τῆς
αὐτῆς βάσεως εἰσι τῆς ΖΚ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος
20 [ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν].
τὸ δὲ ΓΔ στερεὸν τῷ ΔΨ ἐστὶν ἴσον· ἐπὶ τε γὰρ
πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεως εἰσι τῆς ΡΞ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ
ὕψος [ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐ-
θειῶν]· καὶ τὸ ΒΤ ἄρα στερεὸν τῷ ΔΨ στερεῷ ἴσον
25 ἐστὶν [τῶν δὲ ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων, ὧν
τὰ ὕψη πρὸς ὁρθὰς ἐστὶ ταῖς βάσεσιν αὐτῶν, ἀντι-

2. στερεόν] (alt.) om. B. 6. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] del.
August. 7. μὴ] e corr. m. 2 V. αἱ] (prius) om. FV. ΒΔ]
supra scr. Δ m. 1 b. 8. ΘΚ] supra scr. Α? m. 1 b.
9. Κ] corr. ex Γ V. 10. ἐπεὶ F, et V, sed corr. διὰ] om.
B. ΝΠ βάσεων B. 11. συμβαλλέτωσαν PV. Σ] postea ins.
B; ras. 1 litt. b. 12. ς] renou. m. 2 B. Post ς in fine lin.

nem habent. et $\Gamma M : \Gamma T = M\Pi : \Pi T$ [VI, 1] = $\Gamma\Delta : \Gamma\Phi$ [prop. XXV]. quare etiam $AB : \Gamma\Phi = \Gamma\Delta : \Gamma\Phi$. itaque utrumque AB , $\Gamma\Delta$ ad $\Gamma\Phi$ eandem rationem habet. ergo $AB = \Gamma\Delta$ [V, 9].

Iam rectae eminentes ZE , BA , HA , ΘK , ΞN , ΔO , $M\Gamma$, $P\Pi$ ad bases suas perpendiculares ne sint, et ducantur a punctis Z , H , B , K , Ξ , M , Δ , P ad plana per $E\Theta$, $N\Pi$ ducta perpendiculares, et cum planis in punctis Σ , T , Υ , Φ , X , Ψ , Ω , ς concurrant, et expleantur solida $Z\Phi$, $\Xi\Omega$. dico, sic quoque, si $AB = \Gamma\Delta$, bases in contraria ratione esse atque altitudines, et esse ut $E\Theta$ ad $N\Pi$, ita altitudinem solidi $\Gamma\Delta$ ad altitudinem solidi AB .

quoniam $AB = \Gamma\Delta$, et $AB = BT$ [prop. XXIX—XXX] (nam in eadem basi sunt ZK et eandem habent altitudinem)¹⁾, et $\Gamma\Delta = \Delta\Psi$ [id.] (nam rursus in eadem basi sunt $P\Xi$ et eandem habent altitudinem), erit etiam $BT = \Delta\Psi$. erit igitur²⁾ ut ZK basis ad

1) Rectissime observavit Simsonus p. 402: „inepte excluditur alter casus“. quare cum eo verba $\alpha\lambda\ \alpha\lambda\text{ — } \epsilon\upsilon\theta\epsilon\iota\omega\nu$ lin. 20, 23 — 24, p. 116, 7—8 pro interpolatione imperita habenda sunt.

2) Quae sequuntur verba $\tau\omega\nu\ \delta\acute{\epsilon}\text{ — } \upsilon\psi\epsilon\sigma\iota\nu$ p. 112, 25 — p. 114, 1 et p. 116, 2—4 inepta sunt, quia altitudines semper ad bases perpendiculares sint necesse est, quae est iusta eiusdem Simsoni obiectio. sed $\tau\alpha\ \upsilon\psi\eta$ cum Augusto in $\alpha\lambda\ \epsilon\varphi\epsilon\sigma\tau\acute{\omega}\sigma\alpha\iota$ mutare temerarium est; quare verba illa delenda sunt.

$\kappa\alpha\lambda$, dein mg. m. 2 add. $\sigma\eta\mu\epsilon\iota\alpha$ F; $\varsigma\ \sigma\eta\mu\epsilon\iota\alpha$ V. $\Xi\Omega$] Ω in ras. V. 13. $\delta\tau\iota$] $\delta\eta$ V. 14. $\upsilon\psi\epsilon\sigma\iota$ Vb. 15. $N\Pi$] ΠN in ras. V. 17. Post $\epsilon\pi\epsilon\lambda$ add. $\gamma\acute{\alpha}\rho$ BFb, et supra scr. m. 1, sed deletum V. $\tau\acute{o}$] corr. ex $\tau\omega$ m. 1 V. 18. BT] T in ras. V. 19. $\epsilon\lambda\iota\nu$ P. $\upsilon\pi\acute{o}$] $\epsilon\pi\acute{\iota}$ V. 22. $\epsilon\lambda\iota\alpha$] $\epsilon\sigma\tau\iota$ comp. b. $P\Xi$] ΞP Bb. $\upsilon\pi\acute{o}$] $\epsilon\pi\acute{\iota}$ V. 24. Post $\tau\acute{o}$ del. $\tau\omega\upsilon$ F. BT] B e corr. V. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$ $\iota\sigma\sigma\omega\nu$ V. 25. $\tau\omega\nu$] corr. ex $\alpha\lambda$ m. 2 F; $\alpha\lambda$ V. $\alpha\lambda$] om. V. 26. $\epsilon\sigma\tau\iota$] $\epsilon\lambda\iota\alpha$ b.

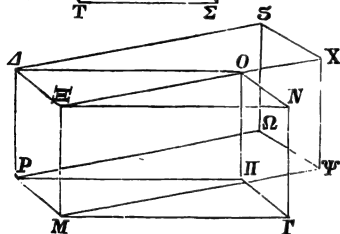
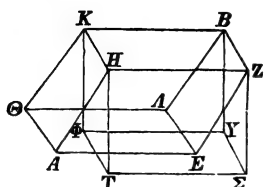
πεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν]. ἔστιν ἄρα ὥς ἡ
 ΖΚ βάσις πρὸς τὴν ΞΡ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΔΨ
 στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΤ στερεοῦ ὕψος. ἴση δὲ
 ἡ μὲν ΖΚ βάσις τῇ ΕΘ βάσει, ἡ δὲ ΞΡ βάσις τῇ
 5 ΝΠ βάσει· ἔστιν ἄρα ὥς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ
 βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΔΨ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ
 ΒΤ στερεοῦ ὕψος. τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν ΔΨ,
 ΒΤ στερεῶν καὶ τῶν ΔΓ, ΒΑ· ἔστιν ἄρα ὥς ἡ ΕΘ
 βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΔΓ στερεοῦ
 10 ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος. τῶν ΑΒ, ΓΔ
 ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ
 βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

Πάλιν δὴ τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων
 ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἔστω ὥς
 15 ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ
 στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος· λέγω,
 ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἔστιν ὥς
 ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ
 20 στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος, ἴση δὲ
 ἡ μὲν ΕΘ βάσις τῇ ΖΚ βάσει, ἡ δὲ ΝΠ τῇ ΞΡ,
 ἔστιν ἄρα ὥς ἡ ΖΚ βάσις πρὸς τὴν ΞΡ βάσιν, οὕτως
 τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ
 ὕψος. τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν
 25 καὶ τῶν ΒΤ, ΔΨ· ἔστιν ἄρα ὥς ἡ ΖΚ βάσις πρὸς
 τὴν ΞΡ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΔΨ στερεοῦ ὕψος πρὸς
 τὸ τοῦ ΒΤ στερεοῦ ὕψος. τῶν ΒΤ, ΔΨ ἄρα στε-

2. τὴν ΞΡ] corr. ex τη ΝΞΡ V. 3. ΒΤ] T e corr. V.
 4. ΕΘ] e corr. V. 5. βάσει ἐστὶν ἴση V. τῇ ΝΠ
 βάσει b. 7. στερεοῦ] om. B. 10. ΓΔ] in ras. P.
 11. στερεῶν ἄρα B. 12. ὕψεσι V b φ. 14. ὕψεσι F V b.

basim ΞP , ita altitudo solidi $\Delta \Psi$ ad altitudinem solidi BT [p. 110, 1 sq.]. uerum $ZK = E\Theta$, $\Xi P = N\Pi$.



erit igitur ut $E\Theta$ basis ad basim $N\Pi$, ita altitudo solidi $\Delta \Psi$ ad altitudinem solidi BT . sed solidorum $\Delta \Psi$, BT et $\Delta \Gamma$, BA eadem est altitudo. quare erit ut basis $E\Theta$ ad basim $N\Pi$, ita altitudo solidi $\Delta \Gamma$ ad altitudinem solidi AB . ergo solidorum AB , $\Gamma \Delta$ parallelepipedorum bases in con-

traria ratione sunt atque altitudines.

Iam rursus solidorum parallelepipedorum AB , $\Gamma \Delta$ bases in contraria ratione sint atque altitudines, et sit ut $E\Theta$ basis ad basim $N\Pi$, ita altitudo solidi $\Gamma \Delta$ ad altitudinem solidi AB . dico, esse $AB = \Gamma \Delta$.

iisdem enim comparatis, quoniam est ut basis $E\Theta$ ad $N\Pi$ basim, ita altitudo solidi $\Gamma \Delta$ ad altitudinem solidi AB , et $E\Theta = ZK$, $N\Pi = \Xi P$, erit ut basis ZK ad ΞP basim, ita altitudo solidi $\Gamma \Delta$ ad altitudinem solidi AB . sed solidorum AB , $\Gamma \Delta$ et BT , $\Delta \Psi$ eadem est altitudo. erit igitur ut ZK basis ad basim ΞP , ita altitudo solidi $\Delta \Psi$ ad altitudinem solidi BT . itaque solidorum parallelepipedorum BT , $\Delta \Psi$ bases

17. $\iota\sigma\upsilon\nu$] om. V φ . $\iota\sigma\upsilon\nu \tau\omega$ V φ . 19. $\Gamma \Delta$] bis φ .
23. AB] BA FV. 27. BT] (alt.) T in ras. V.

ρεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν [ὧν δὲ στερεῶν παραλληλεπιπέδων τὰ ὕψη πρὸς ὀρθάς ἐστι ταῖς βάσεσιν αὐτῶν, ἀντιπεπόνθασιν δὲ αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα]. ἴσον ἄρα
 5 ἐστὶ τὸ BT στερεὸν τῷ $\Delta\Psi$ στερεῷ. ἀλλὰ τὸ μὲν BT τῷ BA ἴσον ἐστίν· ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως [εἰσι] τῆς ZK καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος [ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν]. τὸ δὲ $\Delta\Psi$ στερεὸν τῷ $\Delta\Gamma$ στερεῷ ἴσον ἐστίν [ἐπὶ τε γὰρ πάλιν
 10 τῆς αὐτῆς βάσεως εἰσι τῆς ΞP καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ οὐκ ἐν ταῖς αὐταῖς εὐθείαις]. καὶ τὸ AB ἄρα στερεὸν τῷ $\Gamma\Delta$ στερεῷ ἐστὶν ἴσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λε'.

Ἐὰν ὧσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι ἴσαι, ἐπὶ δὲ
 15 τῶν κορυφῶν αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἐπι-
 σταθῶσιν ἴσας γωνίας περιέχουσιν μετὰ τῶν
 ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἐπὶ δὲ
 τῶν μετεώρων ληφθῇ τυχόντα σημεῖα, καὶ ἀπ'
 αὐτῶν ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, ἐν οἷς εἰσὶν αἱ ἐξ ἀρ-
 20 χῆς γωνίαι, κάθεται ἄχθῶσιν, ἀπὸ δὲ τῶν γε-
 νομένων σημείων ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ἐπὶ τὰς ἐξ
 ἀρχῆς γωνίας ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἴσας γωνίας
 περιέξουσιν μετὰ τῶν μετεώρων.

Ἔστωσαν δύο γωνίαι εὐθύγραμμοι ἴσαι αἱ ὑπὸ
 25 $BA\Gamma$, $E\Delta Z$, ἀπὸ δὲ τῶν A , Δ σημείων μετέωροι
 εὐθεῖαι ἐφεστάτωσαν αἱ AH , ΔM ἴσας γωνίας περι-
 έχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ,

2. τὰ ὕψη] αἱ ἐφεστηκυῖαι August. 3. ἐστι] φ, comp.
 b, ἐστὶν P, εἰσι BV. ἀντιπεπόνθασιν PV. 4. δέ] supra

in contraria ratione sunt atque altitudines. quare $BT = \angle \Psi$ [p. 112, 5 sq.]. sed $BT = BA$ [prop. XXIX—XXX]; nam in eadem basi sunt ZK et eandem habent altitudinem; et $\angle \Psi = \angle \Gamma$ [id.].¹⁾ ergo $AB = \Gamma A$; quod erat demonstrandum.

XXXV.

Si datis duobus angulis planis aequalibus in uerticibus eorum rectae sublimes eriguntur angulos singulos singulis aequales cum iis, quae a principio erant, comprehendentes, et in erectis puncta quaeuis sumuntur, et ab iis ad plana, in quibus sunt anguli illi, perpendiculares ducuntur, et a punctis, quae in planis oriuntur, ad angulos²⁾ a principio datos rectae ducuntur, hae cum erectis aequales angulos comprehendunt.

Duo anguli rectilinei sint $BA\Gamma$, $E\Delta Z$, et a punctis A , Δ rectae AH , ΔM sublimes erigantur angulos singulos singulis aequales cum iis, quae a principio

1) Uerba ἐπὶ τῇ — εὐθεταῖς lin. 9—11 subditiua existimo.

2) H. e. ad uertices eorum.

scr. m. 2 V. 6. BA] AB P. 7. $\epsilon\lambda\sigma\iota$] om. P. 9. $\tau\tilde{\omega}$
 $\Delta\Gamma$ — 10. $\beta\acute{\alpha}\sigma\epsilon\omega\varsigma$] F, praecedentibus iisdem uerbis a manu φ .
 9. $\Gamma\Delta$ b. $\tau\eta\varsigma\ \alpha\upsilon\tau\eta\varsigma\ \pi\acute{\alpha}\lambda\iota\nu$ V et φ (non F). 10. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$
 comp. b. $P\tilde{\omega}$ b. 11. $\acute{\alpha}\rho\alpha$] om. V, ins. m. 2 F.
 12. $\Delta\Gamma$ B. 13. $\lambda\epsilon'$] non liquet in F. 14. $\acute{\omega}\sigma\iota\nu$ PB.
 Post ἐπὶ del. $\pi\acute{\epsilon}\delta\omega$ m. 1 P. 17. $\acute{\epsilon}\kappa\alpha\tau\acute{\epsilon}\rho\alpha\nu$] -αν in ras. B.
 19. $\acute{\epsilon}\pi\iota\ \tau\acute{\alpha}$] om. F. $\epsilon\lambda\sigma\iota$ b. 21. $\acute{\epsilon}\nu$] ὑπὸ τῶν καθέτων
 ἐν Theon (BFVb). 23. $\mu\epsilon\tau\epsilon\omega\rho\sigma\tau\acute{\epsilon}\rho\omega\nu$ V φ . 26. AH] H
 in ras. B. ΔH , AM F.

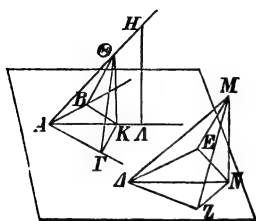
τὴν μὲν ὑπὸ $M\Delta E$ τῇ ὑπὸ HAB , τὴν δὲ ὑπὸ $M\Delta Z$
 τῇ ὑπὸ $H\Lambda\Gamma$, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῶν AH , ΔM τυ-
 χόντα σημεῖα τὰ H , M , καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν H , M
 σημείων ἐπὶ τὰ διὰ τῶν $B\Lambda\Gamma$, $E\Delta Z$ ἐπίπεδα κάθετοι
 5 αἱ HA , MN , καὶ συμβαλλέτωσαν τοῖς ἐπιπέδοις κατὰ
 τὰ N , Δ , καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ AA , $N\Delta$. λέγω, ὅτι
 ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ HAA γωνία τῇ ὑπὸ $M\Delta N$ γωνία.

Κεῖσθω τῇ ΔM ἴση ἡ $A\Theta$, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Θ
 σημείου τῇ HA παράλληλος ἡ ΘK . ἡ δὲ HA κάθετός
 10 ἐστὶν ἐπὶ τὸ διὰ τῶν $B\Lambda\Gamma$ ἐπίπεδον· καὶ ἡ ΘK ἄρα
 κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ διὰ τῶν $B\Lambda\Gamma$ ἐπίπεδον. ἤχθω-
 σαν ἀπὸ τῶν K , N σημείων ἐπὶ τὰς AB , $\Lambda\Gamma$, ΔZ ,
 ΔE εὐθείας κάθετοι αἱ $K\Gamma$, NZ , KB , NE , καὶ
 ἐπεξεύχθωσαν αἱ $\Theta\Gamma$, ΓB , MZ , ZE . ἐπεὶ το ἀπὸ
 15 τῆς ΘA ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘK , KA , τῷ δὲ ἀπὸ
 τῆς KA ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν $K\Gamma$, ΓA , καὶ τὸ ἀπὸ
 τῆς ΘA ἄρα ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘK , $K\Gamma$, ΓA .
 τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΘK , $K\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $\Theta\Gamma$.
 τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΘA ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $\Theta\Gamma$, ΓA .
 20 ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $\Theta\Gamma A$ γωνία. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ
 καὶ ἡ ὑπὸ ΔZM γωνία ὀρθὴ ἐστὶν. ἴση ἄρα ἐστὶν
 ἡ ὑπὸ $A\Gamma\Theta$ γωνία τῇ ὑπὸ ΔZM . ἐστὶ δὲ καὶ ἡ
 ὑπὸ $\Theta A\Gamma$ τῇ ὑπὸ $M\Delta Z$ ἴση. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι
 τὰ $M\Delta Z$, $\Theta A\Gamma$ δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα
 25 ἑκατέραν ἑκατέρα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην
 τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν τὴν
 ΘA τῇ $M\Delta$ καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς

2. AH] HA V. 4. σημείων] om. V. $B\Lambda\Gamma$] B in ras. B.

5. συμβαλλέτωσαν V et supra scr. 1 m. 1 P. 6. N , Δ] supra Δ
 quaedam euan. F m. 2, ras. V. καί] σημεία καὶ V. 7. ἴση
 ἐστίν] ins. m. 1 F, om. V. γωνία τῇ ὑπὸ $M\Delta N$] in mg. trans-

erant, comprehendentes, $\angle MAE = HAB$, $\angle MAZ = HAF$, et in AH , ΔM puncta quaevis sumantur H , M , et a punctis H , M ad plana per BAG , $E\Delta Z$ ducta perpendiculares ducantur HA , MN , et cum planis in N , Δ concurrant, et ducantur AA , NA . dico, esse



$$\angle HAA = M\Delta N.$$

ponatur $A\Theta = \Delta M$, et per Θ punctum rectae HA parallela ducatur ΘK . HA autem ad planum per BAG ductum perpendicularis est; itaque etiam ΘK ad planum per BAG ductum perpendicularis est [prop. VIII]. a punctis K , N ad AB , AG , ΔZ , ΔE rectas perpendiculares ducantur $K\Gamma$, NZ , KB , NE , et ducantur $\Theta\Gamma$, ΓB , MZ , ZE . quoniam $\Theta A^2 = \Theta K^2 + KA^2$ et $KA^2 = K\Gamma^2 + \Gamma A^2$ [I, 47], erit etiam $\Theta A^2 = \Theta K^2 + K\Gamma^2 + \Gamma A^2$. uerum $\Theta\Gamma^2 = \Theta K^2 + K\Gamma^2$ [id.]. quare $\Theta A^2 = \Theta\Gamma^2 + \Gamma A^2$. itaque $\angle \Theta\Gamma A$ rectus est [I, 48]. eadem de causa etiam $\angle \Delta ZM$ rectus est. itaque $\angle A\Gamma\Theta = \Delta ZM$. sed etiam $\angle \Theta A\Gamma = M\Delta Z$. itaque duo trianguli sunt $M\Delta Z$, $\Theta A\Gamma$ duos angulos duobus angulis singulos singulis aequales habentes et unum latus uni lateri aequale, quae sub altero angulorum aequalium subtendunt, $\Theta A = M\Delta$. itaque etiam reliqua latera reliquis late-

eunt F. $\gamma\omega\nu\lambda\alpha \text{ ἴση ἐστὶ V. } M\Delta N] \Delta \text{ e corr. V. } \gamma\omega\nu\lambda\alpha]$
om. V. 8. $\kappa\alpha\iota \kappa\epsilon\iota\sigma\theta\omega$ B, $\kappa\epsilon\iota\sigma\theta\omega \gamma\acute{\alpha}\rho$ FV. 12. $A\Gamma]$ A e corr.
V. 13. $NE]$ E in ras. m. 1 P. 14. $\kappa\alpha\iota \acute{\epsilon}\pi\epsilon\iota$ Bb. 15. $KA]$
 K corr. ex A m. 1 b. 16. $\tau\tilde{\omega}\nu]$ $\tau\tilde{\eta}\varsigma$ b. 20. $\Theta\Gamma A]$ ΓA in ras.
B. 21. $\Delta ZM]$ ZM in ras. B. 22. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ PB. 23. $\delta\eta]$ supra
m. 1 V. 24. $\delta\upsilon\sigma\iota \gamma\omega\nu\lambda\alpha\iota\varsigma]$ om. P. 27. ΔM B.

πλευραῖς ἴσας ἔξει ἑκατέραν ἑκατέρα. ἴση ἄρα ἐστὶν
 ἡ $ΑΓ$ τῇ $ΔΖ$. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ $ΑΒ$
 τῇ $ΔΕ$ ἐστὶν ἴση [οὕτως· ἐπεξεύχθωσαν αἱ $ΘΒ$,
 $ΜΕ$. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΘ$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ
 5 τῶν $ΑΚ$, $ΚΘ$, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς $ΑΚ$ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ
 τῶν $ΑΒ$, $ΒΚ$, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $ΑΒ$, $ΒΚ$, $ΚΘ$ ἴσα
 ἐστὶ τῷ ἀπὸ $ΑΘ$. ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΒΚ$, $ΚΘ$ ἴσον
 ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΘ$. ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ $ΘΚΒ$ γωνία
 διὰ τὸ καὶ τὴν $ΘΚ$ κάθετον εἶναι ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον
 10 ἐπίπεδον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $ΑΘ$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν
 $ΑΒ$, $ΒΘ$. ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΑΒΘ$ γωνία. διὰ
 τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $ΔΕΜ$ γωνία ὀρθὴ ἐστὶν.
 ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $ΒΑΘ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΕΔΜ$ ἴση·
 ὑπόκεινται γάρ· καὶ ἐστὶν ἡ $ΑΘ$ τῇ $ΔΜ$ ἴση· ἴση
 15 ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $ΑΒ$ τῇ $ΔΕ$]. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ
 μὲν $ΑΓ$ τῇ $ΔΖ$, ἡ δὲ $ΑΒ$ τῇ $ΔΕ$, δύο δὲ αἱ $ΓΑ$,
 $ΑΒ$ δυσὶ ταῖς $ΖΔ$, $ΔΕ$ ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ καὶ γωνία
 ἡ ὑπὸ $ΓΑΒ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΖΔΕ$ ἐστὶν ἴση· βάσις
 ἄρα ἡ $ΒΓ$ βάσει τῇ $ΕΖ$ ἴση ἐστὶ καὶ τὸ τρίγωνον
 20 τῷ τριγώνῳ καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις·
 ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ $ΑΓΒ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΔΖΕ$. ἔστι δὲ
 καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ $ΑΓΚ$ ὀρθὴ τῇ ὑπὸ $ΔΖΝ$ ἴση· καὶ
 λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $ΒΓΚ$ λοιπὴ τῇ ὑπὸ $ΕΖΝ$ ἐστὶν
 ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $ΓΒΚ$ τῇ ὑπὸ $ΖΕΝ$
 25 ἐστὶν ἴση. δύο δὲ τρίγωνά ἐστι τὰ $ΒΓΚ$, $ΕΖΝ$
 [τὰς] δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν
 ἑκατέρα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς
 ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν $ΒΓ$ τῇ $ΕΖ$ · καὶ τὰς λοιπὰς

1. ἴση] ἴσην P, corr. m. 1. 3. ἴση] om. B. 4. τοῖς] τό
 P. 7. τῆς $ΑΘ$ V. 8. γὰρ] in ras. m. 1 P. 9. εἶναι] om.

ribus aequalia habebunt singula singulis [I, 26]. itaque $AG = AZ$. iam eodem modo demonstrabimus, esse $AB = AE$.¹⁾ iam quoniam $AG = AZ$, $AB = AE$, duae rectae GA , AB duabus ZA , AE aequales sunt. sed etiam $\angle GAB = \angle ZAE$. quare etiam $BF = EZ$, et triangulus triangulo aequalis et reliqui anguli reliquis angulis [I, 4]. itaque $\angle AGB = \angle ZE$. uerum etiam $\angle AGK = \angle ZN$, quia recti sunt. ergo etiam $\angle BFK = \angle EN$. eadem de causa etiam $\angle GBK = \angle EN$. quare duo trianguli sunt BFK , EN duos angulos duobus angulis singulos singulis aequales habentes et unum latus uni aequale, quod ad angulos aequales positum est, $BF = EZ$. itaque etiam reliqua

1) Sequentia p. 120, 3–15, quae post ὁμοίως lin. 2 prorsus inutilia sunt et inusitata, rectissime interpolatori tribuerunt Simsonus et August; om. Campanus.

φ. 10. τῆς] corr. ex τῶν m. 1 b. 11. AB] B corr. ex Θ V. Post BΘ ras. 1 litt. b. ἐστίν] corr. ex ἐστί m. 1 P. 13. ἐστίν B. EAM] E supra scr., post A ras. 1 litt. V. 14. γὰρ ἴσαι FV. 15. ἐστί] om. P. 17. δυοί] δύο P. AZ BV bφ. ἀλλὰ] ἐκατέρω ἐκατέρω Vφ. 18. ZAE] Z et E in ras. V, Z' A' E b. ἐστίν] om. Vφ. 19. ἐστίν P. καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ] mg. V. 21. ἴση] ἴη b. AZE] corr. ex EZA m. 1 b. ἐστίν B. 22. AZN] N in ras. m. 1 B; pro N in b est E, supra scr. M m. 1. καί] om. Vφ. 23. EN] ante N ras. 1 litt. V; N corr. ex H b. ἴση ἐστίν P. 25. ENZ V. 26. τάς] deleo. γωνίαις] γωνίας P. ἔχοντας PVφ; in P σ del. m. 2. 28. ἴσαις] supra scr. m. 2 B.

ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΓK τῇ ZN . ἔστι δὲ καὶ ἡ $ΑΓ$ τῇ ΔZ ἴση· δύο δὴ αἱ $ΑΓ$, ΓK δυοὶ ταῖς ΔZ , ZN ἴσαι εἰσὶν· καὶ ὀρθὰς γωνίας περιέχουσιν. βάσις ἄρα ἡ
 5 AK βάσει τῇ ΔN ἴση ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $A\Theta$ τῇ ΔM , ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $A\Theta$ τῷ ἀπὸ τῆς ΔM . ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς $A\Theta$ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AK , $K\Theta$ · ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ $AK\Theta$ · τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΔM ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΔN , NM · ὀρθὴ γὰρ
 10 ἡ ὑπὸ ΔNM · τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AK , $K\Theta$ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΔN , NM , ὧν τὸ ἀπὸ τῆς AK ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔN · λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $K\Theta$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς NM · ἴση ἄρα ἡ ΘK τῇ MN . καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΘA , AK δυοὶ ταῖς $M\Delta$, ΔN ἴσαι
 15 εἰσὶν ἑκατέρω καὶ ἑκατέρω, καὶ βάσις ἡ ΘK βάσει τῇ MN ἐδείχθη ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΘAK γωνία τῇ ὑπὸ $M\Delta N$ ἐστὶν ἴση.

Ἐὰν ἄρα ὅσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι ἴσαι καὶ τὰ ἐξῆς τῆς προτάσεως [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

20

Πόρισμα.

Ἐκ δὲ τούτου φανερόν, ὅτι, ἐὰν ὅσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι ἴσαι, ἐπισταθῶσι δὲ ἐπ' αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἴσαι ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέρω καὶ ἑκατέρω, αἱ ἀπ' αὐτῶν κάθετοι
 25 ἀγόμεναι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, ἐν οἷς εἰσιν αἱ ἐξ ἀρχῆς γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

1. ἔξουσιν V; dein 1 linea eras. 2. ZN] corr. ex ZM B. ἔστιν B. 3. εἰσὶν ἴσαι V. 4. εἰσί P, comp. Fb. περιέχουσιν Vb. 5. ἐστὶ V, comp. Fb. 7. ἴσα] post ι del. α m. 2 P. 8. $AK\Theta$] $K\Theta$ e corr. V. 9. ΔN] N corr. ex M Bb. 10. $\Delta M''N'$ b. 11. ΔM B, sed corr.; item lin. 14. 12. τῷ

latera reliquis aequalia habebunt [I, 26]. ergo $\Gamma K = ZN$. sed etiam $A\Gamma = AZ$. ergo duae rectae $A\Gamma$, ΓK duabus AZ , ZN aequales sunt; et rectos angulos comprehendunt. itaque $AK = AN$. et quoniam $A\Theta = AM$, erit etiam $A\Theta^2 = AM^2$. uerum $A\Theta^2 = AK^2 + K\Theta^2$; nam $\angle AK\Theta$ rectus est [I, 47]; et $AM^2 = AN^2 + NM^2$; nam $\angle ANM$ rectus est [id.]. itaque $AK^2 + K\Theta^2 = AN^2 + NM^2$; quorum $AK^2 = AN^2$. itaque $K\Theta^2 = NM^2$ et $K\Theta = NM$. et quoniam duo latera ΘA , AK duobus MA , AN singula singulis aequalia sunt, et basim ΘK basi MN aequalem esse demonstrauius, erit $\angle \Theta AK = MAN$ [I, 8].

Ergo si datis duobus angulis planis aequalibus, cetera, ut in propositione.

Corollarium.

Hinc manifestum est, si datis duobus angulis planis aequalibus in iis aequales rectae sublimes eriguntur angulos singulos singulis aequales cum rectis a principio datis comprehendentes, rectae ab iis ad ea plana perpendiculares ductae, in quibus sunt anguli ab initio dati, inter se aequales sunt.¹⁾ — quod erat demonstrandum.

1) Nam demonstratum est (lin. 13), esse $K\Theta = NM$.

$\alpha\pi\omicron$ — 13. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$] mg. m. 2B. 12. $\tau\eta\varsigma$] (prius) om. P.
13. $\tau\omega$] corr. ex $\tau\omicron\upsilon$ V. ΘK] e corr. V. 14. $\delta\upsilon\omicron$] $\alpha\iota$ $\delta\upsilon\omicron$
b. 17. $M\Delta N \acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$] in ras. m. 1 P. 18. $\acute{\omega}\sigma\iota\nu$ F.
 $\acute{\iota}\sigma\alpha\iota \acute{\epsilon}\pi\acute{\iota}\pi\epsilon\delta\omicron\iota$ P. 19. $\tau\eta\varsigma \pi\rho\omicron\tau\acute{\alpha}\sigma\epsilon\omega\varsigma$] P; om. BFVb.
20. $\pi\acute{o}\rho\iota\sigma\mu\alpha$] mg. m. 2 FV. 22. $\acute{\iota}\sigma\alpha\iota$] $\epsilon\upsilon\theta\upsilon\gamma\gamma\rho\alpha\mu\mu\omicron\iota \acute{\iota}\sigma\alpha\iota$
Theon (B FVb). $\acute{\epsilon}\pi\iota\sigma\tau\alpha\theta\acute{\omega}\sigma\iota\nu$ PBF. $\alpha\upsilon\tau\acute{\alpha}\varsigma$ P. 23. $\acute{\iota}\sigma\alpha\iota$
om. b. 26. $\acute{\omicron}\pi\epsilon\rho \acute{\epsilon}\delta\epsilon\iota \delta\epsilon\acute{\iota}\xi\alpha\iota$] P; om. Theon (BFVb).

λς'.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσιν, τὸ ἐκ τῶν
 τριῶν στερεῖν παραλληλεπίπεδον ἴσον ἐστὶ τῷ
 ἀπὸ τῆς μέσης στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ἴσο-
 5 πλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.

Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ *A*, *B*, *Γ*, ὥς
 ἢ *A* πρὸς τὴν *B*, οὕτως ἢ *B* πρὸς τὴν *Γ*. λέγω, ὅτι
 τὸ ἐκ τῶν *A*, *B*, *Γ* στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς *B*
 στερεῷ ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.

- 10 Ἐκκείσθω στερεὰ γωνία ἢ πρὸς τῷ *E* περιεχομένη
 ὑπὸ τῶν ὑπὸ *ΔΕΗ*, *ΗΕΖ*, *ΖΕΔ*, καὶ κείσθω τῇ
 μὲν *B* ἴση ἐκάστη τῶν *ΔΕ*, *ΗΕ*, *ΕΖ*, καὶ συμπλη-
 ρώσθω τὸ *EK* στερεὸν παραλληλεπίπεδον, τῇ δὲ *A*
 ἴση ἢ *ΑΜ*, καὶ συνεστιάτω πρὸς τῇ *ΑΜ* εὐθείᾳ καὶ
 15 τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ *Α* τῇ πρὸς τῷ *E* στερεᾷ
 γωνία ἴση στερεὰ γωνία ἢ περιεχομένη ὑπὸ τῶν *ΝΑΞ*,
ΞΑΜ, *ΜΑΝ*, καὶ κείσθω τῇ μὲν *B* ἴση ἢ *ΔΞ*, τῇ
 δὲ *Γ* ἴση ἢ *ΑΝ*. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὥς ἢ *A* πρὸς τὴν
B, οὕτως ἢ *B* πρὸς τὴν *Γ*, ἴση δὲ ἢ μὲν *A* τῇ *ΑΜ*,
 20 ἢ δὲ *B* ἐκατέρᾳ τῶν *ΑΞ*, *ΕΔ*, ἢ δὲ *Γ* τῇ *ΑΝ*, ἔστιν

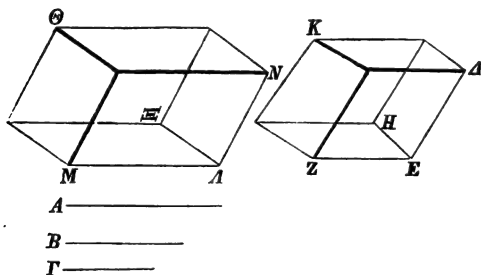
1. λς'] non liquet in F. Hinc usque ad finem libri XII
 b tanto opere discrepat, ut scriptura eius integra in appen-
 dicem reiicienda fuerit. 2. ᾧσι V. 3. στερεῶν F; -ον in
 ras. V. ἐστίν V, sed corr. 4. στερεῷ] om. V. 8. τό] postea
 ins. m. 1 P. ἐκ] ἀπό B, ὑπό FV. Post Γ supra add.
 περιεχόμενον F. στερεόν] -όν in ras. V. 10. τῷ] corr. ex
 τό V. 11. Post prius ὑπό add. τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων m.
 rec. FV; ὑπὸ τριῶν γ. ἐ. mg. m. 2 B; in textu ὑπό del. m. 2.
 ὑπό] (alt.) om. BFV. 12. ΗΕ] ΕΗ P. ΕΖ] corr. ex
 ΖΕ V. 14. ἴση κείσθω B. 16. στερεὰ γωνία] P; om. Theon
 (BFV). 17. ΜΑΝ] M e corr. V. 18. Post ΑΝ add. καὶ συμ-
 πεληρώσθω τὸ ΑΘ στερεόν FV, in V punctis del.; Θ e corr.
 V. 20. ἐκατέρᾳ] P; ἐκάστη Theon (BFV). ΑΞ] ΑΞ, ΕΖ,
 ΕΗ Theon (BFV). ΕΔ] corr. ex ΕΗ V. Ante Γ ras. 1 litt. B.

XXXVI.

Si tres rectae proportionales sunt, solidum parallelepipedum ex tribus illis constructum aequale est solido parallelepipedo ex media constructo, quod aequilaterum est et priori aequiangulum.

Tres rectae proportionales sint A, B, Γ , ita ut sit $A : B = B : \Gamma$. dico, solidum ex A, B, Γ constructum aequale esse solido ex B constructo, quod aequilaterum est et priori aequiangulum.

ponatur angulus solidus ad E angulis $\angle EH, HEZ, ZE\Delta$ comprehensus, et ponatur $\angle E = HE = EZ = B$, et expleatur solidum parallelepipedum EK , ponatur¹⁾



autem $AM = A$, et ad rectam AM et punctum eius A angulo solido, qui ad E positus est, aequalis angulus solidus construatur angulis $\angle NA\Xi, \Xi AM, MAN$ comprehensus [prop. XXIII, cfr. prop. XXI], et ponatur $\angle \Xi = B$, $\angle N = \Gamma$. et quoniam est $A : B = B : \Gamma$ et $A = AM$, $B = \angle \Xi = \angle E\Delta^2)$, $\Gamma = \angle N$,

1) Intellegitur $\kappa\epsilon\iota\sigma\theta\omega$ ex lin. 11; sed fortasse uerba $\kappa\alpha\iota$ — $\pi\alpha\rho\alpha\lambda\lambda\eta\lambda\epsilon\pi\acute{\iota}\pi\epsilon\delta\omega$ lin. 12–13 interpolata sunt. cfr. lin. 18.

2) Propter sequentia expectaueris $B = EZ = \angle E$.

- ἄρα ὡς ἡ AM πρὸς τὴν EZ , οὕτως ἡ AE πρὸς τὴν AN . καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ NAM , AEZ αἱ πλευραὶ ἀντιπεπόνθασιν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ MN παραλληλόγραμμον τῷ AZ παραλληλογράμμῳ. καὶ
- 5 ἐπεὶ δύο γωνίαι ἐπίπεδοι εὐθύγραμμοι ἴσαι εἰσὶν αἱ ὑπὸ AEZ , NAM , καὶ ἐπ' αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἐφεστᾶσιν αἱ $AΞ$, EH ἴσαι τε ἀλλήλαις καὶ ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρα, αἱ ἄρα ἀπὸ τῶν H , $Ξ$ σημείων κἀθετοὶ ἀγόμεναι ἐπὶ τὰ διὰ τῶν NAM , AEZ ἐπίπεδα ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν· ὥστε τὰ $AΘ$, EK στερεὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἐστίν. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΘΑ$ στερεὸν τῷ EK στερεῷ. καὶ
- 10 ἐστὶ τὸ μὲν $AΘ$ τὸ ἐκ τῶν A , B , $Γ$ στερεόν, τὸ δὲ EK τὸ ἀπὸ τῆς B στερεόν· τὸ ἄρα ἐκ τῶν A , B , $Γ$ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς B στερεῷ ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

20

λξ'.

- Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσιν, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλογον ἔσται· καὶ ἐὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν στερεὰ παραλληλεπίπεδα
- 25 ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλογον ᾧ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

2. AN] NA P. 6. καὶ αἱ B. εὐθεῖαι] om. FV. 8. ἑκατέραν] supra F. 10. ἴσα V, sed corr. 11. AO P. 12. ἐστὶ PBV, comp. F. 13. ὑπό] corr. ex ἐπὶ m. 2 B. ἐστίν· ἴσον ἄρα] om. φ. 14. ἐστὶ] ἐστίν P. OA P. 15. AO P.

erit $AM: EZ = \angle E: AN$. et latera aequales angulos NAM , $\angle EZ$ comprehendunt in contraria ratione sunt.¹⁾ itaque $MN = \angle Z$ [VI, 14]. et quoniam duo anguli plani rectilinei aequales sunt $\angle EZ$, NAM , et in iis sublimes erectae sunt rectae $A\Xi$, EH , quae et inter se aequales sunt et angulos singulos singulis aequales cum rectis a principio datis comprehendunt, rectae a punctis H , Ξ ad plana per NAM , $\angle EZ$ ducta perpendiculares ductae inter se aequales sunt [prop. XXXV coroll.]; quare solida $A\Theta$, EK eandem altitudinem habent. solida autem parallelepipeda, quae in aequalibus basibus sunt posita et eandem altitudinem habent, inter se aequalia sunt [prop. XXXI]. itaque $\Theta A = EK$. et $A\Theta$ solidum est ex A , B , Γ constructum, EK autem solidum ex B constructum. ergo solidum parallelepipedum ex A , B , Γ constructum aequale est solido ex B constructo, quod aequilaterum est et priori aequiangulum; quod erat demonstrandum.

XXXVII.

Si quattuor rectae proportionales sunt, etiam solida parallelepipeda in iis similia et similiter constructa proportionalia erunt; et si solida parallelepipeda in rectis similia et similiter constructa proportionalia sunt, etiam rectae ipsae proportionales erunt.

1) Cfr. p. 83 not. 1.

στρεφόν] om. V. 17. παραλληλ' επίπεδον, ut semper fere, P; hic ' in o mut. m. 2; item lin. 24. 20. λζ'] non liquet in F. 21. ὡσι V. 22. παράλληλα επίπεδα F. 23. ἔσται] miro comp. F (corr. ex /.?). 24. παράλληλα επίπεδα F.

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ $AB, \Gamma\Delta, EZ, H\Theta$, ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν $H\Theta$, καὶ ἀναγεγράφθωσαν ἀπὸ τῶν $AB, \Gamma\Delta, EZ, H\Theta$ ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα στερεὰ παραλλήλεπипеδα τὰ $KA, \Lambda\Gamma, ME, NH$: λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ KA πρὸς τὸ $\Lambda\Gamma$, οὕτως τὸ ME πρὸς τὸ NH .

Ἐπεὶ γὰρ ὁμοίον ἐστὶ τὸ KA στερεὸν παραλλήλεπιδον τῷ $\Lambda\Gamma$, τὸ KA ἄρα πρὸς τὸ $\Lambda\Gamma$ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ME πρὸς τὸ NH τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ EZ πρὸς τὴν $H\Theta$. καὶ ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν $H\Theta$. καὶ ὡς ἄρα τὸ AK πρὸς τὸ $\Lambda\Gamma$, οὕτως τὸ ME πρὸς τὸ NH .

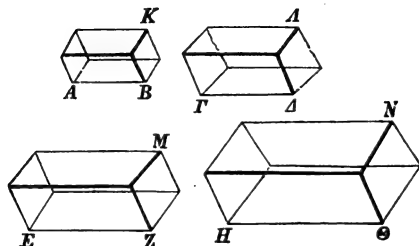
Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ AK στερεὸν πρὸς τὸ $\Lambda\Gamma$ στερεόν, οὕτως τὸ ME στερεὸν πρὸς τὸ NH : λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ AB εὐθεῖα πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν $H\Theta$.

Ἐπεὶ γὰρ πάλιν τὸ KA πρὸς τὸ $\Lambda\Gamma$ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, ἔχει δὲ καὶ τὸ ME πρὸς τὸ NH τριπλασίονα λόγον ἥπερ ἡ EZ πρὸς τὴν $H\Theta$, καὶ ἐστὶν ὡς τὸ KA πρὸς τὸ $\Lambda\Gamma$, οὕτως τὸ ME πρὸς τὸ NH , καὶ ὡς ἄρα ἡ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν $H\Theta$.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσι καὶ τὰ ἐξῆς τῆς προτάσεως ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

4. Ante τε m. 1 del. στερεά F. 5. $\Lambda\Gamma$] $\Lambda\Gamma, \Lambda M$ F.
7. ὁμοιον] om. Theon (BFV). ἐστὶν B. 8. $\Lambda\Gamma$ ὁμοιον Theon (BFV). 12. ἡ EZ] EZ F. καί] om. B. 13. NH] H non liquet in F. 14. $\Lambda\Gamma$] $\Gamma\Delta$ V. 15. στερεόν] om. V. EM V. στερεόν] om. V. HN V. 18. KA] A eras. P. 19. ἔχει] (alt.) ἐδείχθη V. 20. NH] ME F. λόγον ἔχον V.

Sint quattuor rectae proportionales $AB, \Gamma\Delta, EZ, H\Theta$, ita ut sit $AB : \Gamma\Delta = EZ : H\Theta$, et in $AB, \Gamma\Delta, EZ, H\Theta$ similia et similiter posita construantur so-



lida parallelepipeda $KA, A\Gamma, ME, NH$. dico, esse $KA : A\Gamma = ME : NH$.

Nam quoniam $KA \sim A\Gamma$, erit $KA : A\Gamma = AB^3 : \Gamma\Delta^3$ [prop. XXXIII]. eadem de causa erit etiam $ME : NH = EZ^3 : H\Theta^3$. et $AB : \Gamma\Delta = EZ : H\Theta$. quare etiam $KA : A\Gamma = ME : NH$.

At uero sit $KA : A\Gamma = ME : NH$. dico, esse

$$AB : \Gamma\Delta = EZ : H\Theta.$$

nam quoniam rursus $KA : A\Gamma = AB^3 : \Gamma\Delta^3$ [prop. XXXIII], et $ME : NH = EZ^3 : H\Theta^3$, et $KA : A\Gamma = ME : NH$, erit etiam $AB : \Gamma\Delta = EZ : H\Theta$.

Ergo si quattuor rectae proportionales sunt, et quae sequuntur in propositione; quod erat demonstrandum.

21. $A\Gamma]$ A e corr. m. 1 F. 24. $\acute{\omega}\sigma\iota\ \kappa\alpha\iota\ \tau\acute{\alpha}]$ $\acute{\omega}\sigma\iota\nu$ F. $\acute{\omega}\sigma\iota\nu$ B. De propositione, quae uulgo est 38, u. app.

λη'.

Ἐὰν κύβου τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων αἱ πλευραὶ δίχα τμηθῶσιν, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπιπεδα ἐκβληθῇ, ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων
 5 καὶ ἡ τοῦ κύβου διάμετρος δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας.

Κύβου γὰρ τοῦ AZ τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων τῶν ΓZ , $A\Theta$ αἱ πλευραὶ δίχα τετμήσθωσαν κατὰ τὰ K , Λ , M , N , Ξ , Π , O , P σημεῖα, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπιπεδα ἐκβεβλήσθω τὰ KN , ΞP , κοινὴ δὲ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ἔστω ἡ $T\Sigma$, τοῦ δὲ AZ κύβου διαγώνιος ἡ ΔH . λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΥT τῇ $T\Sigma$, ἡ δὲ ΔT τῇ TH .

Ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ ΔT , TE , $B\Sigma$, ΣH . καὶ
 15 ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ $\Delta \Xi$ τῇ OE , αἱ ἐναλλάξ γωνίαι αἱ ὑπὸ $\Delta \Xi T$, TOE ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν $\Delta \Xi$ τῇ OE , ἡ δὲ ΞT τῇ TO , καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΔT τῇ TE ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ $\Delta \Xi T$ τρίγωνον τῷ $O T E$ τρι-
 20 γώνῳ ἐστὶν ἴσον καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ $\Xi T \Delta$ γωνία τῇ ὑπὸ $O T E$ γωνίᾳ. διὰ δὴ τοῦτο εὐθείᾳ ἐστὶν ἡ $\Delta T E$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ $B \Sigma H$ εὐθείᾳ ἐστὶν, καὶ ἴση ἡ

1. 1θ' codd. 2. κύβου] στερεοῦ παραλληλεπιπέδου Theon (BFV). ἀπεναντίον] corr. ex ἀπεναντίων m. 1 P. 3. τμηθῶσι FV. 4. ἐκβληθῇ ἡ] ἐκβληθείη F. 5. κύβου] στερεοῦ παραλληλεπιπέδου Theon (BFV). 7. κύβου γὰρ] στερεοῦ γὰρ παραλληλεπιπέδου Theon (BFV). 10. KN] ras. 2 litt. V. ΞP] Ξ e corr. P, eras. V. τῶν ἐπιπέδων τομὴ BFV. 11. κύβου] στερεοῦ παραλληλεπιπέδου Theon (BFV). 12. ἡ] ἔστω ἡ FV. ὅτι] om. F; ὅτι αἱ (ἡ VF) $T\Sigma$, ΔE δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας, τουτέστιν ὅτι BV et mg. m. rec. F. ἴση ἐστίν] om. BFV. $T\Sigma$ ἴση ἐστίν BFV. 13. ΔT] $T \Delta$ P.

XXXVIII.

Si in cubo¹⁾ latera planorum inter se oppositorum in duas partes aequales secantur, et per puncta sectionum plana ducuntur, communis planorum sectio et cubi diametrus inter se in duas partes aequales secabunt.

Nam in cubo AZ latera planorum inter se oppositorum ΓZ , $A\Theta$ in duas partes aequales secantur in punctis K , Λ , M , N , Ξ , Π , O , P , et per puncta sectionum plana ducantur KN , ΞP , et communis planorum sectio sit $T\Sigma$, diametrus autem cubi AZ sit ΔH . dico, esse $TT = T\Sigma$, $\Delta T = TH$.

ducantur enim ΔT , TE , $B\Sigma$, ΣH . et quoniam $\Delta\Xi$ rectae OE parallela est, anguli alterni $\Delta\Xi T$, TOE inter se aequales sunt [I, 29]. et quoniam $\Delta\Xi = OE$, $\Xi T = TO$, et aequales angulos comprehendunt, erit $\Delta T = TE$ et $\Delta\Xi T = OTE$, et reliqui anguli reliquis aequales [I, 4]. itaque $\angle \Xi T \Delta = OTE$. quare recta est ΔTE [I, 14]. eadem de causa etiam

1) In hac scriptura tuenda consentiunt Campanus, Bononiensis, Vaticanus P, quamquam in hoc legitur mg. m. 1: γρ. ἐὰν στερεοῦ παραλληλεπιδόου. sane eadem demonstratio de quouis parallelepipedo ualet, sed cum propositio de cubo solo demonstrata propositioni 17 libri XIII, cui soli inseruit haec nostra propositio, satisfaceret, Euclides hoc casu speciali contentus fuit.

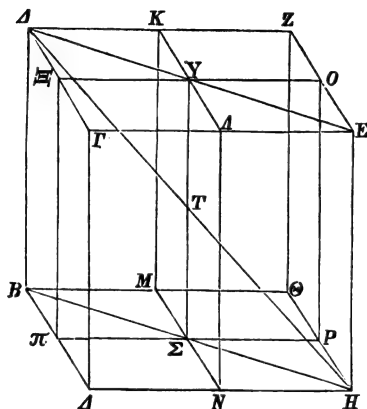
14. γὰρ] om. F. $B\Sigma$] corr. ex BE m. 2 F. 15. αἱ] supra m. 1 F. 16. αἱ] om. F. εἰσὶ V, comp. F. 17. OE] ΘE F. 18. περιέχουσι V. τῇ] βάσει τῇ FV. 19. ἴση ἐστὶ V. $\dot{T}OE$ B; $OT'E$ F; OET , supra ET ras., V. 20. ἴσον ἐστὶν B. 21. ἴσαι] om. BF; ἴσαι ἔσονται ἐκατέρω ἐκατέρω V. 22. OTE] $\dot{T}OE$ B; supra TE add. . . et . m. 2 F. 23. ἐστὶ PV, comp. F. ἴση] supra scr. m. 2 B.

$B\Sigma$ τῇ ΣH . καὶ ἐπεὶ ἡ ΓA τῇ ΔB ἴση ἐστὶ καὶ
 παράλληλος, ἀλλὰ ἡ ΓA καὶ τῇ $E H$ ἴση τέ ἐστι καὶ
 παράλληλος, καὶ ἡ ΔB ἄρα τῇ $E H$ ἴση τέ ἐστι καὶ
 παράλληλος. καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι αὐ
 5 ΔE , $B H$ · παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔE τῇ $B H$. ἴση
 ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ $E \Delta T$ γωνία τῇ ὑπὸ $B H T$ · ἐναλλάξ
 γάρ· ἡ δὲ ὑπὸ $\Delta T T$ τῇ ὑπὸ $H T \Sigma$. δύο δὲ τριγωναί
 ἐστὶ τὰ $\Delta T T$, $H T \Sigma$ τὰς δύο γωνίας ταῖς· δυοὶ γω-
 νίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην
 10 τὴν ὑποτείνουσιν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν τὴν
 ΔT τῇ $H \Sigma$ · ἡμίσειαι γάρ εἰσι τῶν ΔE , $B H$ · καὶ τὰς
 λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει. ἴση
 ἄρα ἡ μὲν ΔT τῇ $T H$, ἡ δὲ $T T$ τῇ $T \Sigma$.

Ἐὰν ἄρα κύβου τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων αὐτὰς πλευραὶ
 15 δίχα τμηθῶσιν, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῇ,

1. ΣH] in ras. V. ἡ] corr. ex αὐτῶν V. ἐστὶν B; item
 lin. 2, 3. 2. καὶ τῇ] τῇ FV. 3. ἄρα] om. V. $E H$] H
 e corr. F; $E H$ ἄρα V. 5. Post alt. $B H$ add. Theon: καὶ
 εἴληπται ἐφ' ἑκατέρως αὐτῶν τυγόντα σημεῖα τὰ Δ , T (Δ , $E T$
 F), H , Σ , καὶ ἐπεξεύχθωσαν αὐτὰς ΔH , $T \Sigma$. ἐν ἐνὶ ἄρα εἰσὶν
 ἐπιπέδω αὐτὰς ΔH , $T \Sigma$. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΔE τῇ $B H$
 ($B F V$). Dein in FV seq. καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπίπτωκεν εὐθεῖα ἡ
 ΔH . 6. μὲν] om. B. 7. ἡ δὲ] ἔστιν δὲ ἡ B. $H T \Sigma$]
 $T \Sigma$ in ras. m. 1 P; $H T \Sigma$ ἴση B. 8. ἐστὶν B. 9. πλευρὰν]
 om. V. 11. εἰσὶν B. 13. ΔT] Δ e corr. V. 14. κύβου]
 στερεοῦ παραλληλεπιπέδου Theon (BFV); item p. 134 lin. 1.
 15. τμηθῶσι V.

$B\Sigma H$ recta est, et $B\Sigma = \Sigma H$. et quoniam ΓA rectae ΔB et aequalis est et parallela, et ΓA etiam rectae EH et aequalis et parallela est, etiam ΔB rectae EH et aequalis est et parallela [prop. IX].



et eas coniungunt rectae ΔE , BH . itaque ΔE rectae BH parallela est [I, 33]. itaque¹⁾ $\angle E\Delta T = BHT$ (nam alterni sunt) [I, 29], et $\angle \Delta TT = HT\Sigma$ [I, 15]. quare duo trianguli sunt ΔTT , $HT\Sigma$ duos angulos duobus angulis aequales habentes et unum latus uni lateri aequale, quod sub altero angulorum aequalium subtendit, $\Delta T = H\Sigma$ (nam dimidia sunt rectarum ΔE , BH), et reliqua latera reliquis lateribus aequalia habebunt [I, 26]. ergo $\Delta T = TH$, $TT = T\Sigma$.

Ergo si in cubo latera planorum inter se oppositorum in duas partes aequales secantur, et per puncta sectionum plana ducuntur, communis planorum sectio

1) Nam ΔE , ΔH , BH in eodem plano sunt (prop. VII).

ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων καὶ ἡ τοῦ κύβου διά-
μετρος δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λθ'.

Ἐὰν ᾗ δύο πρίσματα ἰσοῦψῃ, καὶ τὸ μὲν ἔχη
5 βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, δι-
πλάσιον δὲ ᾗ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τρι-
γώνου, ἴσα ἔσται τὰ πρίσματα.

Ἔστω δύο πρίσματα ἰσοῦψῃ τὰ $ABΓΔEZ$,
 $HΘKΛMN$, καὶ τὸ μὲν ἐχέτω βάσιν τὸ AZ παρα-
10 ληλόγραμμον, τὸ δὲ τὸ $HΘK$ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ
ἔστω τὸ AZ παραλληλόγραμμον τοῦ $HΘK$ τριγώνου·
λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ $ABΓΔEZ$ πρίσμα τῷ $HΘKΛMN$
πρίσματι.

Συμπεληρώσω γὰρ τὰ $AΞ$, HO στερεά. ἐπεὶ
15 διπλάσιόν ἐστι τὸ AZ παραλληλόγραμμον τοῦ $HΘK$
τριγώνου, ἐστι δὲ καὶ τὸ $ΘK$ παραλληλόγραμμον
διπλάσιον τοῦ $HΘK$ τριγώνου, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ AZ
παραλληλόγραμμον τῷ $ΘK$ παραλληλογράμῳ. τὰ δὲ
ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ
20 ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ
τὸ $AΞ$ στερεὸν τῷ HO στερεῷ. καὶ ἐστι τοῦ μὲν
 $AΞ$ στερεοῦ ἥμισυ τὸ $ABΓΔEZ$ πρίσμα, τοῦ δὲ
 HO στερεοῦ ἥμισυ τὸ $HΘKΛMN$ πρίσμα· ἴσον

3. μ' codd. (in F seq. ras. 1 litt.). 10. δέ] δὲ λοιπόν F.
τό] ο e corr. m. 2 B. διπλάσιον — 11. τριγώνου] om. F.
14. HO] in ras. m. 2 V; H e corr. m. rec. P. Ante ἐπεὶ
add. καὶ m. 1—2 V. 16. ἐστίν B. ἐστι — 17. τριγώνου] mg.
m. 2 V. 18. δέ] δ' F. 20. ἴσα] om. F. ἐστίν] ἐστίν
ἴσον F, ἐστίν ἴσα m. 2. 21. HO] O non liquet FV. ἐστίν
B. 22. ABΓΔZE F, corr. m. 2. 23. HΘ? F.

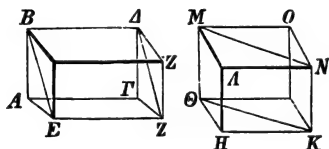
et cubi diametrus inter se in duas partes aequales secabunt; quod erat demonstrandum.

XXXIX.

Si duorum prismatum eandem altitudinem habentium alterum basim parallelogrammum, alterum triangulum habet, et parallelogrammum duplo maius est triangulo, prismata aequalia sunt.

Duo prismata sint $AB\Gamma\Delta EZ$, $H\Theta K\Lambda MN$ eandem altitudinem habentia, et alterum basim habeat AZ parallelogrammum, alterum triangulum $H\Theta K$, et sit $AZ = 2H\Theta K$. dico, esse $AB\Gamma\Delta EZ = H\Theta K\Lambda MN$.

expleantur enim solida $A\Xi$, HO . quoniam $AZ = 2H\Theta K$, et $\Theta K = 2H\Theta K$ [I, 34], erit $AZ = \Theta K$.



solida autem parallelepipeda, quae in aequalibus sunt basibus et eandem altitudinem habent, aequalia sunt [prop. XXXI]. itaque $A\Xi = HO$. et $AB\Gamma\Delta EZ = \frac{1}{2} A\Xi$, $H\Theta K\Lambda MN = \frac{1}{2} HO$ [prop. XXVIII]. itaque $AB\Gamma\Delta EZ = H\Theta K\Lambda MN$.

ἄρα ἐστὶ τὸ $ABΓΔEZ$ πρίσμα τῷ $HΘKΛMN$ πρίσματι.

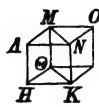
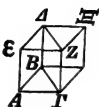
Ἐὰν ἄρα ἡ δύο πρίσματα ἰσοῦσῃ, καὶ τὸ μὲν ἔχη βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ἡ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἐστὶ τὰ πρίσματα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

1. πρίσμα] om. BF. 3. ἔχει φ et P (corr. m. 2).
 Εὐκλείδου στοιχείων ια PF; Εὐκλείδου στερεῶν ια B.

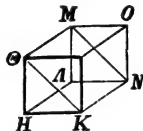
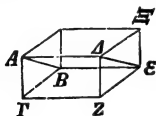
31 I 17

Ergo si duorum prismatum eandem altitudinem habentium alterum basim parallelogrammum, alterum triangulum habet, et parallelogrammum duplo maius est triangulo, prismata aequalia sunt; quod erat demonstrandum.¹⁾

1) In PB figura haec est:



Deinde haec sequitur addito σαφής (σαφεστέρα B) καταγραφή



In B in fig. alt. pro E est B, et B in A mutatum est.

ιβ'.

α'.

Τὰ ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετραγώνων.

- 5 Ἐστῶσαν κύκλοι οἱ $AB\Gamma$, $ZH\Theta$, καὶ ἐν αὐτοῖς ὅμοια πολύγωνα ἔστω τὰ $AB\Gamma\Delta E$, $ZH\Theta K\Lambda$, διάμετροι δὲ τῶν κύκλων ἔστωσαν αἱ BM , HN . λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς BM τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς HN τετραγώνου, οὕτως τὸ $AB\Gamma\Delta E$ πολύ-
10 γωνον πρὸς τὸ $ZH\Theta K\Lambda$ πολύγνωνον.

- Ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ BE , AM , HA , ZN . καὶ ἐπεὶ ὅμοιον τὸ $AB\Gamma\Delta E$ πολύγνωνον τῷ $ZH\Theta K\Lambda$ πολυγώνῳ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ BAE γωνία τῇ ὑπὸ HZA , καὶ ἐστὶν ὡς ἡ BA πρὸς τὴν AE , οὕτως ἡ
15 HZ πρὸς τὴν ZA . δύο δὴ τρίγωνα ἐστὶ τὰ BAE , HZA μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα τὴν ὑπὸ BAE τῇ ὑπὸ HZA , περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ABE τρί-

Εὐκλείδου στοιχείων ιβ P; Εὐκλείδου στοιχείων τῆς Θεώ-
νος ἐκδόσεως ιβ F; Εὐκλείδου στερεῶν β στοιχείων ιβ BV; Εὐ-
κλείδου ιβ q. 1. α'] om. V. 2. πολυγώνια B. 5. Ante κύ-
κλοι eras. ἴσοι V. $AB\Gamma\Delta E$, $ZH\Theta K\Lambda$ Theon (BFVq).
6. πολυγώνια B. 7. λέγω] ω e corr. V. 8. BM] B supra
scr. V. 9. πολυγώνιον B, item lin. 10. ἐστὶ τὸ BVq.
13. ἐστὶ καὶ] ἐστὶν q; ἐστὶν καὶ B. ὑπό] (alt.) bis F. 14. HZA]

Liber XII.

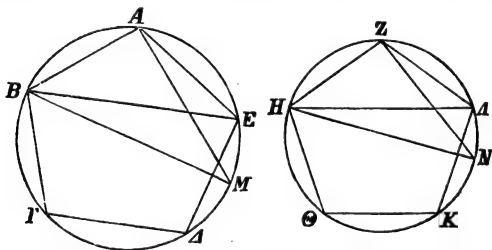
I.

Similia polygona in circulis inscripta eam inter se rationem habent quam quadrata diametrorum.

Sint circuli $AB\Gamma$, $ZH\Theta$, et in iis inscripta sint polygona $AB\Gamma\Delta E$, $ZH\Theta K\Lambda$, diametri autem circulorum sint BM , HN . dico, esse

$$BM^2 : HN^2 = AB\Gamma\Delta E : ZH\Theta K\Lambda.$$

ducantur enim BE , AM , HA , ZN . et quoniam $AB\Gamma\Delta E \sim ZH\Theta K\Lambda$, erit $\angle BAE = HZA$ et $BA : AE = HZ : ZA$ [VI def. 1]. itaque duo trianguli



sunt BAE , HZA unum angulum uni angulo aequalem habentes, $\angle BAE = HZA$, et latera aequales angulos comprehendunt proportionalia. itaque triangulus ABE

in ras. m. 1 P; HZ in ras. m. 2 B. $\tau\eta\nu$] $\tau\eta$ F. 16. HZA] $H''Z'A$ F (puncta post add.); ZHA V, HZA Bq. $\tau\eta\nu$] $\tau\eta$ V.

γωνον τῷ ZHA τριγώνῳ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ AEB
γωνία τῇ ὑπὸ ZAH . ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ AEB τῇ ὑπὸ
 AMB ἐστὶν ἴση· ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς περιφερείας βε-
βήκασιν· ἡ δὲ ὑπὸ ZAH τῇ ὑπὸ ZNH καὶ ἡ ὑπὸ
5 AMB ἄρα τῇ ὑπὸ ZNH ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ
ἡ ὑπὸ BAM ὀρθῇ τῇ ὑπὸ HZN ἴση· καὶ ἡ λοιπὴ
ἄρα τῇ λοιπῇ ἐστὶν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ABM
τριγώνον τῷ ZHN τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς
ἡ BM πρὸς τὴν HN , οὕτως ἡ BA πρὸς τὴν HZ .
10 ἀλλὰ τοῦ μὲν τῆς BM πρὸς τὴν HN λόγου διπλασίῳ
ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς BM τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ
τῆς HN τετράγωνον, τοῦ δὲ τῆς BA πρὸς τὴν HZ
διπλασίῳ ἐστὶν ὁ τοῦ $ABΓΔE$ πολυγώνου πρὸς τὸ
 $ZHΘΚΑ$ πολύγωνον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς BM
15 τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς HN τετράγωνον, οὕτως
τὸ $ABΓΔE$ πολύγωνον πρὸς τὸ $ZHΘΚΑ$ πολύγωνον.
Τὰ ἄρα ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς
ἄλληλά ἐστιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα·
ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

20

β'.

Οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ
τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

Ἔστωσαν κύκλοι οἱ $ABΓΔ$, $EZHΘ$, διάμετροι
δὲ αὐτῶν [ἔστωσαν] αἱ $ΒΔ$, $ΖΘ$ · λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς
25 ὁ $ABΓΔ$ κύκλος πρὸς τὸν $EZHΘ$ κύκλον, οὕτως τὸ

1. ZHA] corr. ex ZAH V, ZAH B, HZA φ. 2. ZAH] $ZH\bar{A}$ F. 3. Supra περιφερείας m. rec. add. τῆς BA P.
4. δέ] δ' P. 5. ὑπό] bis V. ἔστιν B. 6. ἡ] ἡ γωνία
ἡ F. ABM F. ἴση] om. B. ἡ] om. q. 7. AMB B.
9. HZ] H in ras. m. 1 P. 10. MB V. 12. δέ] δὲ
ἀπό F, et del. ἀπό V. 24. ἔστωσαν] mg. postea add. m. 1 P.

triangulo ZHA aequiangulus est [VI, 6]. quare $\angle AEB = ZAH$. sed $\angle AEB = AMB$ (nam in eodem arcu positi sunt) [III, 27], et $\angle ZAH = ZNH$. quare etiam $\angle AMB = ZNH$. uerum etiam

$\angle BAM = HZN$; nam uterque rectus est [III, 31].

itaque etiam reliquus reliquo aequalis est. triangulus igitur ABM triangulo ZHN aequiangulus est. quare $BM : HN = BA : HZ$ [VI, 4]. uerum $BM^2 : HN^2$ ratio duplicata est quam $BM : HN$, et

$$AB\Gamma\Delta E : ZH\Theta K\Lambda = BA^2 : HZ^2 \text{ [VI, 20].}$$

itaque etiam

$$BM^2 : HN^2 = AB\Gamma\Delta E : ZH\Theta K\Lambda.$$

Ergo similia polygona in circulis inscripta eam inter se rationem habent quam quadrata diametrorum; quod erat demonstrandum.

II.

Circuli eam inter se rationem habent quam quadrata diametrorum.

Sint circuli $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$ et eorum diametri $B\Delta$, $Z\Theta$. dico, esse

$$AB\Gamma\Delta : EZH\Theta = B\Delta^2 : Z\Theta^2.$$

II. Simplicius in phys. fol. 15. Paellus p. 65.

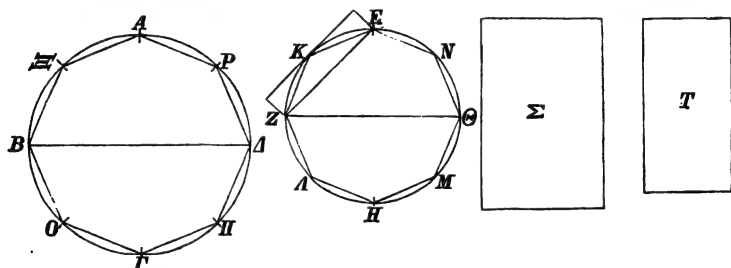
$\Delta B F$. λέγω — p. 142, 5. ὡς τὸ ἀπὸ] λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$ τετραγώνου (comp. add. m. 2 V) πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $Z\Theta$ τετραγώνου (om. V) οὕτως ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸν $EZH\Theta$ κύκλον. εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν (hic seq. in q: ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸν $EZH\Theta$) ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$ τετραγώνου (om. V) πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $Z\Theta$ (τετραγώνου add. Vq), οὕτως ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸν $EZH\Theta$ κύκλον (οὕτως — κύκλον om. q), ἔσται ὡς τὸ ἀπὸ (πρὸς τὸν — ἀπὸ om. F) $B\Gamma V q$ et P mg. m. 2 (γε. καὶ οὕτως et in fine ἡ δῆτα γραφή καὶ κρείττων ἐστίν).

ἀπὸ τῆς $B\Delta$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $Z\Theta$ τετράγωνον.

- Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸν $EZH\Theta$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$ τετράγωνον πρὸς τὸ
 5 ἀπὸ τῆς $Z\Theta$, ἐστὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$ πρὸς τὸ ἀπὸ
 τῆς $Z\Theta$, οὕτως ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος ἦτοι πρὸς ἑλάσσον
 τι τοῦ $EZH\Theta$ κύκλου χωρίον ἢ πρὸς μείζον. ἔστω
 πρότερον πρὸς ἑλάσσον τὸ Σ . καὶ ἐγγεγράφθω εἰς
 τὸν $EZH\Theta$ κύκλον τετράγωνον τὸ $EZH\Theta$. τὸ δὲ
 10 ἐγγεγραμμένον τετράγωνον μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἡμισυ
 τοῦ $EZH\Theta$ κύκλου, ἐπειδήπερ ἔαν διὰ τῶν $E, Z,$
 H, Θ σημείων ἐφαπτομένας [εὐθείας] τοῦ κύκλου
 ἀγάγωμεν, τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν κύκλον τετρα-
 γώνου ἡμισὺ ἐστὶ τὸ $EZH\Theta$ τετράγωνον, τοῦ δὲ περι-
 15 γραφέντος τετραγώνου ἐλάττω ἐστὶν ὁ κύκλος· ὥστε
 τὸ $EZH\Theta$ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον μείζον ἐστὶ τοῦ
 ἡμίσεως τοῦ $EZH\Theta$ κύκλου. τετμήσθωσαν δὶχα αἱ
 $EZ, ZH, H\Theta, \Theta E$ περιφέρειαι κατὰ τὰ $K, \Lambda, M,$
 N σημεία, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $EK, KZ, Z\Lambda, \Lambda H,$
 20 $HM, M\Theta, \Theta N, NE$. καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν $EKZ,$
 $Z\Lambda H, HM\Theta, \Theta NE$ τριγώνων μείζον ἐστὶν ἢ τὸ
 ἡμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου, ἐπειδήπερ
 ἔαν διὰ τῶν K, Λ, M, N σημείων ἐφαπτομένας τοῦ
 κύκλου ἀγάγωμεν καὶ ἀναπληρώσωμεν τὰ ἐπὶ τῶν
 25 $EZ, ZH, H\Theta, \Theta E$ εὐθειῶν παραλληλόγραμμα, ἕκαστον

3. δ] supra m. 1 P. 5. τῆς $B\Delta$ — 6. κύκλος] om. F.
 5. $B\Delta$ τετράγωνον V. 7. τι] om. V; supra ἑλάσσον ras. est.
 κύκλου] supra scr. m. 1 V. 9. $EZH\Theta$] (alt.) E supra m. 1 V.
 δὲ] δέ FV. 12. εὐθείας] om. BFVq. 13. ἀγάγωμεν
 Bq, διαγάγωμεν B m. 2 et F (δι- euah.). 15. ἐλάσσων φ.
 17. ἡμίσεος BVq. 18. ΘE] supra m. 2 B. 20. EKZ]
 Z e corr. m. 1 V. 21. $HM\Theta$] H e corr. π; $\Theta HM\Theta$, del.

Nam si non est $AB\Gamma\Delta : EZH\Theta = B\Delta^2 : Z\Theta^2$, erit ut $B\Delta^2 : Z\Theta^2$, ita $AB\Gamma\Delta$ aut ad minus aliquod circulo $EZH\Theta$ spatium aut ad maius. sit prius ad minus, Σ . et in circulo $EZH\Theta$ inscribatur quadratum $EZH\Theta$ [IV, 6]. quadratum igitur inscriptum maius est quam dimidium circuli $EZH\Theta$, quoniam, si per puncta E, Z, H, Θ rectas circulum contingentes duxerimus, quadratum $EZH\Theta$ dimidium¹⁾ est quadrati circum circulum circumscripti, et circulus minor est quadrato circumscripto; quare quadratum inscriptum $EZH\Theta$ maius est quam dimidium circuli $EZH\Theta$.



iam arcus $EZ, ZH, H\Theta, \Theta E$ in punctis K, A, M, N in binas partes aequales secantur, et ducantur $EK, KZ, ZA, AH, HM, M\Theta, \Theta N, NE$. itaque etiam singuli trianguli $EKZ, ZAH, HM\Theta, \Theta NE$ maiores sunt quam dimidia segmentorum circuli ad eos pertinentium, quoniam si per puncta K, A, M, N rectas circulum contingentes duxerimus et parallelogramma in rectis $EZ, ZH, H\Theta, \Theta E$ posita expleuerimus,

1) Hoc facile ex I, 47 demonstratur, coll. VI, 20 coroll.

pr. Θ et supra scr. bis $M F$. ΘNE] supra add. N m. 2 F.
 22. $\xi\alpha\nu\tau\acute{o}$] corr. ex $\xi\alpha\nu\tau\acute{o}\nu$ m. 2 B. 25. Post $\xi\kappa\alpha\sigma\tau\omicron\nu$
 add. $\xi\eta\alpha$ m. 2 F.

- τῶν EKZ , $Z\Lambda H$, $HM\Theta$, ΘNE τριγώνων ἡμισυ
 ἔσται τοῦ καθ' ἑαυτὸ παραλληλογράμμου, ἀλλὰ το
 καθ' ἑαυτὸ τμήμα ἑλαττόν ἐστι τοῦ παραλληλογράμμου·
 ὥστε ἕκαστον τῶν EKZ , $Z\Lambda H$, $HM\Theta$, ΘNE τρι-
 5 γώνων μείζον ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμή-
 ματος τοῦ κύκλου. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας
 περιφερείας δίχα καὶ ἐπιξενγνύντες εὐθείας καὶ τοῦτο
 αἰ ποιοῦντες καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κύκλου,
 ἃ ἔσται ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ἣ ὑπερέχει ὁ $EZH\Theta$
 10 κύκλος τοῦ Σ χωρίου. ἐδείχθη γὰρ ἐν τῷ πρώτῳ
 θεωρήματι τοῦ δεκάτου βιβλίου, ὅτι δύο μεγεθῶν
 ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ
 μείζον ἢ τὸ ἡμισυ καὶ τοῦ καταλειπομένου μείζον ἢ
 τὸ ἡμισυ, καὶ τοῦτο αἰ γίγνηται, λειψθήσεται τι μέ-
 15 γεθος, ὃ ἔσται ἐλάσσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος
 μεγέθους. λελειφθῶ οὖν, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν EK ,
 KZ , $Z\Lambda$, ΛH , HM , $M\Theta$, ΘN , NE τμήματα τοῦ
 $EZH\Theta$ κύκλου ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ἣ ὑπερέχει
 ὁ $EZH\Theta$ κύκλος τοῦ Σ χωρίου. λοιπὸν ἄρα τὸ
 20 $EKZ\Lambda HM\Theta N$ πολύγωνον μείζον ἐστι τοῦ Σ χωρίου.
 ἐγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον τῷ $EKZ\Lambda HM\Theta N$
 πολυγώνῳ ὅμοιον πολύγωνον τὸ $A\Xi BO\Gamma\Pi\Delta P$ · ἔστιν
 ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς
 $Z\Theta$ τετράγωνον, οὕτως τὸ $A\Xi BO\Gamma\Pi\Delta P$ πολύγωνον
 25 πρὸς τὸ $EKZ\Lambda HM\Theta N$ πολύγωνον. ἀλλὰ καὶ ὡς
 τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $Z\Theta$,
 οὕτως ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸ Σ χωρίον· καὶ ὡς
 ἄρα ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸ Σ χωρίον, οὕτως τὸ

1. EKZ] KZ in ras. m. 1 P; EZK q. Post ΘNE ras.
 2 litt. B. τριγώνων] ι in ras. m. 2 B. ἡμισυ — 4. τριγώνων]
 his B. 2. ἑαυτό] corr. ex ἑαυτόν m. 2 B (priore tantum loco).

singuli trianguli EKZ , ZAH , $HM\Theta$, ΘNE dimidia sunt parallelogrammorum ad eos pertinentium, et segmenta ad eos pertinentia minora sunt parallelogrammis; quare singuli trianguli EKZ , ZAH , $HM\Theta$, ΘNE maiores sunt quam dimidia segmentorum ad eos pertinentium. itaque relictos arcus secantes et rectas ducentes et hoc semper facientes segmenta quaedam circuli relinquemus, quae minora erunt excessu, quo circulus $EZH\Theta$ spatium Σ excedit; nam in primo theoremate decimi libri demonstratum est, si datis duabus magnitudinibus inaequalibus a maiore plus quam dimidium subtrahatur et a relictis plus quam dimidium et hoc semper fiat, magnitudinem relictum iri, quae minor sit data magnitudine minore. relinquitur igitur, et segmenta circuli $EZH\Theta$ in rectis EK , KZ , ZA , AH , HM , $M\Theta$, ΘN , NE posita minora sint excessu, quo circulus $EZH\Theta$ spatium Σ excedit. itaque $EKZAHM\Theta N > \Sigma$. inscribatur etiam in circulo $AB\Gamma\Delta$ polygonum $A\Xi BO\Gamma\Pi\Delta P$ polygono $EKZAHM\Theta N$ simile. erit igitur $B\Delta^2 : Z\Theta^2 = A\Xi BO\Gamma\Pi\Delta P : EKZAHM\Theta N$ [prop. I]. uerum etiam $B\Delta^2 : Z\Theta^2 = AB\Gamma\Delta : \Sigma$. quare etiam $AB\Gamma\Delta : \Sigma$

-
3. αὐτό P. ἑλάσσον B (utroque loco), Vq; comp. F.
 4. ὥστε καὶ V. 5. ἡμίσεος BFVq. 8. αἰεὶ F, αἰεὶ φ.
 τμήματα B. 9. ἐλάττωνα BFVq. 10. Σ] corr. ex E B.
 12. ἐκ- corr. ex ἐγ- in scr. F. 13. καὶ — 14. ἤμισιν] om. P.
 14. ληφθήσεται q. 15. ἔσται] ἐστὶν FV. 16. λελήφθω
 F et V (sed corr.); ἐλήφθω q. 17. HM] mg. m. 1 P.
 τμήματα — 18. κυκλον] mg. m. 1 V. 18. EZHΘ] EZΘ V,
 EZ q. ἐλάσσονα B. 19. EZHΘ] pro E c in ras. φ.
 20. ΕΚΖΑΗΜΘΝ P. πολυγώνιον q. 22. ὅμοιον] in ras.
 m. 2 V. O in ras. m. 1 B; Γ mg. V. 24. οὕτως — 26.
 ΖΘ] bis V, corr. m. 1.

$A\Xi B O \Gamma \Pi \Delta P$ πολύγωνον πρὸς τὸ $E K Z \Lambda H M \Theta N$
 πολύγωνον· ἐναλλάξ ἄρα ὡς ὁ $A B \Gamma \Delta$ κύκλος πρὸς
 τὸ ἐν αὐτῷ πολύγωνον, οὕτως τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸ
 $E K Z \Lambda H M \Theta N$ πολύγωνον. μεῖζων δὲ ὁ $A B \Gamma \Delta$ κύ-
 5 κλος τοῦ ἐν αὐτῷ πολυγώνου· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Σ
 χωρίον τοῦ $E K Z \Lambda H M \Theta N$ πολυγώνου. ἀλλὰ καὶ
 ἔλαττον· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ
 ἀπὸ τῆς $B \Delta$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $Z \Theta$, οὕτως
 ὁ $A B \Gamma \Delta$ κύκλος πρὸς ἑλασσόν τι τοῦ $E Z H \Theta$ κύκλου
 10 χωρίον. ὁμοίως δὴ δειξομεν, ὅτι οὐδὲ ὡς τὸ ἀπὸ $Z \Theta$
 πρὸς τὸ ἀπὸ $B \Delta$, οὕτως ὁ $E Z H \Theta$ κύκλος πρὸς ἑλασ-
 σόν τι τοῦ $A B \Gamma \Delta$ κύκλου χωρίον.

Αἰγὼ δὴ, ὅτι οὐδὲ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $B \Delta$ πρὸς τὸ
 ἀπὸ τῆς $Z \Theta$, οὕτως ὁ $A B \Gamma \Delta$ κύκλος πρὸς μεῖζόν τι
 15 τοῦ $E Z H \Theta$ κύκλου χωρίον.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ Σ . ἀνά-
 παλιν ἄρα [ἐστὶν] ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $Z \Theta$ τετράγωνον
 πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔB , οὕτως τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν
 $A B \Gamma \Delta$ κύκλον. ἀλλ' ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν $A B \Gamma \Delta$
 20 κύκλον, οὕτως ὁ $E Z H \Theta$ κύκλος πρὸς ἑλαττόν τι τοῦ
 $A B \Gamma \Delta$ κύκλου χωρίον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $Z \Theta$
 πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $B \Delta$, οὕτως ὁ $E Z H \Theta$ κύκλος πρὸς
 ἑλασσόν τι τοῦ $A B \Gamma \Delta$ κύκλου χωρίον· ὅπερ ἀδύνατον
 ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $B \Delta$ τετρά-
 25 γωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $Z \Theta$, οὕτως ὁ $A B \Gamma \Delta$ κύκλος
 πρὸς μεῖζόν τι τοῦ $E Z H \Theta$ κύκλου χωρίον. ἐδείχθη
 δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἑλασσόν· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς
 $B \Delta$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $Z \Theta$, οὕτως ὁ $A B \Gamma \Delta$
 κύκλος πρὸς τὸν $E Z H \Theta$ κύκλον.

3. ἐν αὐτῷ] $A\Xi B O \Gamma \Pi \Delta P$ V. 4. μεῖζων] corr. ex μεῖ-
 ζον m. 1 BV. 5. καί] supra m. 2 B. 7. ἐστίν] om. V.

$= A\Xi BO\Gamma\P\Delta P: EKZ\Lambda HM\Theta N$. itaque permu-
tando [V, 16]

$$AB\Gamma\Delta: A\Xi BO\Gamma\P\Delta P = \Sigma: EKZ\Lambda HM\Theta N.$$

sed $AB\Gamma\Delta > A\Xi BO\Gamma\P\Delta P$. quare etiam

$$\Sigma > EKZ\Lambda HM\Theta N.$$

uerum etiam $\Sigma < EKZ\Lambda HM\Theta N$; quod fieri non potest.* itaque non est ut $B\Delta^2$ ad $Z\Theta^2$, ita circulus $AB\Gamma\Delta$ ad spatium aliquod minus circulo $EZH\Theta$. iam similiter demonstrabimus, ne circulum $EZH\Theta$ quidem ad spatium aliquod minus circulo $AB\Gamma\Delta$ eam rationem habere quam $Z\Theta^2: B\Delta^2$.

Iam dico, ne ad maius quidem spatium aliquod circulo $EZH\Theta$ circulum $AB\Gamma\Delta$ eam rationem habere quam $B\Delta^2: Z\Theta^2$.

nam si fieri potest, habeat ad Σ maius circulo $EZH\Theta$. e contrario igitur [V, 7 coroll.] $Z\Theta^2: B\Delta^2 = \Sigma: AB\Gamma\Delta$. uerum ut Σ spatium ad circulum $AB\Gamma\Delta$, ita circulus $EZH\Theta$ ad spatium minus circulo $AB\Gamma\Delta$ [u. lemma]. quare etiam ut $Z\Theta^2: B\Delta^2$, ita circulus $EZH\Theta$ ad spatium aliquod minus circulo $AB\Gamma\Delta$; quod fieri non posse demonstratum est. itaque non est, ut $B\Delta^2: Z\Theta^2$, ita circulus $AB\Gamma\Delta$ ad spatium aliquod maius circulo $EZH\Theta$. demonstra- uimus autem, ne ad minus quidem eum illam habere rationem. est igitur $B\Delta^2: Z\Theta^2 = AB\Gamma\Delta: EZH\Theta$.

ἐστίν — ἀρα] supra m. 2 B. 8. τῆς] om. Bq. ἀπὸ τῆς] om. V. Z^Θ τετράγωνον BFVq. 9. ἔλαττον B. 10. τῆς Z^Θ V. 11. τῆς BΔ V. 13. δὴ] δέ FV. οὐδ' F. 17. ἐστίν] om. P. 18. ΔB] BΔ τετράγωνον V. 19. ἀλλ' ὥς — 20. κύκλον] om. q. 20. κύκλον] om. V; mg. m. 1: ὥς εὐθύς ἐρεῖ P. ἔλασσον BVq. 24. BΔ] AB P. 27. πρὸς] om. V. 28. BΔ] AB P. Z^Θ τετράγωνον BV.

Οἱ ἄρα κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὥς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λήμμα.

Λέγω δὴ, ὅτι τοῦ Σ χωρίου μείζονος ὄντος τοῦ
 5 $EZH\Theta$ κύκλου ἐστὶν ὥς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν $AB\Gamma\Delta$
 κύκλον, οὕτως ὁ $EZH\Theta$ κύκλος πρὸς ἑλαττόν τι τοῦ
 $AB\Gamma\Delta$ κύκλου χωρίον.

Γεγονέτω γάρ ὥς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν $AB\Gamma\Delta$
 κύκλον, οὕτως ὁ $EZH\Theta$ κύκλος πρὸς τὸ T χωρίον.
 10 λέγω, ὅτι ἑλαττόν ἐστι τὸ T χωρίον τοῦ $AB\Gamma\Delta$ κύ-
 κλου. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὥς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν $AB\Gamma\Delta$
 κύκλον, οὕτως ὁ $EZH\Theta$ κύκλος πρὸς τὸ T χωρίον,
 ἐναλλάξ ἐστὶν ὥς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν $EZH\Theta$ κύ-
 κλον, οὕτως ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸ T χωρίον.
 15 μείζον δὲ τὸ Σ χωρίον τοῦ $EZH\Theta$ κύκλου· μείζων
 ἄρα καὶ ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος τοῦ T χωρίου. ὥστε ἐστὶν
 ὥς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον, οὕτως ὁ
 $EZH\Theta$ κύκλος πρὸς ἑλαττόν τι τοῦ $AB\Gamma\Delta$ κύκλου
 χωρίου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

20

γ'.

Πᾶσα πυραμὶς τριγώνων ἐχουσα βάσιν διαι-
 ρεῖται εἰς δύο πυραμίδας ἴσας τε καὶ ὁμοίας
 ἀλλήλαις καὶ [ὁμοίας] τῇ ὅλῃ τριγώνου ἐχού-
 σας βάσεις καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· καὶ τὰ
 25 δύο πρίσματα μείζονά ἐστὶν ἢ τὸ ἡμισυ τῆς
 ὅλης πυραμίδος.

3. λήμμα] om. codd. 6. ἔλασσον BVq. 7. κύκλου]
 om. V. 9. τό] corr. ex τόν m. 1 P. 10. ἔλασσον B, comp.
 F. 12. κύκλος] om. V. 13. Σ] E F. 15. μείζον] -ον

Ergo circuli eam inter se rationem habent quam quadrata diametrorum; quod erat demonstrandum.

Corollarium.¹⁾

Dico, si $EZH\Theta > \Sigma$, esse ut Σ spatium ad circulum $AB\Gamma\Delta$, ita circulus $EZH\Theta$ ad spatium aliquod minus circulo $AB\Gamma\Delta$.

fiat enim $\Sigma : AB\Gamma\Delta = EZH\Theta : T$. dico, esse $T < AB\Gamma\Delta$. nam quoniam est $\Sigma : AB\Gamma\Delta = EZH\Theta : T$, permutando erit [V, 16] $\Sigma : EZH\Theta = AB\Gamma\Delta : T$. sed $\Sigma > EZH\Theta$. quare etiam $AB\Gamma\Delta > T$ [V, 14]. est igitur, ut spatium Σ ad $AB\Gamma\Delta$ circulum, ita circulus $EZH\Theta$ ad spatium minus circulo $AB\Gamma\Delta$; quod erat demonstrandum.

III.

Omnis pyramis triangulam basim habens in duas pyramidas inter se et aequales et similes totique similes triangulas bases habentes et in duo prismata aequalia diuiditur; et duo prismata maiora sunt dimidio totius pyramidis.

1) Hoc lemma an genuinum non sit, dubitare licet; etiam loci quidam in ipsa demonstratione suspecti sunt. sed de hoc toto genere, scilicet interpolationibus ante Theonem ortis, post modo uidebimus.

e corr. V. Σ] E F. 18. $\xi\lambda\alpha\sigma\sigma\omicron\nu$ BFVq. $\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda\omicron\nu$] om. V. 20. γ'] om. q; non liquet F. 21. Post $\tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\omicron\nu$ 4 litt. eras. P. 22. Post $\epsilon\acute{\iota}\varsigma$ ins. $\tau\epsilon$ m. 2 F. $\tau\epsilon$ καὶ ὁμοίας] supra m. 2 B, om. FVq. 23. $\alpha\lambda\lambda\acute{\eta}\lambda\alpha\varsigma$ P, -ας e corr. Dein seq. in BFVq: $\tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\omicron\nu\varsigma$ (ou e corr. V) $\acute{\epsilon}\chi\omicron\nu\acute{\omicron}\varsigma\alpha\varsigma$ (corr. ex $\acute{\epsilon}\chi\omicron\nu\sigma\alpha$ m. 2 F) $\beta\acute{\alpha}\sigma\epsilon\iota\varsigma$, $\acute{\omicron}\mu\omicron\acute{\iota}\alpha\varsigma$] om. P. $\tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\omicron\nu$ P, corr. m. 1. $\tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\omicron\nu\varsigma$ $\acute{\epsilon}\chi\omicron\nu\acute{\omicron}\varsigma\alpha\varsigma$ $\beta\acute{\alpha}\sigma\epsilon\iota\varsigma$] om. BFVq. 24. $\iota\sigma\alpha$] om. F, in ras. V. καὶ τὰ δύο πρίσματα] om. F.

Ἐστω πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον· λέγω, ὅτι ἡ $AB\Gamma\Delta$ πυραμὶς διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς
 5 δύο πρίσματα ἴσα· καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος.

Τετμήσθωσαν γὰρ αἱ AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, $A\Delta$, ΔB , $\Delta\Gamma$ δίχα κατὰ τὰ E , Z , H , Θ , K , Λ σημεῖα, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΘE , $E H$, $H\Theta$, ΘK , $K\Lambda$, $\Lambda\Theta$, KZ ,
 10 ZH . ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν AE τῇ EB , ἡ δὲ $A\Theta$ τῇ $\Delta\Theta$, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ $E\Theta$ τῇ ΔB . διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘK τῇ AB παράλληλός ἐστιν. παραλλήλογραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘEBK . ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΘK τῇ EB . ἀλλὰ ἡ EB τῇ EA ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ
 15 AE ἄρα τῇ ΘK ἐστὶν ἴση. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ $A\Theta$ τῇ $\Theta\Delta$ ἴση· δύο δὴ αἱ EA , $A\Theta$ δυσὶ ταῖς $K\Theta$, $\Theta\Delta$ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $EA\Theta$ γωνία τῇ ὑπὸ $K\Theta\Delta$ ἴση· βάσεις ἄρα ἡ $E\Theta$ βάσει τῇ $K\Delta$ ἐστὶν ἴση. ἴσον ἄρα καὶ ὁμοίον ἐστὶ τὸ $AE\Theta$
 20 τρίγωνον τῷ $\Theta K\Delta$ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ $A\Theta H$ τρίγωνον τῷ $\Theta\Delta\Lambda$ τριγώνῳ ἴσον τέ ἐστὶ καὶ ὁμοιον. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων αἱ $E\Theta$, ΘH παρὰ δύο εὐθείας ἀπτομένας ἀλλήλων τὰς $K\Delta$, $\Delta\Lambda$ εἰσὶν οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσαι, ἴσας
 25 γωνίας περιέξουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $E\Theta H$ γωνία τῇ ὑπὸ $K\Delta\Lambda$ γωνίᾳ. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι αἱ $E\Theta$, ΘH δυσὶ ταῖς $K\Delta$, $\Delta\Lambda$ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκα-

1. τό] corr. ex h. m. 2 F. $AB\Gamma\Delta$ F, et B, eras. Δ .
 τρίγωνον] Δ F. 7. ΔB] ΔE F. 8. $\Delta\Gamma$] Γ e corr. m.
 1 F. 9. $E H$] $H E$ FV. ΘK] supra scr. m. 2 B.
 11. $\Delta\Theta$] in ras. V, $\Theta\Delta$ B, $E\Delta$ F. ΔB] ΔE F. 12. ἐστὶ

Sit pyramis, cuius basis sit $AB\Gamma$ triangulus, uertex autem punctum Δ . dico, pyramidem $AB\Gamma\Delta$ in duas pyramides diuidi inter se aequales triangulas bases habentes et toti similes et in duo prismata aequalia, et duo prismata maiora esse dimidio totius pyramidis.

secentur enim AB , $B\Gamma$, ΓA , $A\Delta$, ΔB , $\Delta\Gamma$ in duas partes aequales in punctis E , Z , H , Θ , K , Λ , et ducantur ΘE , EH , $H\Theta$, ΘK , $K\Lambda$, $\Lambda\Theta$, KZ , ZH . iam quoniam $AE = EB$, $A\Theta = \Delta\Theta$, erit $E\Theta$ rectae ΔB parallela [VI, 2]. eadem de causa etiam ΘK rectae AB parallela est. itaque parallelogrammum est ΘEBK . itaque $\Theta K = EB$ [I, 34]. uerum etiam $EB = EA$. quare etiam $EA = \Theta K$. uerum etiam $A\Theta = \Theta\Delta$. itaque duae rectae EA , $A\Theta$ duabus $K\Theta$, $\Theta\Delta$ aequales sunt singulae singulis; et $\angle EA\Theta = K\Theta\Delta$ [I, 29]. itaque $E\Theta = K\Delta$ [I, 4]. quare triangulus $AE\Theta$ triangulo $\Theta K\Delta$ et aequalis est et similis [I, 4]. eadem de causa etiam triangulus $A\Theta H$ triangulo $\Theta\Lambda\Delta$ et aequalis est et similis. et quoniam duae rectae inter se tangentes $E\Theta$, ΘH duabus rectis inter se tangentibus $K\Delta$, $\Delta\Lambda$ parallelae sunt in eodem plano non positae, aequales angulos comprehendunt [XI, 10]. itaque $\angle E\Theta H = K\Delta\Lambda$. et quoniam duae rectae $E\Theta$, ΘH duabus rectis $K\Delta$, $\Delta\Lambda$ aequales sunt singulae

q. 14. EA] in ras. V, AE BF. 15. AE] EA P. $\xi\sigma\tau\iota$] $\xi\sigma\tau\iota\nu$ P. $A\Theta$] ΘA P. 16. $\Theta\Delta$] $\Delta\Theta$ B. EA] $E\Delta$ q, AE BV. 17. EA , $A\Theta$ PB. 18. $K\Theta$, $\Theta\Delta$ PBF. 19. $\iota\sigma\eta$ $\xi\sigma\tau\iota$ q. $AE\Theta\Delta$ F. 20. $\tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\omicron\nu$] comp. F. $K\Theta\Delta$ FV. 21. ABH ϕ . $\Theta K\Delta$ F. Post $\tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\omicron\nu$ rep. in F: $\delta\iota\alpha$ $\tau\acute{\alpha}$ $\alpha\upsilon\tau\acute{\alpha}$ $\delta\eta$ $\kappa\alpha\iota$ $\tau\acute{o}$ $A\Theta H$ $\tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\omicron\nu$ $\tau\acute{o}$ $\Theta\Lambda\Delta$ $\tau\rho\acute{\iota}\gamma\omega\nu\omicron\nu$. $\tau\epsilon$] om. P. 23. $\acute{\alpha}\pi\tau\acute{o}\mu\epsilon\nu\alpha\iota$ q. 25. $\xi\sigma\tau\alpha\iota$ q. $E\Theta$, ΘH PBF. 26. $K\Delta$, $\Delta\Lambda$ PF, et B, alt. Δ eras.

- τέρα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $E\Theta H$ γωνία τῇ ὑπὸ $K\Delta A$ ἐστὶν ἴση, βάσις ἄρα ἡ EH βάσει τῇ KA [ἐστὶν] ἴση· ἴσον ἄρα καὶ ὁμοιὸν ἐστὶ τὸ $E\Theta H$ τρίγωνον τῷ $K\Delta A$ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ AEH τρίγωνον τῷ
- 5 ΘKA τριγώνῳ ἴσον τε καὶ ὁμοιὸν ἐστὶν. ἡ ἄρα πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ AEH τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον, ἴση καὶ ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΘKA τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ $A\Delta B$ παρὰ μίαν
- 10 τῶν πλευρῶν τὴν AB ἤκται ἡ ΘK , ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ $A\Delta B$ τρίγωνον τῷ $\Delta\Theta K$ τριγώνῳ, καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχουσιν· ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ $A\Delta B$ τρίγωνον τῷ $\Delta\Theta K$ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν $\Delta B\Gamma$ τρίγωνον τῷ ΔKA τριγώνῳ ὁμοιὸν ἐστὶν,
- 15 τὸ δὲ $A\Delta\Gamma$ τῷ $\Delta A\Theta$. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων αἱ BA , $A\Gamma$ παρὰ δύο εὐθείας ἀπτομένας ἀλλήλων τὰς $K\Theta$, ΘA εἰσιν οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας γωνίας περιέχουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ BAG γωνία τῇ ὑπὸ $K\Theta A$. καὶ ἐστὶν ὥς ἡ BA
- 20 πρὸς τὴν $A\Gamma$, οὕτως ἡ $K\Theta$ πρὸς τὴν ΘA . ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ ΘKA τριγώνῳ. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΘKA τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ
- 25 σημεῖον. ἀλλὰ πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν [ἐστὶ] τὸ ΘKA τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὁμοία ἐδείχθη

1. $E\Theta$, ΘH PF, et B, eras. alt. Θ . $K\Delta$, ΔA PBF.

2. EH] HE F, ὑπὸ EH B. ἐστὶν] om. P. 3. $K\Delta\Delta$ FV.

4. $E\Delta H$ FV. 5. τέ ἐστὶν καὶ ὁμοιον P. 7. ἐστὶ] ἐστὶ τῇ FVq. 8. ΘKA] Θ in ras. B. 11. $AB\Delta$ P. τοῦ $\Delta\Theta K$ τριγώνου F. $\Delta\Theta K$] $\Theta\Delta K$ V; $\Delta K\Theta$ B. 12. $A\Delta B$] corr. ex $AB\Delta$ V, $AB\Delta$ F. 14. ἐστὶ PBVq, comp. F.

singulis¹⁾, et $\angle E\Theta H = K\Delta A$, erit $EH = KA$. quare triangulus $E\Theta H$ triangulo $K\Delta A$ et aequalis est et similis [I, 4]. eadem de causa etiam triangulus $A\Theta H$ triangulo $\Theta K\Delta$ et aequalis est et similis. itaque pyramis, cuius basis est triangulus $A\Theta H$, uertex autem punctum Θ , aequalis est et similis pyramidi, cuius basis est $\Theta K\Delta$ triangulus, uertex autem punctum Δ [XI def. 10]. et quoniam in triangulo $A\Delta B$ uni lateri AB parallela ducta est ΘK , triangulus $A\Delta B$ triangulo $\Delta\Theta K$ aequiangulus est [I, 29], et latera proportionalia habent. itaque triangulus $A\Delta B$ triangulo $\Delta\Theta K$ similis est [VI def. 1]. eadem de causa etiam triangulus $\Delta B\Gamma$ triangulo $\Delta K\Delta$ similis est et $\Delta\Delta\Gamma$ triangulo $\Delta\Delta\Theta$. et quoniam duae rectae inter se tangentes BA , $A\Gamma$ duabus rectis inter se tangentibus $K\Theta$, $\Theta\Delta$ parallelae sunt non in eodem plano, aequales angulos comprehendunt [XI, 10]. itaque $\angle B\Delta\Gamma = K\Theta\Delta$. et $BA : A\Gamma = K\Theta : \Theta\Delta$.²⁾ itaque triangulus $\Delta B\Gamma$ triangulo $\Theta K\Delta$ similis est [VI, 6]. quare etiam pyramis, cuius basis est triangulus $\Delta B\Gamma$, uertex autem Δ punctum, similis est pyramidi, cuius basis est triangulus $\Theta K\Delta$, uertex autem Δ punctum [XI def. 9]. sed pyramis, cuius basis est triangulus $\Theta K\Delta$, uertex autem Δ punctum, similis est pyramidi, cuius basis

1) Nam $E\Theta = K\Delta$ et $\Delta A\Theta H \sim \Theta\Delta A$.

2) Nam $AB : \Theta K = A\Delta : \Theta\Delta$, quia $\Delta AB\Delta \sim \Theta K\Delta$; et $A\Delta : \Theta\Delta = A\Gamma : \Theta\Delta$, quia $\Delta A\Gamma\Delta \sim \Delta\Theta\Delta$. tum u. V, 16.

15. $\Delta B\Gamma$ F. $\Delta\Delta\Theta$ τριγώνου Theon (BFVq). 16. Post
 $\alpha\lambda\lambda\eta\lambda\omega\sigma$ del. m. 1: $\alpha\lambda$ BA , $A\Gamma$ P. 17. ΘK FV. 19. $\gamma\omega$ -
 $\nu\iota\alpha$] om. V. $\acute{\omega}\varsigma$] supra m. 1 V. η] corr. ex A V.
 22. $\acute{\alpha}\rho\alpha$] om. FV. 23. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$ B. 25. $\eta\varsigma$ $\beta\acute{\alpha}\sigma\iota\varsigma$] mg. m. 1 P.
 $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$] om. PF. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ τό — p. 154, 1 $\mu\acute{\epsilon}\nu$ $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$] mg. m. 2 B.

πυραμίδι, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ AEH τρίγωνον, κο-
 ρυφή δὲ τὸ Θ σημείον [ὥστε καὶ πυραμὶς, ἥς βάσις
 μὲν τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημείον,
 ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἥς βάσις μὲν τὸ AEH τρίγω-
 5 νον, κορυφή δὲ τὸ Θ σημείον]. ἑκατέρω ἄρα τῶν
 $AEH\Theta$, $\Theta K\Lambda\Delta$ πυραμίδων ὁμοία ἐστὶ τῇ ὅλῃ τῇ
 $AB\Gamma\Delta$ πυραμίδι. — Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ BZ τῇ
 $Z\Gamma$, διπλάσιόν ἐστὶ τὸ $EBZH$ παραλληλόγραμμον
 τοῦ $HZ\Gamma$ τριγώνου. καὶ ἐπεὶ, ἐὰν ἡ δύο πρίσματα
 10 ἰσοῦψῃ, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ
 δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ἡ τὸ παραλληλόγραμμον
 τοῦ τριγώνου, ἴσα ἐστὶ τὰ πρίσματα, ἴσον ἄρα ἐστὶ
 τὸ πρίσμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων
 τῶν BKZ , $E\Theta H$, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν
 15 $EBZH$, $EBK\Theta$, ΘKZH τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ
 ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν $HZ\Gamma$, $\Theta K\Lambda$, τριῶν δὲ
 παραλληλογράμμων τῶν $KZ\Gamma\Lambda$, $\Lambda\Gamma H\Theta$, ΘKZH .
 καὶ φανερόν, ὅτι ἑκάτερον τῶν πρισμάτων, οὗ τε βάσις
 τὸ $EBZH$ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘK
 20 εὐθεΐα, καὶ οὗ βάσις τὸ $HZ\Gamma$ τρίγωνον, ἀπεναντίον
 δὲ τὸ $\Theta K\Lambda$ τρίγωνον, μεῖζόν ἐστὶν ἑκατέρας τῶν πυρα-
 μίδων, ὧν βάσεις μὲν τὰ AEH , $\Theta K\Lambda$ τρίγωνα, κο-
 ρυφαὶ δὲ τὰ Θ , Δ σημεία, ἐπειδήπερ [καὶ] ἐὰν ἐπι-
 ξεύσωμεν τὰς EZ , EK εὐθείας, τὸ μὲν πρίσμα, οὗ
 25 βάσις τὸ $EBZH$ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ
 ἡ ΘK εὐθεΐα, μεῖζόν ἐστὶ τῆς πυραμίδος, ἥς βάσις
 τὸ EBZ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ K σημείον. ἀλλ'

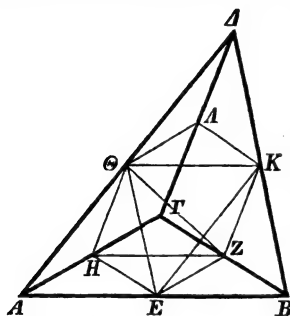
1. ἐστι] om. Fq. τό] et in textu et mg. m. 2 B.

2. ὥστε — 5. σημείον] om. P. 3. μὲν ἐστὶ V. 4. ἐστὶ] om. F. μὲν ἐστὶ V. τρίγωνον] ΔN F. 7. πυραμίδι] in syll. πυρα des. F; reliquam partem a φ suppletam hic neglexi.

10. ἔχῃ] corr. ex ἔχει m. 2 P. 11. ἡ] εἴη V. 14. KZB V.

est AEH triangulus, uertex autem Θ punctum, ut demonstrauius. itaque utraque pyramis $AEH\Theta$, $\Theta K\Lambda\Lambda$ similis est toti pyramidi $AB\Gamma\Lambda$.

Et quoniam $BZ = Z\Gamma$, erit $EBZH = 2HZ\Gamma$ [I, 41].
et quoniam, si datis duobus prismatis eandem altitudi-



nem habentibus alterum basim habet parallelogrammum, alterum triangulum, et parallelogrammum duplo maius est triangulo, prismata aequalia sunt, prisma comprehensum duobus triangulis BKZ , $E\Theta H$ et tribus parallelogrammis $EBZH$, $EBK\Theta$, ΘKZH aequale est prismati

comprehenso duobus triangulis $HZ\Gamma$, $\Theta K\Lambda$ et tribus parallelogrammis $KZ\Gamma\Lambda$, $\Lambda\Gamma H\Theta$, ΘKZH [XI, 39]. et adparet, utrumque prisma, et cuius basis sit $EBZH$ parallelogrammum, ei autem opposita recta ΘK , et cuius basis sit triangulus $HZ\Gamma$, ei autem oppositus triangulus $\Theta K\Lambda$, maius esse utraque pyramide, quarum bases sint trianguli AEH , $\Theta K\Lambda$, uertices autem puncta Θ , Λ , quoniam, si duxerimus rectas EZ , EK , prisma, cuius basis est parallelogrammum $EBZH$, ei autem opposita recta ΘK , maius est pyramide, cuius basis est triangulus EBZ , uertex autem

17. Post $\tau\acute{\omega}\nu$ del. Z m. 1 V. $KZ\Gamma\Lambda$, $\Lambda\Gamma H\Theta$, ΘKZH
mg. m. 2 B, in textu eras. \overline{EB} , \overline{ZH} , $\overline{K\Theta}$. 18. $\delta\tau\iota$ καί V.
19. $EBZH$] B in ras. B. 22. βάσις PVq, et B, sed
corr. AEH] in ras. V. κορυφή q. 23. καί] om. BVq.
26. μείζον] supra scr. ω m. rec. P. τῆς] om. V.
27. τετράγωνόν ἐστὶ V.

ἡ πυραμὶς, ἥς βάσις τὸ EBZ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ K σημείον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἥς βάσις τὸ AEH τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Θ σημείον· ὑπὸ γὰρ ἴσων καὶ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχονται. ὥστε καὶ τὸ πρίσμα, 5 οὗ βάσις μὲν τὸ $EBZH$ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘK εὐθεῖα, μεζὸν ἐστὶ πυραμίδος, ἥς βάσις μὲν τὸ AEH τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Θ σημείον. ἴσον δὲ τὸ μὲν πρίσμα, οὗ βάσις τὸ $EBZH$ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘK εὐθεῖα, τῷ πρίσματι, 10 οὗ βάσις μὲν τὸ $HZ\Gamma$ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ $\Theta K\Lambda$ τρίγωνον· ἡ δὲ πυραμὶς, ἥς βάσις τὸ AEH τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Θ σημείον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἥς βάσις τὸ $\Theta K\Lambda$ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Λ σημείον. τὰ ἄρα εἰρημένα δύο πρίσματα μεζονά ἐστὶ τῶν εἰρη- 15 μένων δύο πυραμίδων, ὧν βάσεις μὲν τὰ AEH , $\Theta K\Lambda$ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Θ , Λ σημεία.

Ἡ ἄρα ὅλη πυραμὶς, ἥς βάσις τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Λ σημείον, διήρηται εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις [καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ] καὶ εἰς δύο 20 πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ δύο πρίσματα μεζονά ἐστὶν ἢ τὸ ἡμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

δ'.

Ἐὰν ὧσι δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος τριγώνους ἔχουσai βάσεις, διαιρεθῇ δὲ ἕκα- 25 τέρα αὐτῶν εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα

2. τό] (alt.) τὰ q. 4. τό] om. V. 15. δύο] β V (in mg. transit). πυραμίδων] in ras. m. 1 B. βάσεις] βάσις B (corr. m. 2), q, comp. V. $\Theta K\Lambda$] ΘK in ras. V. 18. τε] om. V. 19. ἴσας τε καὶ ὁμοίας edd. καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ] om. P.

punctum K ; pyramis autem, cuius basis est triangulus EBZ , uertex autem punctum K , aequalis est pyramidi, cuius basis est AEH triangulus, uertex autem punctum Θ ; nam planis aequalibus et similibus comprehenduntur; quare etiam prisma, cuius basis est $EBZH$ parallelogrammum, ei autem opposita recta ΘK , maius est pyramide, cuius basis est triangulus AEH , uertex autem punctum Θ . prisma autem, cuius basis est parallelogrammum $EBZH$, ei autem opposita recta ΘK , aequale est prismati, cuius basis est triangulus $HZ\Gamma$, ei autem oppositus triangulus ΘKA ; pyramis autem, cuius basis est triangulus AEH , uertex autem Θ punctum, aequalis est pyramidi, cuius basis est triangulus ΘKA , uertex autem A punctum. itaque duo illa prismata, quae nominauimus, maiora sunt duabus pyramidibus, quas nominauimus, quarum bases sunt trianguli AEH , ΘKA , uertices autem puncta Θ , A .

Ergo tota pyramis, cuius basis est $AB\Gamma$ triangulus, uertex autem punctum A , in duas pyramides inter se aequales diuisa est et in duo prismata aequalia, et duo prismata maiora sunt dimidio totius pyramidis; quod erat demonstrandum.

IV.

Datis duabus pyramidibus sub eadem altitudine et bases triangulas habentibus si utraque in duas pyramides inter se aequales totique similes et duo prismata aequalia diuiditur, erit ut basis alterius pyra-

20. $\mu\epsilon\lambda\lambda\omicron\nu\alpha$] ξ corr. ex β V.
1 P. $\omega\sigma\iota\nu$ B.

23. $\acute{\epsilon}\acute{\alpha}\nu$] $-\alpha\nu$ postea add. m.

ἴσα, ἔσται ὡς ἡ τῆς μιᾶς πυραμίδος βάσις πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας πυραμίδος βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ μιᾷ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῇ.

- 5 Ἔστωσαν δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος τριγώνους ἔχουσai βάσεις τὰς $AB\Gamma$, ΔEZ , κορυφὰς δὲ τὰ H , Θ σημεία, καὶ διηρησθῶ ἑκατέρα αὐτῶν εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ $AB\Gamma$
10 βάσις πρὸς τὴν ΔEZ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ $AB\Gamma H$ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδι πρίσματα ἰσοπληθῇ.

- Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν $B\Xi$ τῇ $\Xi\Gamma$, ἡ δὲ AA τῇ $A\Gamma$, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ $A\Xi$ τῇ AB καὶ
15 ὁμοιον τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ $A\Xi\Gamma$ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΔEZ τρίγωνον τῷ $P\Phi Z$ τριγώνῳ ὁμοιόν ἐστιν. καὶ ἐπεὶ διπλασίῳ ἐστὶν ἡ μὲν $B\Gamma$ τῆς $\Gamma\Xi$, ἡ δὲ EZ τῆς $Z\Phi$, ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν $\Gamma\Xi$, οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν $Z\Phi$. καὶ ἀναγέγραπται
20 ἀπὸ μὲν τῶν $B\Gamma$, $\Gamma\Xi$ ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ $AB\Gamma$, $A\Xi\Gamma$, ἀπὸ δὲ τῶν EZ , $Z\Phi$ ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα [εὐθύγραμμα] τὰ ΔEZ ,

1. Post ἴσα add. Theon: καὶ τῶν γενομένων (γενεαμ. B) πυραμίδων ἑκατέρα τὸν (e corr. V) αὐτὸν τρόπον, καὶ τοῦτο αἰεὶ γίνηται (γίνεται q) (BVq). ἔσται — τῆς] supra scr. m. 2 B (ἔστιν).

2. ἑτέρας] post q del. e m. 1 P. οὕτω BV.

3. πρίσματα — 4. πυραμίδι] mg. m. 2 B. 4. πάντα] om. V.

8. ὁμοίως V. 9. Post ἴσα add. καὶ τῶν γενομένων πυραμίδων ἑκατέρα τὸν αὐτὸν τρόπον νενοήσθω διηρημένη καὶ τοῦτο αἰεὶ γινέσθω Bq, V mg. m. 2. 10. βάσιν] om. V.

οὕτω Bq. 13. BZ q. 14. ἐστὶν] om. V.

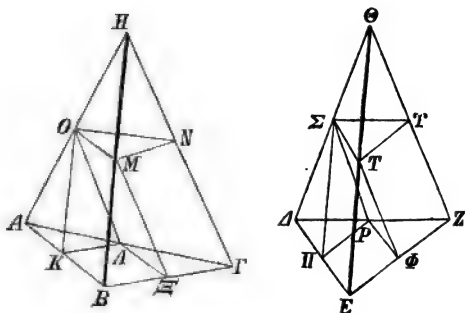
16. ὁμοιόν ἐστι τῷ $P\Phi Z$ τριγώνῳ BVq ($P\Phi$ in ras. V).

18. $\Gamma\Xi$] corr. ex $\Xi\Gamma$ V. Post δέ ras. 1 litt. P. $Z\Phi$] corr. ex ΦZ V.

22. εὐθύγραμμα] om. P.

midis ad basim alterius, ita omnia prismata alterius pyramidis ad omnia prismata numero aequalia¹⁾ alterius pyramidis.

Sint duae pyramides sub eadem altitudine triangulas bases habentes $AB\Gamma$, ΔEZ , uertices autem H ,



Θ puncta, et utraque in duas pyramides inter se aequales totique similes et duo prismata aequalia diuidatur [prop. III]. dico, esse ut $AB\Gamma : \Delta EZ$, ita omnia prismata pyramidis $AB\Gamma H$ ad prismata numero aequalia pyramidis $\Delta EZ\Theta$.

Nam quoniam $B\Xi = \Xi\Gamma$, $AA = A\Gamma$ [prop. III], erit $A\Xi$ rectae AB parallela et $AB\Gamma \sim A\Xi\Gamma$ [p. 152, 9]. eadem de causa erit etiam $\Delta EZ \sim P\Phi Z$. et quoniam $B\Gamma = 2\Gamma\Xi$, $EZ = 2Z\Phi$, erit $B\Gamma : \Gamma\Xi = EZ : Z\Phi$. et in $B\Gamma$, $\Gamma\Xi$ constructae sunt figurae rectilineae similes et similiter positae $AB\Gamma$, $A\Xi\Gamma$, in EZ , $Z\Phi$

1) πάντα et ἰσοπληθῆ addidit Euclides ad finem propositionis p. 160, 26 respiciens, ubi eam quasi quodam corollario dilatauit.

$P\Phi Z$ · ἔστιν ἄρα ὥς τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον πρὸς τὸ $A\Xi\Gamma$
 τρίγωνον, οὕτως τὸ ΔEZ τρίγωνον πρὸς τὸ $P\Phi Z$
 τρίγωνον· ἐναλλάξ ἄρα ἔστιν ὥς τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον
 πρὸς τὸ ΔEZ [τρίγωνον], οὕτως τὸ $A\Xi\Gamma$ [τρίγωνον]
 5 πρὸς τὸ $P\Phi Z$ τρίγωνον. ἀλλ' ὥς τὸ $A\Xi\Gamma$ τρίγωνον
 πρὸς τὸ $P\Phi Z$ τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις
 μὲν [ἔστι] τὸ $A\Xi\Gamma$ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ OMN ,
 πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ $P\Phi Z$ τρίγωνον,
 ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣTT · καὶ ὥς ἄρα τὸ $AB\Gamma$ τρίγω-
 10 νον πρὸς τὸ ΔEZ τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ
 βάσις μὲν τὸ $A\Xi\Gamma$ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ OMN ,
 πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ $P\Phi Z$ τρίγωνον,
 ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣTT . ὥς δὲ τὰ εἰρημένα πρίσματα
 πρὸς ἄλληλα, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ
 15 $KB\Xi A$ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ OM
 εὐθεῖα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ $\Pi E\Phi P$
 παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΣT εὐθεῖα. καὶ
 τὰ δύο ἄρα πρίσματα, οὗ τε βάσις μὲν τὸ $KB\Xi A$
 παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ OM , καὶ οὗ
 20 βάσις μὲν τὸ $A\Xi\Gamma$, ἀπεναντίον δὲ τὸ OMN , πρὸς
 τὰ πρίσματα, οὗ τε βάσις μὲν τὸ $\Pi E\Phi P$, ἀπεναντίον
 δὲ ἡ ΣT εὐθεῖα, καὶ οὗ βάσις μὲν τὸ $P\Phi Z$ τρίγω-
 νον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣTT . καὶ ὥς ἄρα ἡ $AB\Gamma$
 βάσις πρὸς τὴν ΔEZ βάσιν, οὕτως τὰ εἰρημένα δύο
 25 πρίσματα πρὸς τὰ εἰρημένα δύο πρίσματα.

Καὶ ὁμοίως, ἐὰν διαιρεθῶσιν αἱ $OMNH$, $\Sigma TT\Theta$
 πυραμίδες εἰς τε δύο πρίσματα καὶ δύο πυραμίδας,

1. $P\Phi Z$] P e corr. V, $E\Phi Z$ q. 2. τρίγωνον] (prius) om.
 V. 4. τρίγωνον] (prius) om. P. τρίγωνον] (alt.) om. P.
 6. οὕτω B. 7. ἔστι] om. P. OMN τρίγωνον V. 8. μὲν
 ἔστι V. 11. μὲν ἔστι V. 12. τρίγωνον] supra comp. B.
 13. ὥς δέ — p. 162, 14] mutavit Theon; u. app.

autem similes et similiter positae $\triangle EZ$, $P\Phi Z$. erit igitur [VI, 22]

$$AB\Gamma : A\Xi\Gamma = \triangle EZ : P\Phi Z.$$

itaque permutando $AB\Gamma : \triangle EZ = A\Xi\Gamma : P\Phi Z$ [V, 16]. sed ut $A\Xi\Gamma : P\Phi Z$, ita prisma, cuius basis est $A\Xi\Gamma$ triangulus, ei autem oppositus OMN , ad prisma, cuius basis est $P\Phi Z$ triangulus, ei autem oppositus ΣTT [u. lemma]. quare etiam ut $AB\Gamma : \triangle EZ$, ita prisma, cuius basis est $A\Xi\Gamma$ triangulus, ei autem oppositus OMN , ad prisma, cuius basis est $P\Phi Z$ triangulus, ei autem oppositus ΣTT . uerum quam rationem habent duo prismata, quae diximus, eam habet prisma, cuius basis est parallelogrammum $KB\Xi A$, ei autem opposita recta OM , ad prisma, cuius basis est parallelogrammum $\Pi E\Phi P$, ei autem opposita recta ΣT [XI, 39; cfr. prop. III]. quare etiam duo prismata, et cuius basis est parallelogrammum $KB\Xi A$, ei autem opposita OM , et cuius basis est $A\Xi\Gamma$, ei autem oppositus OMN , ad duo prismata, et cuius basis est $\Pi E\Phi P$, ei autem opposita ΣT recta, et cuius basis est $P\Phi Z$ triangulus, ei autem oppositus ΣTT , illam habent rationem [V, 12].¹⁾ quare etiam ut $AB\Gamma : \triangle EZ$, ita duo prismata, quae diximus, ad duo prismata, quae diximus.

Et similiter, si pyramides $OMNH$, $\Sigma TT\Theta$ in duo prismata duasque pyramides diuiduntur, erunt ut

$$\begin{aligned} 1) \text{ Sint prismata } p \text{ } h_1 \text{ } P \text{ } P_1. \text{ demonstrauius } AB\Gamma : \triangle EZ \\ = p : p_1; p : p_1 = P : P_1 = p + P : p_1 + P_1. \text{ ergo} \\ AB\Gamma : \triangle EZ = p + P : p_1 + P_1. \end{aligned}$$

14. διὰ τὰ αὐτὰ mg. m. 1 P, qui ad lin. 8 adscr. hab. m. 1: ὡς εὐθὺς ἐπεὶ. 18. $KB\Xi B$, sed ΞB in ras. e corr. P.

ἔσται ὥς ἡ OMN βάσις πρὸς τὴν ΣTT βάσιν, οὕτως
 τὰ ἐν τῇ $OMNH$ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν
 τῇ $\Sigma TT\Theta$ πυραμίδι δύο πρίσματα. ἀλλ' ὥς ἡ OMN
 βάσις πρὸς τὴν ΣTT βάσιν, οὕτως ἡ $AB\Gamma$ βάσις
 5 πρὸς τὴν ΔEZ βάσιν· ἴσον γὰρ ἐκάτερον τῶν OMN ,
 ΣTT τριγώνων ἐκατέρῳ τῶν $\Delta \Xi \Gamma$, $P\Phi Z$. καὶ ὥς
 ἄρα ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν ΔEZ βάσιν, οὕτως τὰ
 τέσσαρα πρίσματα πρὸς τὰ τέσσαρα πρίσματα. ὁμοίως
 δὲ καὶ τὰς ὑπολειπομένας πυραμίδας διέλωμεν εἰς τε
 10 δύο πυραμίδας καὶ εἰς δύο πρίσματα, ἔσται ὥς ἡ
 $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν ΔEZ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ
 $AB\Gamma H$ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ
 $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ· ὅπερ
 ἔδει δεῖξαι.

15

Λήμμα.

Ὅτι δὲ ἔστιν ὥς τὸ $\Delta \Xi \Gamma$ τρίγωνον πρὸς τὸ $P\Phi Z$
 τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα, οἷ βάσις τὸ $\Delta \Xi \Gamma$ τρί-
 γωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ OMN , πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ
 βάσις μὲν τὸ $P\Phi Z$ [τρίγωνον], ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣTT ,
 20 οὕτω δεικτέον.

Ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς νενοήσθωσαν ἀπὸ
 τῶν H , Θ κάθετοι ἐπὶ τὰ $AB\Gamma$, ΔEZ ἐπίπεδα, ἵσαι
 δηλαδὴ τυγχάνουσαι διὰ τὸ ἰσοῦσθαι ὑποκείσθαι τὰς
 πυραμίδας. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἦ τε $H\Gamma$ καὶ ἡ ἀπὸ
 25 τοῦ H κάθετος ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν $AB\Gamma$,
 OMN τέμνονται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθῇσονται.
 καὶ τέτμηται ἡ $H\Gamma$ δίχα ὑπὸ τοῦ OMN ἐπιπέδου
 κατὰ τὸ N · καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ H ἄρα κάθετος ἐπὶ τὸ

15. λήμμα] om. BV.
 ZPΦ P. 17. οὕτω B.

16. $\Delta \Xi \Gamma$] Γ e corr. m. 2 V.
 19. τρίγωνον om. P. TΣT τρι-

$OMN : \Sigma TT$, ita duo prismata pyramidis $OMNH$ ad duo prismata pyramidis $\Sigma TT\Theta$. sed $OMN : \Sigma TT = AB\Gamma : \Delta EZ$; nam uterque triangulus OMN , ΣTT utrique triangulo $A\Xi\Gamma$, $P\Phi Z$ aequalis est. quare etiam ut $AB\Gamma : \Delta EZ$, ita quattuor prismata ad quattuor prismata [V, 12]. et similiter si etiam reliquas pyramides in duas pyramides duoque prismata diuiserimus, erunt ut $AB\Gamma : \Delta EZ$, ita omnia prismata pyramidis $AB\Gamma H$ ad omnia prismata pyramidis $\Delta EZ\Theta$ numero aequalia; quod erat demonstrandum.

Lemma.

uerum esse, ut $A\Xi\Gamma : P\Phi Z$, ita prisma, cuius basis sit triangulus $A\Xi\Gamma$, ei autem oppositus OMN , ad prisma, cuius basis sit $P\Phi Z$, ei autem oppositus ΣTT , ita demonstrandum est.

In eadem enim figura fingantur perpendiculares a punctis H , Θ ad triangulos $AB\Gamma$, ΔEZ ductae, quae scilicet aequales sunt, quia supposuimus, pyramides aequales altitudines habere. et quoniam duae rectae $H\Gamma$ et perpendicularis ab H ducta planis parallelis $AB\Gamma$, OMN secantur, secundum eandem rationem secabuntur [XI, 17]. et $H\Gamma$ plano OMN in duas partes aequales secta est in N ; quare etiam perpen-

γωνον V. 20. δεξιόμεν οὕτως V. οὕτω] -ς del. m. 1 P.
 21. αὐτὸ ἀπό BVq. 22. τῶν] τῆς B. τὰ] τὰ τῶν V.
 ΔΕΖ] ΔΕΖ τριγώνον Bq; ΔΕΖ τριγώνων V. 23. ἴσον ψεῖς]
 -ει- e corr. V. 24. ἡ] in ras. V.

$ΑΒΓ$ ἐπίπεδον δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ $ΟΜΝ$ ἐπίπεδου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ $Θ$ κάθετος ἐπὶ τὸ $ΔΕΖ$ ἐπίπεδον δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ $ΣΤΤ$ ἐπίπεδου. καὶ εἰσιν ἴσαι αἱ ἀπὸ τῶν $Η, Θ$ κάθετοι
 5 ἐπὶ τὰ $ΑΒΓ, ΔΕΖ$ ἐπίπεδα· ἴσαι ἄρα καὶ αἱ ἀπὸ τῶν $ΟΜΝ, ΣΤΤ$ τριγώνων ἐπὶ τὰ $ΑΒΓ, ΔΕΖ$ κάθετοι. ἰσοῦσθαι ἄρα [ἐστὶ] τὰ πρίσματα, ὧν βάσεις μὲν εἰσὶ τὰ $ΑΞΓ, ΡΦΖ$ τρίγωνα, ἀπεναντίον δὲ τὰ $ΟΜΝ, ΣΤΤ$. ὥστε καὶ τὰ στερεὰ παραλληλεπίπεδα
 10 τὰ ἀπὸ τῶν εἰρημένων πρισμάτων ἀναγραφόμενα ἰσοῦσθαι καὶ πρὸς ἀλλήλα [εἰσιν] ὡς αἱ βάσεις· καὶ τὰ ἡμίση ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $ΑΞΓ$ βάσις πρὸς τὴν $ΡΦΖ$ βάσιν, οὕτως τὰ εἰρημένα πρίσματα πρὸς ἀλλήλα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15

ε'.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὔσαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, ὧν βάσεις
 20 μὲν τὰ $ΑΒΓ, ΔΕΖ$ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ $Η, Θ$ σημεῖα· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ $ΑΒΓ$ βάσις πρὸς τὴν $ΔΕΖ$ βάσιν, οὕτως ἡ $ΑΒΓΗ$ πυραμὶς πρὸς τὴν $ΔΕΖΘ$ πυραμίδα.

Εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ὡς ἡ $ΑΒΓ$ βάσις πρὸς τὴν $ΔΕΖ$
 25 βάσιν, οὕτως ἡ $ΑΒΓΗ$ πυραμὶς πρὸς τὴν $ΔΕΖΘ$ πυραμίδα, ἔσται ὡς ἡ $ΑΒΓ$ βάσις πρὸς τὴν $ΔΕΖ$ βάσιν, οὕτως ἡ $ΑΒΓΗ$ πυραμὶς ἥτοι πρὸς ἐλασσόν

1. ἐπίπεδον ἀγομένη V. 3. ἐπίπεδον ἀγομένη V.
 5. ἄρα εἰσὶ V. αἱ] om. Pq. 7. κάθετοι] in ras. V, seq.
 ras. dimid. lin. (ἴσαι . . . ἀπὸ τῶν ὁμν). ἐστὶ] om. P.

dicularis ab H ad planum $AB\Gamma$ ducta plano OMN in duas partes aequales secabitur. eadem de causa etiam perpendicularis a Θ ad planum ΔEZ ducta in duas partes aequales secabitur plano ΣTT . et perpendiculares ab H , Θ ad plana $AB\Gamma$, ΔEZ ductae aequales sunt. itaque etiam perpendiculares a triangulis OMN , ΣTT ad $AB\Gamma$, ΔEZ ductae aequales sunt. quare prismata, quorum bases sunt trianguli $\Delta \Xi \Gamma$, $P\Phi Z$, iis autem oppositi OMN , ΣTT , aequales altitudines habent. itaque solida parallelepipeda a prismatis, quae diximus, constructa eandem habent altitudinem et eam inter se rationem habent quam bases [XI, 32]. itaque etiam prismata, quae diximus, ut quae dimidia sint parallelepipedorum [XI, 28], eam rationem habent, quam $\Delta \Xi \Gamma : P\Phi Z$; quod erat demonstrandum.¹⁾

V.

Pyramides sub eadem altitudine et bases triangulas habentes eam inter se rationem habent quam bases.

Sint pyramides sub eadem altitudine, quarum bases sint trianguli $AB\Gamma$, ΔEZ , uertices autem H , Θ puncta. dico esse

$$AB\Gamma : \Delta EZ = AB\Gamma H : \Delta EZ \Theta.$$

Nam si non est $AB\Gamma : \Delta EZ = AB\Gamma H : \Delta EZ \Theta$, erit ut $AB\Gamma : \Delta EZ$, ita pyramis $AB\Gamma H$ aut ad so-

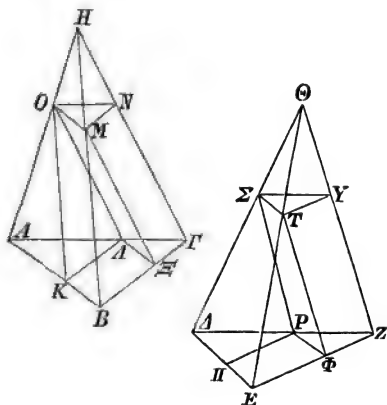
1) Hoc quoque lemma et per se et propter orationis genus suspectum est.

$\beta\acute{\alpha}\sigma\iota\varsigma$ Bq, sed corr. 11. $\kappa\alpha\iota$] (prius) $\tau\upsilon\gamma\chi\acute{\alpha}\nu\omicron\nu\tau\alpha$ Theon (BVq). $\epsilon\iota\sigma\iota\nu$] om. P. 12. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$] $\epsilon\sigma\tau\alpha\iota$ BVq. 13. $\omicron\upsilon\tau\omega$ Bq. 17. $\alpha\lambda\lambda\eta\lambda\alpha$ P, corr. m. 2. 24. ΔEZ — 25. $\tau\eta\nu$] mg. m. 2 B. 25. $\Delta EZ\Theta$ $\pi\upsilon\rho\alpha\mu\acute{\iota}\delta\alpha$] et in textu et mg. m. 2 B. 27. $\eta\tau\omicron\iota$] η V.

τι τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεὸν ἢ πρὸς μείζον.
 ἔστω πρότερον πρὸς ἑλασσον τὸ Χ, καὶ διηρησθῶ ἡ
 ΔΕΖΘ πυραμὶς εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις
 καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· τὰ δὲ
 5 δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἡμισυ τῆς ὅλης
 πυραμίδος. καὶ πάλιν αἱ ἐκ τῆς διαιρέσεως γινόμεναι
 πυραμίδες ὁμοίως διηρησθῶσαν, καὶ τοῦτο αἰεὶ γινέ-
 σθω, ἕως οὗ λειφθῶσί τινες πυραμίδες ἀπὸ τῆς ΔΕΖΘ
 πυραμίδος, αἷ εἰσιν ἐλάττονες τῆς ὑπεροχῆς, ἣ ὑπερ-
 10 ἔχει ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς τοῦ Χ στερεοῦ. λελειφθῶσαν
 καὶ ἔστωσαν λόγου ἕνεκεν αἱ ΔΠΡΣ, ΣΤΤΘ· λοιπὰ
 ἄρα τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα μείζονά ἐστι
 τοῦ Χ στερεοῦ. διηρησθῶ καὶ ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς
 ὁμοίως καὶ ἰσοπληθῶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι· ἐστὶν ἄρα
 15 ὥς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὰ
 ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ
 πυραμίδι πρίσματα. ἀλλὰ καὶ ὥς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς
 τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὸ
 Χ στερεόν· καὶ ὥς ἄρα ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὸ Χ
 20 στερεόν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι πρίσματα
 πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα· ἐναλλὰξ
 ἄρα ὥς ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὰ ἐν αὐτῇ πρίσματα,
 οὕτως τὸ Χ στερεὸν πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι
 πρίσματα. μείζων δὲ ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῶν ἐν αὐτῇ
 25 πρισμάτων· μείζον ἄρα καὶ τὸ Χ στερεὸν τῶν ἐν τῇ
 ΔΕΖΘ πυραμίδι πρισμάτων. ἀλλὰ καὶ ἑλαττον· ὅπερ

6. γινόμεναι q. 7. γιγνέσθω BV. 8. λειφθῶσι] -ει-
 corr. ex η V, mut. in η m. 1 Bq; λειφθῶσιν PB. ἀπό — 9. πυ-
 ραμίδος] mg. m. 2 BV, om. q. 9. ἐλάσσους BVq. 10. λε-
 λειφθῶσαν] -ει- corr. ex η V, mut. in η q. 11. ΕΤΤΘ B,
 corr. m. 2. 12. ἐστὶν P. 17. ἡ] post ins. V. 19. καὶ
 ὥς — 20. στερεόν] om. q; suo loco m. 1, sed alio atramento

lidum minus pyramide $\triangle EZ\Theta$ aut ad maius. sit prius ad minus X , et pyramis $\triangle EZ\Theta$ in duas pyramides inter se aequales totique similes et duo prismata aequalia diuidatur. itaque duo prismata maiora sunt quam dimidia totius pyramidis [prop. III]. et rursus pyramides ex diuisione ortae similiter diuidantur, et hoc semper fiat, donec e pyramide $\triangle EZ\Theta$ relinquantur pyramides quaedam minores excessu, quo pyramis $\triangle EZ\Theta$ excedit spatium X [X, 1]. relinquantur et sint uerbi causa $\triangle \Pi P\Sigma$, $\triangle TT\Theta$. reliqua igitur prismata pyramidis $\triangle EZ\Theta$ maiora sunt spatio X . iam etiam pyramis $\triangle AB\Gamma H$ similiter et toties diuidatur,



quoties $\triangle EZ\Theta$ pyramis. erunt igitur ut $AB\Gamma : \triangle EZ$, ita prismata pyramidis $\triangle AB\Gamma H$ ad prismata pyramidis $\triangle EZ\Theta$ [prop. IV]. uerum $AB\Gamma : \triangle EZ = AB\Gamma H : X$. quare etiam ut $AB\Gamma H : X$, ita prismata pyramidis $\triangle AB\Gamma H$ ad prismata pyramidis $\triangle EZ\Theta$.

permutando igitur [V, 16] ut pyramis $\triangle AB\Gamma H$ ad sua prismata, ita X solidum ad prismata pyramidis $\triangle EZ\Theta$. sed pyramis $\triangle AB\Gamma H$ maior est prismatis. itaque etiam X solidum maius est prismatis pyramidis $\triangle EZ\Theta$ [V, 14].

B. 19. ἄρα ἦ] corr. ex ἦ ἄρα m. 1 V, ἄρα ὅς ἦ P.
23. οὔτω B.

ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὥς ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν ΔEZ βάσιν, οὕτως ἡ $AB\Gamma H$ πυραμὶς πρὸς ἑλασσόν τι τῆς $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδος στερεόν. ὁμοίως δὲ δευ-
 5 δ δείχεται, ὅτι οὐδὲ ὥς ἡ ΔEZ βάσις πρὸς τὴν $AB\Gamma$ βάσιν, οὕτως ἡ $\Delta EZ\Theta$ πυραμὶς πρὸς ἑλαττόν τι τῆς $AB\Gamma H$ πυραμίδος στερεόν.

Λέγω δὴ, ὅτι οὐκ ἔστιν οὐδὲ ὥς ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν ΔEZ βάσιν, οὕτως ἡ $AB\Gamma H$ πυραμὶς πρὸς μεῖζόν τι τῆς $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδος στερεόν.

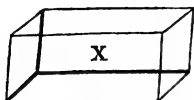
- 10 $\epsilon\iota$ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ X ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὥς ἡ ΔEZ βάσις πρὸς τὴν $AB\Gamma$ βάσιν, οὕτως τὸ X στερεόν πρὸς τὴν $AB\Gamma H$ πυραμίδα. ὥς δὲ τὸ X στερεόν πρὸς τὴν $AB\Gamma H$ πυραμίδα, οὕτως ἡ $\Delta EZ\Theta$ πυραμὶς πρὸς ἑλασσόν τι τῆς $AB\Gamma H$ πυρα-
 15 μίδος, ὥς ἔμπροσθεν ἐδείχθη· καὶ ὥς ἄρα ἡ ΔEZ βάσις πρὸς τὴν $AB\Gamma$ βάσιν, οὕτως ἡ $\Delta EZ\Theta$ πυραμὶς πρὸς ἑλασσόν τι τῆς $AB\Gamma H$ πυραμίδος· ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὥς ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν ΔEZ βάσιν, οὕτως ἡ $AB\Gamma H$ πυραμὶς πρὸς μεῖζόν τι
 20 τῆς $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδος στερεόν. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἑλασσόν. ἔστιν ἄρα ὥς ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν ΔEZ βάσιν, οὕτως ἡ $AB\Gamma H$ πυραμὶς πρὸς τὴν $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ς'.

- 25 $\alpha\iota$ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὔσαι πυραμίδες καὶ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς $\alpha\iota$ βάσεις.

2. ἑλαττον V. 3. $\Delta EZ\Theta$] Θ eras. P; $\Delta EZH\Theta$ q.
 δείξομεν V. 5. ἑλασσον B. 11. ἡ βάσις ἡ ΔEZ Vq.

uerum etiam minus est; quod fieri non potest. ergo non est ut $AB\Gamma : \triangle EZ$, ita pyramis $AB\Gamma H$ ad minus aliquod pyramide $\triangle EZ\odot$ solidum. similiter demonstrabimus, ne $\triangle EZ\odot$ quidem pyramidem ad minus aliquod pyramide $AB\Gamma H$ solidum eam rationem habere quam $\triangle EZ : AB\Gamma$.



Iam dico, ne ad maius quidem aliquod pyramide $\triangle EZ\odot$ solidum pyramidem $AB\Gamma H$ eam rationem habere quam $AB\Gamma : \triangle EZ$.

Nam si fieri potest, habeat ad maius aliquod X . e contrario igitur [V, 7 coroll.]

$$\triangle EZ : AB\Gamma = X : AB\Gamma H.$$

uerum ut $X : AB\Gamma H$, ita $\triangle EZ\odot$ pyramis ad minus aliquod pyramide $AB\Gamma H$, ut supra demonstratum est [prop. II lemma]. quare etiam ut $\triangle EZ : AB\Gamma$, ita pyramis $\triangle EZ\odot$ ad minus aliquod pyramide $AB\Gamma H$; quod absurdum esse demonstraui. itaque ne ad maius quidem aliquod pyramide $\triangle EZ\odot$ solidum pyramis $AB\Gamma H$ eam rationem habet quam $AB\Gamma : \triangle EZ$. demonstraui autem, eam ne ad minus quidem hanc habere rationem. erit igitur

$$AB\Gamma : \triangle EZ = AB\Gamma H : \triangle EZ\odot;$$

quod erat demonstrandum.

VI.

Pyramides sub eadem altitudine et polygonas bases habentes eam inter se rationem habent quam bases.

17. πυραμίδος στερεόν q; στερεόν add. m. 2 V. 21. βάσις] supra scr. m. 1 P. 25. πυραμίδες ούσαι B. ούσαι] om. V.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, ὧν [αί] βάσεις μὲν τὰ $ABΓΔE$, $ZHΘKΛ$ πολύγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ M , N σημεῖα· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ $ABΓΔE$ βάσις πρὸς τὴν $ZHΘKΛ$ βάσιν, οὕτως ἡ $ABΓΔEM$ 5 πυραμὶς πρὸς τὴν $ZHΘKAN$ πυραμίδα.

Ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ $ΑΓ$, $ΑΔ$, $ZΘ$, ZK . ἐπεὶ οὖν δύο πυραμίδες εἰσὶν αἱ $ABΓM$, $ΑΓΔM$ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις καὶ ὕψος ἴσον, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $ABΓ$ βάσις πρὸς 10 τὴν $ΑΓΔ$ βάσιν, οὕτως ἡ $ABΓM$ πυραμὶς πρὸς τὴν $ΑΓΔM$ πυραμίδα. καὶ συνθέντι ὡς ἡ $ABΓΔ$ βάσις πρὸς τὴν $ΑΓΔ$ βάσιν, οὕτως ἡ $ABΓΔM$ πυραμὶς πρὸς τὴν $ΑΓΔM$ πυραμίδα. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ $ΑΓΔ$ βάσις πρὸς τὴν $ΑΔE$ βάσιν, οὕτως ἡ $ΑΓΔM$ πυραμὶς 15 πρὸς τὴν $ΑΔEM$ πυραμίδα. δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ $ABΓΔ$ βάσις πρὸς τὴν $ΑΔE$ βάσιν, οὕτως ἡ $ABΓΔM$ πυραμὶς πρὸς τὴν $ΑΔEM$ πυραμίδα. καὶ συνθέντι πάλιν, ὡς ἡ $ABΓΔE$ βάσις πρὸς τὴν $ΑΔE$ βάσιν, οὕτως ἡ $ABΓΔEM$ πυραμὶς πρὸς τὴν $ΑΔEM$ πυραμίδα. 20 ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ὡς ἡ $ZHΘKΛ$ βάσις πρὸς τὴν $ZHΘ$ βάσιν, οὕτως καὶ ἡ $ZHΘKAN$ πυραμὶς πρὸς τὴν $ZHΘN$ πυραμίδα. καὶ ἐπεὶ δύο πυραμίδες εἰσὶν αἱ $ΑΔEM$, $ZHΘN$ τριγώνους ἔχουσαι

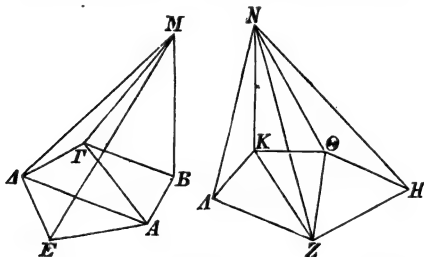
1. αἱ] deleo. ὧν — 2. κορυφαί] πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς $ABΓΔE$, $ZHΘKΛ$, κορυφάς Theon (BVq). 6. ἐπεξεύχθ. — 10. βάσιν] διηρησθῶ γὰρ ἡ μὲν $ABΓΔE$ βάσις εἰς τὰ $ABΓ$, $ΑΓΔ$, $ΑΔE$ τρίγωνα, ἡ δὲ $ZHΘKΛ$ (N eras. V) εἰς τὰ $ZHΘ$, $ZΘK$, $ZKΛ$ τρίγωνα, καὶ νενοήσθωσαν ἅφ' ἑκάστου τριγώνου πυραμίδες ἰσονηεῖς (-εις corr. ex -οι m. rec. V) ταῖς ἐξ ἀρχῆς πυραμίσι (πυραμίσιν B) καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ $ABΓ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΑΓΔ$ τρίγωνον Theon (BVq). 11. συνθέντα ἄρα ὡς V. ἡ — 12. βάσιν] mg. γρ. τραπέzion et γρ. τρίγωνον m. 1 P; τὸ $ABΓΔ$ τραπέzion πρὸς τὸ $ΑΓΔ$ τρίγωνον Theon (BVq).

Sint sub eadem altitudine pyramides, quarum bases sint $AB\Gamma\Delta E$, $ZH\Theta K\Lambda$ polygona, uertices autem M , N puncta. dico, esse

$$AB\Gamma\Delta E : ZH\Theta K\Lambda = AB\Gamma\Delta EM : ZH\Theta K\Lambda N.$$

ducantur enim AG , AD , $Z\Theta$, ZK . iam quoniam duae pyramides sunt $AB\Gamma M$, $A\Gamma\Delta M$ triangulas bases habentes et altitudinem aequalem, eam inter se rationem habent quam bases [prop. V]. erit igitur $AB\Gamma : A\Gamma\Delta = AB\Gamma M : A\Gamma\Delta M$. et componendo [V, 18] $AB\Gamma\Delta : A\Gamma\Delta = AB\Gamma\Delta M : A\Gamma\Delta M$. uerum etiam [prop. V] $A\Gamma\Delta : A\Delta E = A\Gamma\Delta M : A\Delta EM$. itaque ex aequo [V, 22] $AB\Gamma\Delta : A\Delta E = AB\Gamma\Delta M : A\Delta EM$. et rursum componendo [V, 18] $AB\Gamma\Delta E : A\Delta E = AB\Gamma\Delta EM : A\Delta EM$. similiter demonstrabimus, esse etiam

$$ZH\Theta K\Lambda : ZH\Theta = ZH\Theta K\Lambda N : ZH\Theta N.$$



et quoniam duae pyramides sunt $A\Delta EM$, $ZH\Theta N$ triangulas bases habentes et altitudinem aequalem,

13. $A\Gamma\Delta M$] supra Δ scr. E m. 2 B. ἡ — 14. βάσιν] τὸ $A\Gamma\Delta$ $\tau\acute{\rho}\iota\gamma\omega\upsilon\omicron\nu$ πρὸς τὸ $A\Delta E$ $\tau\acute{\rho}\iota\gamma\omega\upsilon\omicron\nu$ Theon (BVq). 15. ἄρα ἐστὶν Theon (BVq). 17. $A\Delta EM$] M supra scr. m. rec. P. 18. βάσιν] om. Bq. 19. $AB\Gamma\Delta E$ add. M m. 2 V. 20. ὁμοίως — ὅτι] διὰ τὰ αὐτὰ δὴ Theon (BVq). 21. $ZH\Theta$] P; $ZK\Lambda$ Theon (Bq et Λ e corr. m. 1 V). 22. $ZK\Lambda N$ Theon (Bq et N in ras. V). 23. $ZK\Lambda N$ Theon (BVq).

βάσεις καὶ ὕψος ἴσον, ἔστιν ἄρα ὥς ἡ $ΑΔΕ$ βάσις
 πρὸς τὴν $ZHΘ$ βάσιν, οὕτως ἡ $ΑΔΕΜ$ πυραμὶς πρὸς
 τὴν $ZHΘΝ$ πυραμίδα. ἀλλ' ὥς ἡ $ΑΔΕ$ βάσις πρὸς
 τὴν $ΑΒΓΔΕ$ βάσιν, οὕτως ἦν ἡ $ΑΔΕΜ$ πυραμὶς
 5 πρὸς τὴν $ΑΒΓΔΕΜ$ πυραμίδα. καὶ δι' ἴσον ἄρα ὥς
 ἡ $ΑΒΓΔΕ$ βάσις πρὸς τὴν $ZHΘ$ βάσιν, οὕτως ἡ
 $ΑΒΓΔΕΜ$ πυραμὶς πρὸς τὴν $ZHΘΝ$ πυραμίδα. ἀλλὰ
 μὴν καὶ ὥς ἡ $ZHΘ$ βάσις πρὸς τὴν $ZHΘΚΑ$ βάσιν,
 οὕτως ἦν καὶ ἡ $ZHΘΝ$ πυραμὶς πρὸς τὴν $ZHΘΚΑΝ$
 10 πυραμίδα. καὶ δι' ἴσον ἄρα ὥς ἡ $ΑΒΓΔΕ$ βάσις
 πρὸς τὴν $ZHΘΚΑ$ βάσιν, οὕτως ἡ $ΑΒΓΔΕΜ$ πυραμὶς
 πρὸς τὴν $ZHΘΚΑΝ$ πυραμίδα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ξ'.

Πᾶν πρίσμα τρίγωνον ἔχον βάσιν διαι-
 15 ρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας· ἀλλήλαις τρι-
 γώνους βάσεις ἐχούσας.

Ἔστω πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον,
 ἀπεναντίον δὲ τὸ $ΔΕΖ$ · λέγω, ὅτι τὸ $ΑΒΓΔΕΖ$
 πρίσμα διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις
 20 τριγώνους ἐχούσας βάσεις.

Ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ $ΒΔ$, $ΕΓ$, $ΓΔ$. ἐπεὶ παραλ-
 ληλόγραμμόν ἐστι τὸ $ΑΒΕΔ$, διάμετρος δὲ αὐτοῦ
 ἐστὶν ἡ $ΒΔ$, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΒΔ$ τρίγωνον τῷ
 $ΕΒΔ$ τριγώνῳ· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἥς βάσις μὲν τὸ
 25 $ΑΒΔ$ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ $Γ$ σημεῖον, ἴση ἐστὶ
 πυραμίδι, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $ΔΕΒ$ τρίγωνον, κορυφὴ
 δὲ τὸ $Γ$ σημεῖον. ἀλλὰ ἡ πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ

1. καὶ ὕψος ἴσον] καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος Theon (BVq).'

2. ZKA Theon (BVq), ut lin. 6, 8. 3. $ZKAN$ Theon (BVq),
 ut lin. 7, 9. ἀλλ' ὥς — 5. πυραμίδα] ἐπεὶ οὖν ἐστὶν (om.)

erit [prop. V] $\triangle ADE : ZH\Theta = \triangle AEM : ZH\Theta N$. uerum $\triangle ADE : \triangle B\Gamma\Delta E = \triangle AEM : \triangle B\Gamma\Delta EM$. quare etiam ex aequo [V, 22] $\triangle B\Gamma\Delta E : ZH\Theta = \triangle B\Gamma\Delta EM : ZH\Theta N$. uerum etiam $ZH\Theta : ZH\Theta K\Lambda = ZH\Theta N : ZH\Theta K\Lambda N$. quare etiam ex aequo [V, 22] $\triangle B\Gamma\Delta E : ZH\Theta K\Lambda = \triangle B\Gamma\Delta EM : ZH\Theta K\Lambda N$; quod erat demonstrandum.

VII.

Omne prisma triangulam basim habens in tres pyramides inter se aequales diuiditur triangulas bases habentes.

Sit prisma, cuius basis sit $\triangle B\Gamma$ triangulus, ei autem oppositus $\triangle EZ$. dico, prisma $\triangle B\Gamma\triangle EZ$ in tres pyramides inter se aequales diuidi triangulas bases habentes.

ducantur enim $B\Delta$, $E\Gamma$, $\Gamma\Delta$. quoniam parallelogrammum est $\triangle ABE\Delta$, diametrus autem eius $B\Delta$, erit $\triangle ABA = \triangle EBA$ [I, 34]. quare etiam pyramis, cuius basis est triangulus $\triangle ABA$, uertex autem Γ punctum, aequalis est pyramidi, cuius basis est triangulus $\triangle EBA$, uertex autem Γ punctum [prop. V]. uerum

VII. Hero stereom. II, 39.

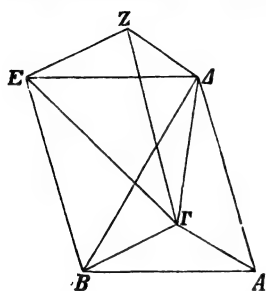
Bq) ὡς ἡ $\triangle B\Gamma\Delta E$ βάσις πρὸς τὴν $\triangle ADE$ βάσιν, οὕτως ἡ (ἢν ἡ q) $\triangle B\Gamma\Delta EM$ πυραμὶς πρὸς τὴν $\triangle AEM$ πυραμίδα Theon (BVq);
dein add. ὡς δὲ ἡ $\triangle ADE$ βάσις πρὸς τὴν $\triangle K\Lambda$ βάσιν, οὕτως ἡ $\triangle AEM$ πυραμὶς πρὸς τὴν $\triangle K\Lambda N$ πυραμίδα Vq et mg. m. 2 B.
5. καὶ] om. Theon (BVq). 6. βάσιν] om. BVq.
οὕτως] om. q. 8. $ZH\Theta K\Lambda$] $K\Lambda$ add. B m. 2. 9. ἢν] om.
V. 10. ἄρα] πάλιν ἐστὶν Bq; ἄρα ἐστὶν V. 12. $ZH\Theta K\Lambda M$
q. 17. βάσεις q. 20. βάσεις ἐχούσας V. 21. καὶ ἐπεὶ
Bq. 24. $\triangle ABA$ B. μὲν] om. V. 25. ἐστὶν PB, ἐστὶ τῇ
V. 26. ἐστὶν B. 27. ἀλλὰ — p. 174, 1. σημειῶν] om. q.
27. ἀλλ' B. ἦ] om. V.

- τὸ $\triangle E B$ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Γ σημείον, ἡ αὐτὴ
 ἐστὶ πυραμίδι, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $E B \Gamma$ τρίγωνον,
 κορυφή δὲ τὸ Δ σημείον· ὑπὸ γὰρ τῶν αὐτῶν ἐπι-
 πέδων περιέχεται. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἥς βάσις μὲν
 5 ἐστὶ τὸ $A B \Delta$ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Γ σημείον,
 ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $E B \Gamma$ τρίγω-
 νον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημείον. πάλιν, ἐπεὶ παραλλη-
 λόγραμμὸν ἐστὶ τὸ $Z \Gamma B E$, διάμετρος δὲ ἐστὶν αὐτοῦ
 ἡ ΓE , ἴσον ἐστὶ τὸ $\Gamma E Z$ τρίγωνον τῷ $\Gamma B E$ τρι-
 10 γώνῳ. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $B \Gamma E$
 τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημείον, ἴση ἐστὶ πυρα-
 μίδι, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $E \Gamma Z$ τρίγωνον, κορυφή
 δὲ τὸ Δ σημείον. ἡ δὲ πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ
 τὸ $B \Gamma E$ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημείον, ἴση
 15 ἐδείχθη πυραμίδι, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $A B \Delta$ τρίγω-
 νον, κορυφή δὲ τὸ Γ σημείον· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἥς
 βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $\Gamma E Z$ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ
 σημείον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἥς βάσις μὲν [ἐστὶ] τὸ
 $A B \Delta$ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Γ σημείον· διήρηται
 20 ἄρα τὸ $A B \Gamma \Delta E Z$ πρίσμα εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας
 ἀλλήλαις τριγώνους ἐχούσας βάσεις.

Καὶ ἐπεὶ πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $A B \Delta$ τρί-
 γωνον, κορυφή δὲ τὸ Γ σημείον, ἡ αὐτὴ ἐστὶ πυρα-
 μίδι, ἥς βάσις τὸ $\Gamma A B$ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ
 25 σημείον· ὑπὸ γὰρ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων περιέχονται·
 ἡ δὲ πυραμὶς, ἥς βάσις τὸ $A B \Delta$ τρίγωνον, κορυφή

2. ἐστὶ] (prius) ἐστὶν PB; ἐστὶ τῇ V. 4. καί] om. q;
 καὶ ἡ V. 6. ἐστὶ] ἐστὶν PB; ἐστὶ τῇ V. 8. ἐστὶν] om.
 B V q. αὐτοῦ ἐστὶν B q. 9. E Γ V. 12. E Γ Z] Γ Z in
 ras. V. 14. B E Γ V. Δ] in ras. m. 2 B. 18. ἐστὶ]
 om. P. 21. βάσεις ἐχούσαις, eras. ι, V. 23. ἐστὶ τῇ V.

pyramis, cuius basis est $\triangle E\Gamma B$ triangulus, uertex autem Δ punctum, eadem est ac pyramis, cuius basis est $\triangle E\Gamma A$ triangulus, uertex autem Δ punctum; nam iisdem planis continentur. quare etiam pyramis, cuius basis est



$\triangle AB\Delta$ triangulus, uertex autem Γ punctum, aequalis est pyramidi, cuius basis est $\triangle E\Gamma B$ triangulus, uertex autem Δ punctum. rursus quoniam parallelogrammum est $Z\Gamma BE$, et diametrus eius est ΓE , erit $\angle EZ\Gamma = \angle B\Gamma E$ [I, 34]. quare etiam pyramis, cuius basis est

$\triangle B\Gamma E$ triangulus, uertex autem Δ punctum, aequalis est pyramidi, cuius basis est $\triangle E\Gamma Z$ triangulus, uertex autem Δ punctum. demonstrauius autem, pyramidem, cuius basis sit $\triangle B\Gamma E$ triangulus, uertex autem Δ punctum, aequalem esse pyramidi, cuius basis sit $\triangle AB\Delta$ triangulus, uertex autem Γ punctum. quare etiam pyramis, cuius basis est $\triangle \Gamma EZ$ triangulus, uertex autem Δ punctum, aequalis est pyramidi, cuius basis est $\triangle AB\Delta$ triangulus, uertex autem Γ punctum. ergo prisma $AB\Gamma\Delta EZ$ in tres pyramides aequales diuisum est triangulas bases habentes.

et quoniam pyramis, cuius basis est $\triangle AB\Delta$ triangulus, uertex autem Γ punctum, eadem est ac pyramis, cuius basis est $\triangle \Gamma AB$ triangulus, uertex autem Δ punctum (nam iisdem planis continentur), pyramidem autem,

24. τό] (prius) μὲν τό q; μὲν ἐστὶ τό V. ΓAB] e corr. V.
26. τό] ἐστὶ τό V.

δὲ τὸ Γ σημείον, τρίτον ἐδείχθη τοῦ πρίσματος, οὐ
 βάσις τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔEZ ,
 καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἥς βάσις τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον, κο-
 ρυφὴ δὲ τὸ Δ σημείον, τρίτον ἐστὶ τοῦ πρίσματος
 5 τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον,
 ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔEZ .

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον
 μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος
 10 αὐτῇ καὶ ὕψος ἴσον [ἐπειδὴ περὶ κἂν ἑτερόν τι σχῆμα
 εὐθύγραμμον ἔχη ἢ βάσις τοῦ πρίσματος, τοιοῦτο καὶ
 τὸ ἀπεναντίον, καὶ διαιρεῖται εἰς πρίσματα τρίγωνα
 ἔχοντα τὰς βάσεις καὶ τὰ ἀπεναντίον, καὶ ὥς ἡ ὅλη
 βάσις πρὸς ἑκάστων]· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15

ἡ'.

Αἱ ὁμοίαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι
 βάσεις ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰς τῶν ὁμολό-
 γων πλευρῶν.

Ἔστωσαν ὁμοίαι καὶ ὁμολῶς κείμεναι πυραμίδες,
 20 ὧν βάσεις μὲν εἰσι τὰ $AB\Gamma$, ΔEZ τρίγωνα, κορυφαὶ
 δὲ τὰ H , Θ σημεία· λέγω, ὅτι ἡ $AB\Gamma H$ πυραμὶς
 πρὸς τὴν $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει
 ἥπερ ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν EZ .

1. βάσις ἐστὶ τὸ V . 3. ἡ] om. V . 5. τοῦ — αὐτὴν] οὐ
 βάσις V . 11. ἡ — πρίσματος] βάσιν τὸ πρίσμα q . τοιοῦτο]
 om. BVq . 12. τό] τὸ αὐτό Bq et corr. ex αὐτό τό V .
 καί] om. BVq . τριγώνους, -ους e corr. m. 2 V . 13. τὰς]
 om. q . καί] om. q . τὰ] τὰς, q . καὶ ὥς — 14. δεῖξαι]
 om. Theon (BVq). 17. εἰσὶν B . 20. βάσις B , corr. m. 2.
 κορυφὴ B , corr. m. 1. 21. δέ] δὲ αὐτῶν ἔστω V .

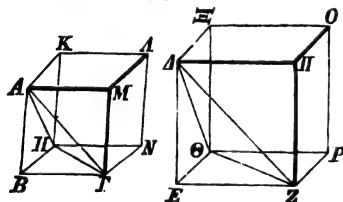
cuius basis est $AB\Delta$ triangulus, uertex autem Γ punctum, tertiam partem esse demonstrauius prismatis, cuius basis sit $AB\Gamma$ triangulus, ei autem oppositus ΔEZ , etiam pyramis, cuius basis est $AB\Gamma$ triangulus, uertex autem Δ punctum, tertia pars est prismatis eandem basim habentis triangulum $AB\Gamma$, ei autem oppositum ΔEZ .

Corollarium.

Hinc manifestum est, omnem pyramidem tertiam partem esse prismatis, quod eandem basim habeat et altitudinem aequalem.¹⁾ — quod erat demonstrandum.

VIII.

Similes pyramides triangulas bases habentes triplicatam inter se rationem habent quam latera correspondentia.



Sint pyramides similes et similiter positae, quarum bases sint $AB\Gamma$, ΔEZ trianguli, uertices autem H , Θ puncta. dico, esse $AB\Gamma H : \Delta EZ\Theta = B\Gamma^3 : EZ^3$.

1) Quae sequuntur uerba lin. 10—14 sine dubio subditiua sunt. scripturam codicis P in fine lacunam habere, recte significauit August; nam uerba $\kappa\alpha\iota \omega\varsigma \eta \delta\lambda\eta \beta\acute{\alpha}\sigma\iota\varsigma \pi\rho\acute{o}\varsigma \xi\kappa\alpha\sigma\tau\omicron\nu$ principium est amplioris demonstrationis. cetera in P satis emendate leguntur, cum in codd. Theoninis omni sensu careant. sed etiamsi sana essent omnia, haec uerba tamen suspecta essent, quia, ut saepius monui, demonstrationem corollarii adferre nihil adtinet.

Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ $BHMA$, $E\Theta PO$ στερεὰ
 παραλληλεπίπεδα. καὶ ἐπεὶ ὁμοία ἐστὶν ἡ $ABGH$
 πυραμὶς τῇ $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδι, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν
 ὑπὸ $AB\Gamma$ γωνία τῇ ὑπὸ ΔEZ γωνίᾳ, ἡ δὲ ὑπὸ HBG
 5 τῇ ὑπὸ ΘEZ , ἡ δὲ ὑπὸ ABH τῇ ὑπὸ $\Delta E\Theta$, καὶ
 ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΔE , οὕτως ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν
 EZ , καὶ ἡ BH πρὸς τὴν $E\Theta$. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ
 AB πρὸς τὴν ΔE , οὕτως ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν EZ , καὶ
 περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὁμοιον
 10 ἄρα ἐστὶ τὸ BM παραλληλόγραμμον τῷ $E\Pi$ παραλ-
 ληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν BN τῷ
 EP ὁμοίον ἐστὶ, τὸ δὲ BK τῷ $E\Xi$. τὰ τρία ἄρα τὰ
 MB , BK , BN τρισὶ τοῖς $E\Pi$, $E\Xi$, EP ὁμοιά ἐστὶν.
 ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τὰ MB , BK , BN τρισὶ τοῖς ἀπεναν-
 15 τίον ἴσα τε καὶ ὁμοιά ἐστὶν, τὰ δὲ τρία τὰ $E\Pi$, $E\Xi$,
 EP τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὁμοιά ἐστὶν. τὰ
 $BHMA$, $E\Theta PO$ ἄρα στερεὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων
 ἴσων τὸ πλῆθος περιέχεται. ὁμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ $BHMA$
 στερεὸν τῷ $E\Theta PO$ στερεῷ. τὰ δὲ ὁμοία στερεὰ παρ-
 20 αλληλεπίπεδα ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων
 πλευρῶν. τὸ $BHMA$ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ $E\Theta PO$
 στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ὁμόλογος
 πλευρὰ ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τὴν EZ .
 ὡς δὲ τὸ $BHMA$ στερεὸν πρὸς τὸ $E\Theta PO$ στερεόν,
 25 οὕτως ἡ $ABGH$ πυραμὶς πρὸς τὴν $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδα,
 ἐπειδήπερ ἡ πυραμὶς ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ στερεοῦ
 διὰ τὸ καὶ τὸ πρίσμα ἡμισυ ὃν τοῦ στερεοῦ παραλ-
 ληλεπιπέδου τριπλάσιον εἶναι τῆς πυραμίδος. καὶ ἡ

2. ἡ] bis P, corr. m. 1. 5. ΘEZ] e corr. V. 9. ἐστὶν
 q. 10. παραλληλόγραμμον] (prius) om. V. 13. ἐστὶ V.

Expleantur enim solida parallelepipeda $BHMA$, $E\Theta\Pi O$. et quoniam similis est $AB\Gamma H$ pyramis pyramidi $\Delta EZ\Theta$, erit $\angle AB\Gamma = \angle EZ\Theta$, $\angle HB\Gamma = \angle \Theta EZ$, $\angle ABH = \angle E\Theta$, et est $AB : \Delta E = B\Gamma : EZ = BH : E\Theta$ [XI def. 9]. et quoniam est $AB : \Delta E = B\Gamma : EZ$, et latera angulos aequales comprehendentia proportionalia sunt, erit $BM \sim E\Pi$ [p. 83 not. 1]. eadem de causa erit etiam $BN \sim EP$, $BK \sim E\Xi$. itaque tria MB , BK , BN tribus $E\Pi$, $E\Xi$, EP similia sunt. uerum tria MB , BK , BN tribus oppositis aequalia sunt et similia, tria autem $E\Pi$, $E\Xi$, EP tribus oppositis aequalia sunt et similia [XI, 24]. itaque solida $BHMA$, $E\Theta\Pi O$ planis similibus numero aequalibus continentur. ergo $BHMA \sim E\Theta\Pi O$ [XI def. 9]. similia autem solida parallelepipeda triplicatam rationem habent quam latera correspondentia [XI, 33]. itaque $BHMA : E\Theta\Pi O = B\Gamma^3 : EZ^3$. sed $BHMA : E\Theta\Pi O = AB\Gamma H : \Delta EZ\Theta$, quoniam pyramis sexta pars est solidi, propterea quod prisma, quod dimidium est so-

15. ἴσα τε καὶ] om. V. ἔστι q, comp. V. τὰ] (alt.) om. B.

16. τρισὶ — ἔστιν] ἴσα τε καὶ ὅμοια τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἐστὶ BVq. 16. ἔστι P. 17. στερεὰ παραλληλοεπίπεδα V.

19. στερεόν] om. V. 20. ἐστὶν B. 22. τὸν τριπλασίονα q.

26. ἕκτον] ε q. 27. παραλληλοεπιπ. V.

ΑΒΓΗ ἄρα πυραμὶς πρὸς τὴν *ΔΕΖΘ* πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ *ΒΓ* πρὸς τὴν *ΕΖ*· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

- Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι καὶ αἱ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις· ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. διαιρεθεῖσθαι γὰρ αὐτῶν εἰς τὰς ἐν αὐταῖς πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας τῷ καὶ τὰ ὅμοια πολύγωνα τῶν βάσεων εἰς ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖσθαι καὶ ἴσα τῷ πληθύνει καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις ἔσται ὡς [ἡ] ἐν τῇ ἑτέρᾳ μία πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν πρὸς τὴν ἐν τῇ ἑτέρᾳ μίαν πυραμίδα τρίγωνον ἔχουσαν βάσιν, οὕτως καὶ ἅπασαι αἱ ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πυραμίδες τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς τὰς ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας, τουτέστιν αὐτὴ ἡ πολύγωνον βάσιν ἔχουσα πυραμὶς πρὸς τὴν πολύγωνον βάσιν ἔχουσαν πυραμίδα. ἡ δὲ τρίγωνον βάσιν ἔχουσα πυραμὶς πρὸς τὴν τρίγωνον βάσιν ἔχουσαν ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἔστι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· καὶ ἡ πολύγωνον ἄρα βάσιν ἔχουσα πρὸς τὴν ὁμοίαν βάσιν ἔχουσαν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.

θ'.

- Τῶν ἴσων πυραμίδων καὶ τριγώνους βάσεις ἔχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν·

2. ὅπερ] punctis del. V. 3. ἔδει δεῖξαι] om. V.
 4. πόρισμα] om. q. πόρ. — 23. πλευράν] mg. m. 1 P.
 5. αἱ] om. q. 7. εἰσὶν PB. 8. ἐν] om. V. αὐτάς V,
 αὐτοῖς q. 10. καὶ] καὶ εἰς V. 11. ἡ] om. P.
 12. τριγώνους et βάσεις V, corr. m. 1. 13. μίαν πυραμίδα]

lidi parallelepipedo [XI, 28], triplo maius est pyramide [prop. VII]. ergo etiam $ABGH:AEZ\Theta=BF^3:EZ^3$; quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Hinc manifestum est, etiam pyramides similes, quae polygonas bases habeant, triplicatam rationem habere quam latera correspondentia. nam si eas in pyramides triangulas bases habentes diuiserimus, eo quod etiam similia polygonas basium in similes triangulos numero aequales et totis correspondentes diuiduntur [VI, 20], erunt, ut in altera una pyramis triangulam habens basim ad unam pyramidem alterius triangulam basim habentem, ita omnes pyramides alterius pyramidis triangulas bases habentes ad omnes pyramides alterius pyramidis triangulas bases habentes [V, 12], h. e. ipsa pyramis polygonam basim habens ad pyramidem polygonam basim habentem. pyramis autem triangulam basim habens ad pyramidem triangulam basim habentem triplicatam rationem habet quam latera correspondentia [prop. VIII]. ergo etiam ea, quae polygonam habet basim ad eam, quae similem basim habet, triplicatam habet rationem quam latus ad latus.

IX.

Pyramidum aequalium et triangulas bases habentium bases in contraria ratione sunt atque altitudines;

VIII. coroll. Psellus p. 55.

πυραμίδι (ι e corr.) *μίαν* V. *βάσιν ἔχουσαν* BV. 14. *ἐν*
ἐπὶ q. 15. *βάσεις ἔχουσαι* V. 20. *ἐστὶ*] om. q.
 22. *τετραπλάσιον* V. 26. *ὕψει* PVq.

καὶ ὧν πυραμίδων τριγώνους βάσεις ἔχουσῶν
ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσαι
εἰσὶν ἐκείναι.

Ἔστωσαν γὰρ ἴσαι πυραμίδες τριγώνους βάσεις
5 ἔχουσαι τὰς $AB\Gamma$, ΔEZ , κορυφὰς δὲ τὰ H , Θ ση-
μεῖα· λέγω, ὅτι τῶν $AB\Gamma H$, $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδων ἀντι-
πεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἐστὶν ὡς ἡ
 $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν ΔEZ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς
 $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς $AB\Gamma H$ πυρα-
10 μίδος ὕψος.

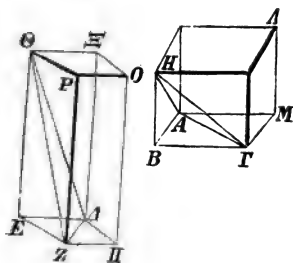
Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ $BHMA$, $E\Theta PO$ στερεὰ
παραλληλεπίπεδα. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $AB\Gamma H$ πυ-
ραμὶς τῇ $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδι, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν $AB\Gamma H$
πυραμίδος ἑξαπλάσιον τὸ $BHMA$ στερεόν, τῆς δὲ
15 $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδος ἑξαπλάσιον τὸ $E\Theta PO$ στερεόν,
ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $BHMA$ στερεὸν τῷ $E\Theta PO$ στερεῷ.
τῶν δὲ ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόν-
θασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ BM
βάσις πρὸς τὴν EP βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ $E\Theta PO$
20 στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ $BHMA$ στερεοῦ ὕψος.
ἀλλ' ὡς ἡ BM βάσις πρὸς τὴν EP , οὕτως τὸ
 $AB\Gamma$ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔEZ τρίγωνον. καὶ ὡς
ἄρα τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔEZ τρίγωνον, οὕ-
τως τὸ τοῦ $E\Theta PO$ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ $BHMA$
25 στερεοῦ ὕψος. ἀλλὰ τὸ μὲν τοῦ $E\Theta PO$ στερεοῦ
ὕψος τὸ αὐτὸ ἐστὶ τῷ τῆς $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδος ὕψει,
τὸ δὲ τοῦ $BHMA$ στερεοῦ ὕψος τὸ αὐτὸ ἐστὶ τῷ
τῆς $AB\Gamma H$ πυραμίδος ὕψει· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $AB\Gamma$

2. ἴσαι εἰσίν] mg. m. 1 postea add. P; ἴσα (corr. m. rec.)
ἐστὶν V. 3. ἐκείνα V, corr. m. rec. 4. ἴσαι] om. q.

et quarum pyramidum triangulas bases habentium bases in contraria ratione sunt atque altitudines, eae aequales sunt.

Sint enim aequales pyramides bases triangulas habentes $AB\Gamma$, ΔEZ , uertices autem H , Θ puncta. dico, pyramidum $AB\Gamma H$, $\Delta EZ\Theta$ bases in contraria ratione esse atque altitudines, et esse ut $AB\Gamma : \Delta EZ$, ita altitudinem pyramidis $\Delta EZ\Theta$ ad altitudinem pyramidis $AB\Gamma H$.

expleantur enim solida parallelepipeda $BHMA$, $E\Theta\Pi O$. et quoniam $AB\Gamma H = \Delta EZ\Theta$, et $BHMA = 6AB\Gamma H$, $E\Theta\Pi O = 6\Delta EZ\Theta$ [p. 178, 26], erit $BHMA = E\Theta\Pi O$. uerum aequalium solidorum par-



allelepipedorum bases in contraria ratione sunt atque altitudines [XI, 34]. erit igitur, ut $BM : EP$, ita altitudo solidi $E\Theta\Pi O$ ad altitudinem solidi $BHMA$. sed $BM : EP = AB\Gamma : \Delta EZ$ [I, 34]. quare etiam ut $AB\Gamma : \Delta EZ$, ita altitudo solidi $E\Theta\Pi O$ ad alti-

tudinem solidi $BHMA$. uerum altitudo solidi $E\Theta\Pi O$ eadem est atque altitudo pyramidis $\Delta EZ\Theta$, altitudo autem solidi $BHMA$ eadem est atque altitudo pyramidis $AB\Gamma H$; itaque ut $AB\Gamma : \Delta EZ$, ita altitudo

- ἔχονσαι βάσεις B. 7. ὕψει Vq. 15. πυραμίδος] om. V.
 $E\Theta O\Pi$ V. 16. ἐστὶ] om. V. 19. $E\Theta\Pi\Theta$ q.
 21. MB Vq. EP βάσιν Vq. 22. $AB\Gamma$ τρίγωνον] $E\Theta\Pi O$
 στερεοῦ ὕψος V, corr. mg. m. 2. τό] ins. m. 1 q.
 26. ἐστὶν PB. 27. ἐστὶν B.

βάσις πρὸς τὴν ΔEZ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΔEZ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς $AB\Gamma H$ πυραμίδος ὕψος. τῶν $AB\Gamma H$, ΔEZ ἄρα πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

- 5 Ἀλλὰ δὴ τῶν $AB\Gamma H$, ΔEZ πυραμίδων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἔστω ὡς ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν ΔEZ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΔEZ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς $AB\Gamma H$ πυραμίδος ὕψος· λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ $AB\Gamma H$ πυραμὶς
10 τῇ ΔEZ πυραμίδι.

- Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν ΔEZ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΔEZ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς $AB\Gamma H$ πυραμίδος ὕψος, ἀλλ' ὡς ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν ΔEZ
15 βάσιν, οὕτως τὸ BM παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ $E\Pi$ παραλληλόγραμμον, καὶ ὡς ἄρα τὸ BM παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ $E\Pi$ παραλληλόγραμμον, οὕτως τὸ τῆς ΔEZ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς $AB\Gamma H$ πυραμίδος ὕψος. ἀλλὰ τὸ [μὲν] τῆς ΔEZ πυραμίδος
20 ὕψος τὸ αὐτὸ ἐστὶ τῷ τοῦ $E\Pi O$ παραλληλεπιπέδου ὕψει, τὸ δὲ τῆς $AB\Gamma H$ πυραμίδος ὕψος τὸ αὐτὸ ἐστὶ τῷ τοῦ $BHMA$ παραλληλεπιπέδου ὕψει· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ BM βάσις πρὸς τὴν $E\Pi$ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ $E\Pi O$ παραλληλεπιπέδου ὕψος πρὸς τὸ τοῦ
25 $BHMA$ παραλληλεπιπέδου ὕψος. ὧν δὲ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκείνα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $BHMA$ στερεὸν παραλληλεπιπέδον τῷ $E\Pi O$ στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ.

3. ἄρα] om. V. -θασιν in ras. V. 6. ὕψει Vq.

15. τ'] (prius) bis V.

17. παραλληλόγραμμον P.

18. τῆς]

pyramidis $\triangle EZ\Theta$ ad altitudinem pyramidis $AB\Gamma H$.
ergo pyramidum $AB\Gamma H$, $\triangle EZ\Theta$ bases in contraria
ratione sunt atque altitudines.

Iam uero pyramidum $AB\Gamma H$, $\triangle EZ\Theta$ bases in
contraria ratione sint atque altitudines, et sit ut
 $AB\Gamma : \triangle EZ$, ita altitudo pyramidis $\triangle EZ\Theta$ ad alti-
tudinem pyramidis $AB\Gamma H$. dico, esse

$$AB\Gamma H = \triangle EZ\Theta.$$

nam iisdem comparatis quoniam est, ut $AB\Gamma : \triangle EZ$,
ita altitudo pyramidis $\triangle EZ\Theta$ ad altitudinem pyra-
midis $AB\Gamma H$, et $AB\Gamma : \triangle EZ = BM : E\Pi$ [I, 34],
erit etiam ut $BM : E\Pi$, ita altitudo pyramidis $\triangle EZ\Theta$
ad altitudinem pyramidis $AB\Gamma H$. uerum altitudo
pyramidis $\triangle EZ\Theta$ eadem est atque altitudo parallel-
epipedi $E\Theta\Pi O$, altitudo autem pyramidis $AB\Gamma H$
eadem atque altitudo parallelepipedi $BHMA$. quare
ut $BM : E\Pi$, ita altitudo parallelepipedi $E\Theta\Pi O$ ad
altitudinem parallelepipedi $BHMA$. quorum autem
solidorum parallelepipedorum bases in contraria ratione
sunt atque altitudines, ea aequalia sunt. itaque $BHMA$

(prius) ins. m. 1 V.

ἔστι τῶ] ἔστω q.

27. ἐστὶ] om. V.

19. μέν] om. P.

22. ἐστὶν B.

25. παραλληλεπιπέδον ὕψος] om. V.

καί ἐστι τοῦ μὲν $BHMA$ ἕκτον μέρος ἢ $ABGH$ πυραμῖς, τοῦ δὲ $EΘΠΟ$ παραλληλεπιπέδου ἕκτον μέρος ἢ $ΔΕΖΘ$ πυραμῖς· ἴση ἄρα ἢ $ABGH$ πυραμῖς τῇ $ΔΕΖΘ$ πυραμίδι.

- 5 Τῶν ἄρα ἴσων πυραμίδων καὶ τριγώνους βάσεις ἔχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· καὶ ὧν πυραμίδων τριγώνους βάσεις ἔχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσαι εἶσιν ἐκείναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10

ι'.

Πᾶς κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον.

- Ἐγέτω γὰρ κῶνος κυλίνδρῳ βάσιν τε τὴν αὐτὴν τὸν $ABΓΔ$ κύκλον καὶ ὕψος ἴσῳ· λέγω, ὅτι ὁ κῶνος
15 τοῦ κυλίνδρου τρίτον ἐστὶ μέρος, τουτέστιν ὅτι ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου τριπλασίῳ ἐστίν.

- Εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου τριπλασίῳ, ἔσται ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἥτοι μείζων ἢ τριπλασίῳ ἢ ἐλάττω ἢ τριπλασίῳ. ἔστω πρότερον
20 μείζων ἢ τριπλασίῳ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν $ABΓΔ$ κύκλον τετράγωνον τὸ $ABΓΔ$ · τὸ δὲ $ABΓΔ$ τετράγωνον μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ $ABΓΔ$ κύκλου. καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ $ABΓΔ$ τετραγώνου πρίσμα ἰσοῦψές τῷ κυλίνδρῳ. τὸ δὲ ἀνιστάμενον πρίσμα μείζον

1. ἐστὶν PB. 3. ἴση ἄρα ἢ] ἢ ἄρα BVq. 4. πυραμίδι ἴση ἐστίν BVq. 6. ὕψει q. 7. -μίδων τρι- in ras. m. rec. V. 8. ἴσα ἐστὶν ἐκείνα P. 9. ἔδει δεῖξαι] in ras. m. rec. V. 14. $ABΓP$. ὁ] om. q. 15. μέρος ἐστὶ V. ὁ] om. q. 16. τριπλάσιον P, corr. m. 2. ἔσται B. 17. εἰ — 18. ἔσται] om. B, mg. add. m. 2: εἰ γὰρ — μείζων, deletis uerbis ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου. 17. μὴ γάρ P. 19. ἐλάττω V. 20. γεγράφθω q. 21. τὸ $ABΓΔ$] supra m. 2 B. 23. καί] om. q. 24. ἀνεσταμένον PBVq.

$= E\Theta\Pi O$. et $AB\Gamma H = \frac{1}{6} BHMA$, $\angle EZ\Theta = \frac{1}{6} E\Theta\Pi O$ [p. 178, 26]. itaque $AB\Gamma H = \angle EZ\Theta$.

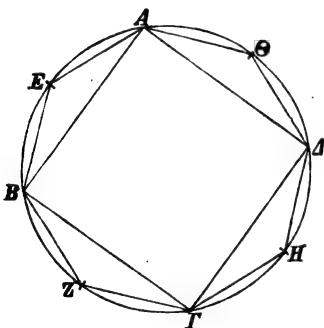
Ergo aequalium pyramidum et triangulas bases habentium bases in contraria ratione sunt atque altitudines; et quarum pyramidum triangulas bases habentium bases in contraria ratione sunt atque altitudines, eae aequales sunt; quod erat demonstrandum.

X.

Omnis conus tertia est pars cylindri, qui basim eandem habet et altitudinem aequalem.

Nam conus eandem basim habeat, quam cylindrus, circulum $AB\Gamma\Delta$, et altitudinem aequalem. dico, conum tertiam esse partem cylindri, h. e. cylindrum triplo maiorem esse cono.

nam si cylindrus cono triplo maior non est, erit cylindrus aut maior quam



triplo maior cono aut minor. prius sit maior, et in circulo $AB\Gamma\Delta$ inscribatur quadratum $AB\Gamma\Delta$ [IV, 6]. itaque quadratum $AB\Gamma\Delta$ maius est quam dimidium circuli $AB\Gamma\Delta$ [p. 142, 9]. et in quadrato $AB\Gamma\Delta$ construatur prisma eandem altitudi-

nem habens quam cylindrus. itaque prisma constructum maius est quam dimidium cylindri, quoniam

ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κυλίνδρου, ἐπειδήπερ καὶ περὶ
 τὸν $ΑΒΓΔ$ κύκλον τετράγωνον περιγράφωμεν, τὸ ἐγγε-
 γραμμένον εἰς τὸν $ΑΒΓΔ$ κύκλον τετράγωνον ἡμισύ
 ἐστὶ τοῦ περιγεγραμμένου· καὶ ἐστὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν ἀν-
 5 ιστάμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρίσματα ἰσοῦψῃ·
 τὰ δὲ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα
 πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις· καὶ τὸ ἐπὶ τοῦ $ΑΒΓΔ$
 ἄρα τετραγώνου ἀνασταθὲν πρίσμα ἡμισύ ἐστὶ τοῦ
 ἀνασταθέντος πρίσματος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν $ΑΒΓΔ$
 10 κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου· καὶ ἐστὶν ὁ κύλιν-
 δρος ἐλάττω τοῦ πρίσματος τοῦ ἀνασταθέντος ἀπὸ
 τοῦ περὶ τὸν $ΑΒΓΔ$ κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου·
 τὸ ἄρα πρίσμα τὸ ἀνασταθὲν ἀπὸ τοῦ $ΑΒΓΔ$ τετρα-
 γώνου ἰσοῦψές τῳ κυλίνδρῳ μεῖζόν ἐστὶ τοῦ ἡμίσεως
 15 τοῦ κυλίνδρου. τεμήσθωσαν αἱ $ΑΒ$, $ΒΓ$, $ΓΔ$, $ΔΑ$
 περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ $Ε$, $Ζ$, $Η$, $Θ$ σημεῖα, καὶ
 ἐπεζεύχθωσαν αἱ $ΑΕ$, $ΕΒ$, $ΒΖ$, $ΖΓ$, $ΓΗ$, $ΗΔ$, $ΔΘ$,
 $ΘΑ$ · καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν $ΑΕΒ$, $ΒΖΓ$, $ΓΗΔ$, $ΔΘΑ$
 τριγώνων μεῖζόν ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ
 20 τμήματος τοῦ $ΑΒΓΔ$ κύκλου, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν.
 ἀνεστιάτω ἐφ' ἑκάστου τῶν $ΑΕΒ$, $ΒΖΓ$, $ΓΗΔ$, $ΔΘΑ$
 τριγώνων πρίσματα ἰσοῦψῃ τῳ κυλίνδρῳ· καὶ ἕκαστον
 ἄρα τῶν ἀνασταθέντων πρισμαμάτων μεῖζόν ἐστὶν ἢ τὸ
 ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κυλίνδρου,
 25 ἐπειδήπερ εἰς διὰ τῶν $Ε$, $Ζ$, $Η$, $Θ$ σημείων παραλ-
 λήλους ταῖς $ΑΒ$, $ΒΓ$, $ΓΔ$, $ΔΑ$ ἀγάγωμεν, καὶ συμ-
 πληρώσωμεν τὰ ἐπὶ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$, $ΓΔ$, $ΔΑ$ παραλ-

1. ἔστω q. 4. ἐστι] (prius) ἔσται q; ἐστὶν B. 5. ἰσονψῇ
 στερεὰ Theon (BVq). πρίσματα] om. q. ἰσονψῇ] om. Theon
 (BVq). 6. δέ — παραλληλεπίπεδα] ἄρα πρίσματα Theon

si circum circulum $AB\Gamma\Delta$ quadratum circumscribimus [IV, 7], quadratum in circulo $AB\Gamma\Delta$ inscriptum dimidium est circumscripti [p. 143 not. 1]; et solida in iis constructa parallelepipeda¹⁾ sunt prismata eandem altitudinem habentia. solida autem parallelepipeda eandem altitudinem habentia eam inter se rationem habent quam bases [XI, 32]. quare etiam prisma in quadrato $AB\Gamma\Delta$ constructum dimidium est prismatis constructi in quadrato circum $AB\Gamma\Delta$ circulum circumscripto; et cylindrus prismate in quadrato circum $AB\Gamma\Delta$ circulum circumscripto minor est; itaque prisma in quadrato $AB\Gamma\Delta$ constructum eandem altitudinem habens, quam cylindrus, maius est dimidio cylindri. secantur arcus AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA in punctis E , Z , H , Θ in binas partes aequales, et ducantur AE , EB , BZ , $Z\Gamma$, ΓH , $H\Delta$, $\Delta\Theta$, ΘA . itaque etiam singuli trianguli AEB , $BZ\Gamma$, $\Gamma H\Delta$, $\Delta\Theta A$ maiores sunt dimidio segmentorum ad eos pertinentium circuli $AB\Gamma\Delta$, ut supra demonstrabamus [p. 142, 22]. iam in singulis triangulis AEB , $BZ\Gamma$, $\Gamma H\Delta$, $\Delta\Theta A$ prismata construuntur eandem altitudinem habentia quam cylindrus. itaque etiam singula prismata constructa maiora sunt quam dimidia segmentorum cylindri ad ea pertinentium, quoniam si per puncta E , Z , H , Θ rectas rectis AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA parallelas ducimus, et parallelo-

1) *παράλληλεπίπεδα* hic ut semper fere adiectivum est, sed pertinet ad *πρίσματα*, non ad *στερεά*. expectaveris *ἀνιστάμενα πρίσματα στερεὰ παράλληλεπίπεδα ἴσουσῃ* (*ἀνιστ. πρίσματα ἴσουσῃ στερεὰ παραλλ.* coniecit August).

(BVq). 7. εἰσιν Bq. ἐπὶ] ἀπό q. 14. ἡμίσεος BVq.
19. τετράγωνον q. 21. ἐφ'] ἀφ' V. 23. -ν ἦ] add. m. 2 P.

ληλόγραμμα, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἀναστήσωμεν στερεὰ
 παραλληλεπίπεδα ἰσοῦψῃ τῷ κυλίνδρῳ, ἐκάστου τῶν
 ἀνασταθέντων ἡμίση ἐστὶ τὰ πρίσματα τὰ ἐπὶ τῶν
 AEB, BZΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων· καὶ ἐστὶ τὰ
 5 τοῦ κυλίνδρου τμήματα ἐλάττωνα τῶν ἀνασταθέντων
 στερεῶν παραλληλεπιπέδων· ὥστε καὶ τὰ ἐπὶ τῶν AEB,
 BZΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων πρίσματα μείζονά ἐστιν
 ἢ τὸ ἡμισυ τῶν καθ' ἑαυτὰ τοῦ κυλίνδρου τμημάτων.
 τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα καὶ
 10 ἐπιξενγνύντες εὐθείας καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἐκάστου
 τῶν τριγώνων πρίσματα ἰσοῦψῃ τῷ κυλίνδρῳ καὶ
 τοῦτο αἰεὶ ποιοῦντες καταλείβομεν τινα ἀποτμήματα
 τοῦ κυλίνδρου, ἃ ἔσται ἐλάττωνα τῆς ὑπεροχῆς, ἢ
 ὑπερέχει ὁ κύλινδρος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου.
 15 λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ AE, EB, BZ, ZΓ, ΓΗ, ΗΔ,
 ΔΘ, ΘΑ· λοιπὸν ἄρα τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ
 AEBZΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυ-
 λίνδρῳ, μείζον ἐστὶν ἢ τριπλάσιον τοῦ κώνου. ἀλλὰ
 τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν ἐστὶ τὸ AEBZΓΗΔΘ πολύ-
 20 γωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, τριπλάσιόν ἐστι
 τῆς πυραμίδος, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ AEBZΓΗΔΘ
 πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ· καὶ ἡ πυ-
 ραμις ἄρα, ἥς βάσις μὲν [ἐστὶ] τὸ AEBZΓΗΔΘ πο-
 λύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶ
 25 τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν ABΓΔ κύκλον.
 ἀλλὰ καὶ ἐλάττων· ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ· ὅπερ

3. ἡμίσεια BVq. πρίσμα P, corr. m. rec. 5. ἀποτμή-
 ματα BVq. 8. ἢ] bis P. τῶν] τοῦ q. ἐαυτὰ] -τά
 e corr. m. rec. P; ἔτα q. 10. ἐφ'] ἀφ' V. 13. ἃ] supra
 scr. m. 2 B. ἐλάσσονα P. 14. κώνου q. 15. λε-
 λήφθω q. 17. ABEZΓΗΔΘΑ P, AEBZΓΗΔΘΑ V.
 18. κώνου q. 21. ἐστι] om. V. AEBZΓΗΘΔ V.

gramma in rectis AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA explemus et in iis solida parallelepipeda construimus eandem altitudinem habentia, quam cylindrus, prismata in triangulis AEB , $BZ\Gamma$, $\Gamma H\Delta$, $\Delta\Theta A$ constructa dimidia sunt singulorum parallelepipedorum¹⁾; et segmenta cylindri minora sunt solidis parallelepipedis, quae construximus; quare prismata in triangulis AEB , $BZ\Gamma$, $\Gamma H\Delta$, $\Delta\Theta A$ constructa maiora sunt quam dimidia segmentorum cylindri ad ea pertinentium. itaque si arcus relictos in duas partes aequales secuerimus et rectas duxerimus et in singulis triangulis prismata construxerimus eandem altitudinem habentia, quam cylindrus, et hoc semper fecerimus, frusta quaedam cylindri relinquemus, quae minora sunt excessu, quo cylindrus triplum coni excedit [X, 1]. relinquantur et sint AE , EB , BZ , $Z\Gamma$, ΓH , $H\Delta$, $\Delta\Theta$, ΘA . itaque quod relinquitur prisma, cuius basis est polygonum $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$, altitudo autem eadem ac cylindri, maius est quam triplo maius cono. uerum prisma, cuius basis est polygonum $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$, altitudo autem eadem ac cylindri, triplo maius est pyramide, cuius basis est polygonum $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$, uertex autem idem ac coni [prop. VII coroll.]. quare etiam pyramis, cuius basis est polygonum $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$, uertex autem idem ac coni, maior est cono, qui basim habet $AB\Gamma\Delta$ circulum. uerum etiam minor est (nam

1) Hoc ex XI, 28 colligitur ductis ab E , Z , H , Θ rectis ad AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA perpendicularibus.

22. $\kappa\acute{o}\nu\eta$ q. 23. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$] om. P. 24. $\kappa\acute{o}\nu\eta$ q. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$
P. 25. $\kappa\acute{o}\nu\eta\upsilon$ in ras. q. 26. $\acute{\iota}\pi'$] corr. ex $\acute{\alpha}\pi'$ m. 2 B.

ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου μείζων ἢ τριπλάσιος.

Λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶν ἢ τριπλάσιος ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου.

- 5 Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ἐλάττων ἢ τριπλάσιος ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου· ἀνάπαλιν ἄρα ὁ κώνος τοῦ κυλίνδρου μείζων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸν $ΑΒΓΔ$ κύκλον τετράγωνον τὸ $ΑΒΓΔ$ · τὸ $ΑΒΓΔ$ ἄρα τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ
- 10 $ΑΒΓΔ$ κύκλου. καὶ ἀνεστιάτω ἀπὸ τοῦ $ΑΒΓΔ$ τετραγώνου πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ· ἢ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ κώνου, ἐπειδήπερ, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν, ὅτι ἐὰν περὶ τὸν κύκλον τετράγωνον περιγράψωμεν,
- 15 ἔσται τὸ $ΑΒΓΔ$ τετράγωνον ἥμισυ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγεγραμμένου τετραγώνου· καὶ ἐὰν ἀπὸ τῶν τετραγώνων στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἀναστήσωμεν ἰσοῦσῃ τῷ κώνῳ, ἃ καὶ καλεῖται πρίσματα, ἔσται τὸ ἀνασταθὲν ἀπὸ τοῦ $ΑΒΓΔ$ τετραγώνου ἥμισυ τοῦ
- 20 ἀνασταθέντος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου· πρὸς ἄλληλα γὰρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις. ὥστε καὶ τὰ τρίτα· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἥς βάσις τὸ $ΑΒΓΔ$ τετράγωνον, ἥμισυ ἐστὶ τῆς πυραμίδος τῆς ἀνασταθείσης ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος τετρα-
- 25 γώνου. καὶ ἐστὶ μείζων ἢ πυραμὶς ἢ ἀνασταθεῖσα ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον τετραγώνου τοῦ κώνου· ἐμπεριέχει γὰρ αὐτόν. ἢ ἄρα πυραμὶς, ἥς βάσις τὸ

1. ἐστίν] om. V. ἐστίν] ἔσται B V. κώνου q et sic postea saepe. 3. ἐστίν] om. V. τριπλάσιός ἐστιν V. 8. τὸ $ΑΒΓΔ$ — 9. τετράγωνον] mg. m. 1 P. 10. τετραγώνου] in ras. q. 13. μέρος] om. V. 14. περιγράψωμεν

ab eo comprehenditur); quod fieri non potest. itaque cylindrus maior non est quam triplo maior cono.

Iam dico, cylindrum ne minorem quidem esse quam triplo maiorem cono.

Nam si fieri potest, sit cylindrus minor quam triplo maior cono. e contrario igitur conus maior est tertia parte cylindri. iam in circulo $AB\Gamma\Delta$ quadratum inscribatur $AB\Gamma\Delta$ [IV, 6]. itaque quadratum $AB\Gamma\Delta$ maius est quam dimidium circuli $AB\Gamma\Delta$ [p. 142, 11]. et in quadrato $AB\Gamma\Delta$ pyramis construatur eundem uerticem habens, quem conus. itaque pyramis ita constructa maior est quam dimidium coni, quoniam, ut supra demonstrabamus [p. 143 not. 1], si circum circum-
 lum quadratum circumscripserimus [IV, 7], quadratum $AB\Gamma\Delta$ dimidium erit quadrati circum circumscripti; et si in quadratis solida parallelepipeda eandem altitudinem habentia, quam conus, construxerimus, quae eadem prismata uocantur, solidum in quadrato $AB\Gamma\Delta$ constructum dimidium erit solidi constructi in quadrato circum circumscripto (nam eam inter se rationem habent quam bases) [XI, 32]. quare etiam partes tertiae. itaque etiam pyramis, cuius basis est quadratum $AB\Gamma\Delta$, dimidium est pyramidis, quae in quadrato circum circumscripto construitur [prop. VII coroll.]. et pyramis in quadrato circum circumscripto constructa maior est cono (nam eum comprehendit). itaque pyramis, cuius basis est

τετράγωνον BVq. 15. ἡμῖον] -μι- in ras. V. 16. περιγεγραμμένον] περιγραφόμενον V. τετραγώνον] om. V.
 18. καλεῖ in fine lin. P. 19. τοῦ] (alt.) corr. ex τό m. 1 P.
 22. τρία q, corr. m. 1. 23. ἐστὶν P. 27. περιέχει q.

$ΑΒΓΔ$ τετράγωνον, κορυφή δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. τετμήσθωσαν αἱ $ΑΒ$, $ΒΓ$, $ΓΔ$, $ΔΑ$ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ $Ε$, $Ζ$, $Η$, $Θ$ σημεία, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $ΑΕ$, $ΕΒ$, $ΒΖ$, $ΖΓ$, $ΓΗ$, $ΗΔ$, $ΔΘ$, $ΘΑ$ καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν $ΑΕΒ$, $ΒΖΓ$, $ΓΗΔ$, $ΔΘΑ$ τριγώνων μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ $ΑΒΓΔ$ κύκλου. καὶ ἀνεστήτωσαν ἐφ' ἑκάστου τῶν $ΑΕΒ$, $ΒΖΓ$, $ΓΗΔ$, $ΔΘΑ$ τριγώνων πυραμίδες τὴν αὐτὴν
 10 κορυφὴν ἔχουσαι τῷ κώνῳ· καὶ ἐκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα καὶ ἐπιεγγύοντες εὐθείας καὶ ἀν-
 15 ιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδα τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσιν τῷ κώνῳ καὶ τοῦτο αἰ ποιοῦντες καταλείψομεν τινα ἀποτμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάττωνα τῆς ὑπεροχῆς, ἢ ὑπερέχει ὁ κώνος τοῦ τρίτου μέρους τοῦ κυλίνδρου. λελείφθω, καὶ ἔστω
 20 τὰ ἐπὶ τῶν $ΑΕ$, $ΕΒ$, $ΒΖ$, $ΖΓ$, $ΓΗ$, $ΗΔ$, $ΔΘ$, $ΘΑ$ λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $ΑΕΒΖΓΗΔΘ$ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος τοῦ κυλίνδρου. ἀλλ' ἡ πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $ΑΕΒΖΓΗΔΘ$ πολύγωνον, κορυφὴ
 25 δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, τρίτον ἐστὶ μέρος τοῦ πρίσματος, οὗ βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $ΑΕΒΖΓΗΔΘ$ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ· τὸ ἄρα πρίσμα, οὗ βάσις

2. τό] om. P. αἱ] bis P, sed corr. 3. τά] τό q.
 5. ΘΑ] om. B. 8. ἐφ'] ἀφ' BVq. 10. ἔχοντες V.
 12. μείζον P, corr. m. rec. ἐαυτὸ PBVq; corr. ed. Basil.
 17. τμήματα BV. 19. λελήφθω q. 21. ΑΕΒΖΓΗΔΘ] Θ

quadratum $AB\Gamma\Delta$, uertex autem idem ac conī, maior est quam dimidium conī. iam arcus AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA in punctis E , Z , H , Θ in duas partes aequales secantur, et ducantur AE , EB , BZ , $Z\Gamma$, ΓH , $H\Delta$, $\Delta\Theta$, ΘA . itaque singuli trianguli AEB , $BZ\Gamma$, $\Gamma H\Delta$, $\Delta\Theta A$ maiores sunt quam dimidium segmentorum circuli $AB\Gamma\Delta$ ad eos pertinentium [p. 142, 22]. et in singulis triangulis AEB , $BZ\Gamma$, $\Gamma H\Delta$, $\Delta\Theta A$ pyramides construuntur eundem uerticem habentes, quem conus. itaque etiam singulae pyramides, quas construximus, eadem ratione¹⁾ maiores sunt quam dimidium segmentorum conī ad eas pertinentium. si igitur arcus reliquos in duas partes aequales secuerimus et rectas duxerimus et in singulis triangulis pyramides construxerimus eundem uerticem habentes, quem conus, et hoc semper fecerimus, frustra quaedam conī relinuemus, quae minora erunt excessu, quo conus tertiam partem cylindri excedit [X, 1]. relinquuntur et sint ea, quae in AE , EB , BZ , $Z\Gamma$, ΓH , $H\Delta$, $\Delta\Theta$, ΘA posita sunt. itaque quae relinquitur pyramis, cuius basis est polygonum $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$, uertex autem idem ac conī, maior est tertia parte cylindri. uerum pyramis, cuius basis est polygonum $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$, uertex autem idem ac conī, tertia pars est prismatis, cuius basis est polygonum $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$, altitudo autem eadem ac cylindri.

1) Sc. ac supra p. 192, 12 sq. in pyramidibus, quae in quadratis constructae erant.

corr. ex B uel Z q. 22. ἡ] om. q. 24. $AEB\Gamma H\Delta\Theta$ V. 26. ἴστω B. $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$] Z supra scr. m. 2 V. 27. τό] o in ras. m. 2 B. τὸ ἄρα — p. 196, 2. κλίνδρον] om. q.

μέν ἐστι τὸ $ΑΒΖΓΗΔΘ$ πολύγωνον, ὕψος δὲ το
 αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μείζον ἐστι τοῦ κυλίνδρου, οὐ
 βάσις ἐστὶν ὁ $ΑΒΓΔ$ κύκλος. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον· ἐμ-
 περιέχεται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ
 5 ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἐλάττων ἐστὶν ἢ τριπλά-
 σιος. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ μείζων ἢ τριπλάσιος· τρι-
 πλάσιος ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου· ὥστε ὁ κῶνος
 τρίτον ἐστὶ μέρος τοῦ κυλίνδρου.

Πᾶς ἄρα κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ
 10 τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον· ὅπερ
 ἔδει δεῖξαι.

ια'.

Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύ-
 λινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.
 15 Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος κῶνοι καὶ κύλινδροι,
 ὧν βάσεις μὲν [εἰσιν] οἱ $ΑΒΓΔ$, $ΕΖΗΘ$ κύκλοι,
 ἄξονες δὲ οἱ $ΚΔ$, $ΜΝ$, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων αἱ
 $ΑΓ$, $ΕΗ$ · λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ $ΑΒΓΔ$ κύκλος πρὸς
 τὸν $ΕΖΗΘ$ κύκλον, οὕτως ὁ $ΑΔ$ κῶνος πρὸς τὸν
 20 $ΕΝ$ κῶνον.

Εἰ γὰρ μή, ἔσται ὡς ὁ $ΑΒΓΔ$ κύκλος πρὸς τὸν
 $ΕΖΗΘ$ κύκλον, οὕτως ὁ $ΑΔ$ κῶνος ἦτοι πρὸς ἑλασ-
 σόν τι τοῦ $ΕΝ$ κώνου στερεὸν ἢ πρὸς μείζον. ἔστω
 πρότερον πρὸς ἑλασσον τὸ $Ξ$, καὶ ὅ ἑλασσὸν ἐστὶ τὸ
 25 $Ξ$ στερεὸν τοῦ $ΕΝ$ κώνου, ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ $Ψ$
 στερεόν· ὁ $ΕΝ$ κῶνος ἄρα ἴσος ἐστὶ τοῖς $Ξ$, $Ψ$ στε-
 ρεοῖς. ἐγγεγράφθω εἰς τὸν $ΕΖΗΘ$ κύκλον τετρά-
 γωνον τὸ $ΕΖΗΘ$ · τὸ ἄρα τετράγωνον μείζον ἐστὶν

3. μὲν ἐστιν Vq. ἐστὶν ὁ] mg. m. 1 P. ἐλάττων Vq.

4. ἐστίν] om. V. 8. μέρος ἐστὶ V. 9. ἄρα ὁ V.

prisma igitur, cuius basis est $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$ polygonum, altitudo autem eadem ac cylindri, maius est cylindro, cuius basis est circulus $AB\Gamma\Delta$. uerum etiam minus (nam ab eo comprehenditur); quod fieri non potest. itaque cylindrus minor non est quam triplo maior cono. demonstrauius autem, eum ne maiorem quidem esse. triplo igitur maior est cylindrus cono. itaque conus tertia pars est cylindri.

Ergo omnis conus tertia pars est cylindri, qui eandem basim habet et altitudinem aequalem; quod erat demonstrandum.

XI.

Coni et cylindri, qui eandem habent altitudinem, eam inter se rationem habent quam bases.

Eandem altitudinem habeant coni et cylindri, quorum bases sunt circuli $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$, axes autem KA , MN , diametri autem basium AG , EH . dico, esse $AB\Gamma\Delta : EZH\Theta = AA : EN$.

Nam si minus, erit ut $AB\Gamma\Delta : EZH\Theta$, ita conus AA aut ad minus aliquod cono EN solidum aut ad maius. prius sit ad minus Ξ , et sit $\Psi = EN \div \Xi$. itaque $EN = \Xi + \Psi$. iam in circulo $EZH\Theta$ inscribatur quadratum $EZH\Theta$ [IV, 6]. itaque quadratum maius est dimidio circuli [p. 142, 11]. in quadrato

τοῦ τήν — 11. δεῖξαι] καὶ τὰ ἐξῆς V. 10. ἴσον] supra m. 2 B. 12. ια'] om. q. 15. καί] ἡ B. 16. εἶσιν] om. P. 17. διαμέτροι — 18. EH] om. q; mg. m. 2 B. 19. κύκλον] supra m. 2 B. AA B, sed corr. πρὸς — 22. κῶνος] mg. m. 2 B. 20. κῶνον] om. BVq. 21. ἔστω Vq. 22. κύκλον] om. q. ἦτοι] om. q; ἡ BV. ἦτοι — 23. ἡ] et in textu et in mg. m. 2 B (ἡ pro ἦτοι). 24. πρότερον] om. q. 28. ἐστι q.

ἢ το ἥμισυ τοῦ κύκλου. ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ EZHΘ
 τετραγώνου πυραμὶς ἰσοῦψῆς τῷ κώνῳ· ἡ ἄρα ἀνα-
 σταθεῖσα πυραμὶς μελίων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώ-
 νου, ἐπειδὴ περ εἴαν περιγράψωμεν περὶ τὸν κύκλον
 5 τετράγωνον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀναστήσωμεν πυραμίδα
 ἰσοῦψῃ τῷ κώνῳ, ἡ ἐγγραφεῖσα πυραμὶς ἡμισὺ ἐστι
 τῆς περιγραφείσης· πρὸς ἀλλήλας γάρ εἰσιν ὥς αἱ
 βάσεις· ἐλάττων δὲ ὁ κώνος τῆς περιγραφείσης πυρα-
 μίδος. τετμήσθωσαν αἱ EZ, ZH, HΘ, ΘE περι-
 10 φέρειαι δίχα κατὰ τὰ O, Π, P, Σ σημεῖα, καὶ ἐπεξεύχθω-
 σαν αἱ ΘO, OE, EΠ, ΠZ, ZP, PH, HΣ, ΣΘ.
 ἕκαστον ἄρα τῶν ΘOE, EΠZ, ZPH, HΣΘ τριγώ-
 νων μεζόν ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμή-
 ματος τοῦ κύκλου. ἀνεστάτω ἐφ' ἐκάστου τῶν ΘOE,
 15 EΠZ, ZPH, HΣΘ τριγώνων πυραμὶς ἰσοῦψῆς τῷ
 κώνῳ· καὶ ἐκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων
 μελίων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὴν τμήματος
 τοῦ κώνου. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περι-
 φερείας δίχα καὶ ἐπιξενγνύντες εὐθείας καὶ ἀνιστάντες
 20 ἐπὶ ἐκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας ἰσοῦψεῖς τῷ
 κώνῳ καὶ αἰ τοῦτο ποιοῦντες καταλείβομεν τινα

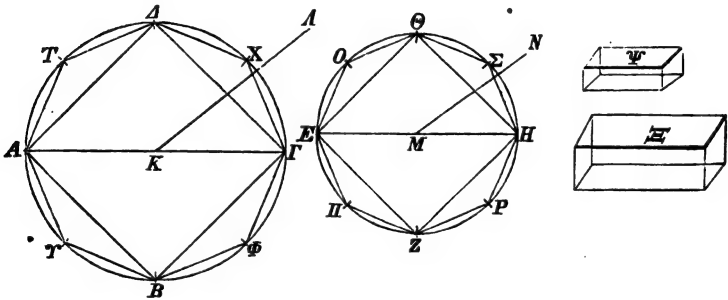
6. ἐστὶν P. 7. ἄλληλα B, corr. m. 2. 8. ἐλάσσω P.

Post πυραμίδος add. ἡ ἄρα πυραμὶς, ἥς βάσις τὸ EZHΘ
 τετράγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μελίων ἐστὶν ἢ τὸ
 ἥμισυ τοῦ κώνου Vq, mg. m. 2 B. 10. τὰ] τό q. P, Σ]
 corr. ex Π, P m. rec. P. 11. OE] ΘE q. 12. HEΘ q.

13. αὐτό V. 14. ἀφ' Bq; uerba ἀφ' ἐκάστου supra m.
 2 V (uidetur fuisse ἐφ' ἐκάστῳ). 16. καὶ] om. V.

17. μέρος τοῦ V. ἑαυτῇ] corr. in ἑαυτό V; ἑαυτό corr. ex
 ἑαυτοῦ P. 20. ἐκάστῳ V.

$EZH\Theta$ pyramis construatur, quae eandem altitudinem habeat, quam conus. pyramis igitur constructa maior est dimidio coni, quoniam si circum circulum quadratum circumscripserimus [IV, 7] et in eo pyramidem construxerimus eandem altitudinem habentem, quam conus, pyramis inscripta dimidia est circumscriptae; nam eam inter se rationem habent, quam bases [prop. VI]; conus autem pyramide circumscripta minor est. secentur arcus EZ , ZH , $H\Theta$, ΘE in punctis O , Π , P , Σ in duas partes aequales, et ducantur ΘO , OE , $E\Pi$,



ΠZ , ZP , PH , $H\Sigma$, $\Sigma\Theta$. singuli igitur trianguli ΘOE , $E\Pi Z$, ZPH , $H\Sigma\Theta$ maiores sunt dimidio segmentorum circuli ad eos pertinentium [p. 142, 22]. iam in singulis triangulis ΘOE , $E\Pi Z$, ZPH , $H\Sigma\Theta$ pyramis construatur eandem altitudinem habens, quam conus. itaque etiam singulae pyramides constructae maiores sunt dimidio segmentorum coni ad eas pertinentium [p. 194, 10]. quare si arcus reliquos in duas partes aequales secuerimus et rectas duxerimus et in singulis triangulis pyramides construxerimus eandem altitudinem habentes, quam conus, et hoc semper fece-

ἀποτμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ Ψ
στερεοῦ. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΘΟΕ,
ΕΠΖ, ΖΡΗ, ΗΣΘ· λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἥς βάσις
τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ
κῶνι, μείζων ἐστὶ τοῦ Ξ στερεοῦ. ἐγγεγράφθω καὶ
εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τῷ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολυ-
γώνῳ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον πολύγωνον τὸ
ΔΤΑΤΒΦΓΧ, καὶ ἀνεστάτω ἐπ' αὐτοῦ πυραμὶς
ισοῦψῆς τῷ ΑΔ κῶνι. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ
10 τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ, οὕτως τὸ ΔΤΑΤΒΦΓΧ
πολύγωνον πρὸς τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον, ὡς δὲ
τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ, οὕτως ὁ
ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, καὶ ὡς ἄρα
ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως τὸ
15 ΔΤΑΤΒΦΓΧ πολύγωνον πρὸς τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ
πολύγωνον. ὡς δὲ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ
κύκλον, οὕτως ὁ ΑΔ κῶνος πρὸς τὸ Ξ στερεόν, ὡς
δὲ το ΔΤΑΤΒΦΓΧ πολύγωνον πρὸς τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ·
πολύγωνον, οὕτως ἡ πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν τὸ
20 ΔΤΑΤΒΦΓΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον,
πρὸς τὴν πυραμίδα, ἥς βάσις μὲν τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ
πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον. καὶ ὡς ἄρα ὁ
ΑΔ κῶνος πρὸς τὸ Ξ στερεόν, οὕτως ἡ πυραμὶς, ἥς
βάσις μὲν τὸ ΔΤΑΤΒΦΓΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ
25 τὸ Δ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἥς βάσις μὲν τὸ
ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον·
ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΔ κῶνος πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ
πυραμίδα, οὕτως τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὴν ἐν τῷ ΕΝ

1. ἔσται] ἐστὶν P. 2. ΘΟΕ] e corr. q. 3. λοιπὸν P.
4. ΘΟΕΠΖΡΗΣ PB, ΟΕΠΖΡΗΣΘ V. 5. μείζων Vq,
et B, sed corr. ἐστὶν P. 6. ΘΟΕΠΖΡΗΣ PBq et e corr.

rimus, frustra quaedam coni relinquemus minora solido Ψ [X, 1]. relinquantur et sint ea, quae in $\odot OE$, EPZ , ZPH , $H\Sigma\odot$ posita sunt. itaque quae relinquitur pyramis, cuius basis est polygonum $\odot OE\Pi ZPH\Sigma$, altitudo autem eadem ac coni, maior est solido Ξ . etiam in circulo $AB\Gamma\Delta$ polygono $\odot OE\Pi ZPH\Sigma$ simile et similiter positum polygonum $\Delta TATB\Phi\Gamma X$ inscribatur [cfr. VI, 18], et in eo pyramis construatur eandem altitudinem habens, quam conus AA . iam quoniam est

$AI^2 : EH^2 = \Delta TATB\Phi\Gamma X : \odot OE\Pi ZPH\Sigma$ [prop. I],
et $AI^2 : EH^2 = AB\Gamma\Delta : EZH\odot$ [prop. II], erit etiam
 $AB\Gamma\Delta : EZH\odot = \Delta TATB\Phi\Gamma X : \odot OE\Pi ZPH\Sigma$.
uerum $AB\Gamma\Delta : EZH\odot = AA : \Xi$, et ut

$$\Delta TATB\Phi\Gamma X : \odot OE\Pi ZPH\Sigma,$$

ita pyramis, cuius basis est polygonum $\Delta TATB\Phi\Gamma X$, uertex autem punctum A , ad pyramidem, cuius basis est polygonum $\odot OE\Pi ZPH\Sigma$, uertex autem N punctum [prop. VI]. quare etiam ut $AA : \Xi$, ita pyramis, cuius basis est polygonum $\Delta TATB\Phi\Gamma X$, uertex autem punctum A , ad pyramidem, cuius basis est polygonum $\odot OE\Pi ZPH\Sigma$, uertex autem punctum N . permutando igitur erit [V, 16], ut conus AA ad pyramidem in eo comprehensam, ita solidum Ξ ad pyramidem in cono EN comprehensam. conus autem AA maior est

V. 8. $\Delta TATB\Phi\Gamma X$] litt. Γ postea add. V. $\acute{\alpha}\pi'$ q. $\alpha\upsilon\tau\omega$ B. 10. $\tau\acute{o}$ (alt.) — 12. $\sigma\upsilon\tau\omega\varsigma$ δ] mg. m. 1 V.
11. $\odot OE\Pi ZPH\Sigma$ B, et P, corr. m. 1. 12. $\sigma\upsilon\tau\omega\varsigma$ δ] etiam in
textu V. 15. $\odot OE\Pi ZPH\Sigma$ P, corr. m. 1. 18. $\Delta TATB\Phi\Gamma X$
V. 20. $\odot OE\Pi ZPH\Sigma$ B, $\acute{\epsilon}\nu$ $\acute{\epsilon}\tau\acute{\epsilon}\rho\omega$ $\tau\acute{o}$ $\Delta TATB\Phi\Gamma X$ $\pi\omicron\lambda\upsilon$
 $\gamma\omega\nu\nu$ mg. m. 2. 24. $\Delta TATB\Phi\Gamma X$] Γ postea add. V.

κῶνω πυραμίδα. μείζων δὲ ὁ $ΑΑ$ κῶνος τῆς ἐν αὐτῷ
 πυραμίδος· μείζον ἄρα καὶ τὸ Ξ στερεὸν τῆς ἐν τῷ
 $ΕΝ$ κῶνω πυραμίδος. ἀλλὰ καὶ ἔλασσον· ὅπερ ἄτοπον.
 οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ $ΑΒΓΔ$ κύκλος πρὸς τὸν $ΕΖΗΘ$
 5 κύκλον, οὕτως ὁ $ΑΑ$ κῶνος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ $ΕΝ$
 κῶνου στερεόν. ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐστὶν
 ὡς ὁ $ΕΖΗΘ$ κύκλος πρὸς τὸν $ΑΒΓΔ$ κύκλον, οὕτως
 ὁ $ΕΝ$ κῶνος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ $ΑΑ$ κῶνου στερεόν.

Λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ ἐστὶν ὡς ὁ $ΑΒΓΔ$ κύκλος
 10 πρὸς τὸν $ΕΖΗΘ$ κύκλον, οὕτως ὁ $ΑΑ$ κῶνος πρὸς
 μείζον τι τοῦ $ΕΝ$ κῶνου στερεόν.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μείζον τὸ Ξ · ἀνάπαλιν
 ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ $ΕΖΗΘ$ κύκλος πρὸς τὸν $ΑΒΓΔ$ κύ-
 κλον, οὕτως τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν $ΑΑ$ κῶνον. ἀλλ'
 15 ὡς τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν $ΑΑ$ κῶνον, οὕτως ὁ $ΕΝ$
 κῶνος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ $ΑΑ$ κῶνου στερεόν· καὶ
 ὡς ἄρα ὁ $ΕΖΗΘ$ κύκλος πρὸς τὸν $ΑΒΓΔ$ κύκλον,
 οὕτως ὁ $ΕΝ$ κῶνος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ $ΑΑ$ κῶνου
 στερεόν· ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς
 20 ὁ $ΑΒΓΔ$ κύκλος πρὸς τὸν $ΕΖΗΘ$ κύκλον, οὕτως ὁ
 $ΑΑ$ κῶνος πρὸς μείζον τι τοῦ $ΕΝ$ κῶνου στερεόν.
 ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλασσον· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ
 $ΑΒΓΔ$ κύκλος πρὸς τὸν $ΕΖΗΘ$ κύκλον, οὕτως ὁ
 $ΑΑ$ κῶνος πρὸς τὸν $ΕΝ$ κῶνον.

25 Ἄλλ' ὡς ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, ὁ κύλινδρος
 πρὸς τὸν κύλινδρον· τριπλασίων γὰρ ἐκάτερος ἐκα-
 τέρου. καὶ ὡς ἄρα ὁ $ΑΒΓΔ$ κύκλος πρὸς τὸν $ΕΖΗΘ$
 κύκλον, οὕτως οἱ ἐπ' αὐτῶν ἰσοῦψεις [τοῖς κῶνοις]
 κύλινδροι.

1. ἐαντῷ P. 4. ἐστίν] om. V. 6. οὐδὲ ἐστὶν ὡς] οὐδ'
 ὁ V, οὐδ' ὡς ὁ m. 2; οὐδὲ ὡς ἐστὶν q. 13. κύκλον] om. B.

pyramide in eo comprehensa. itaque etiam solidum Ξ maius est pyramide in cono EN comprehensa [V, 14]. uerum idem minus est; quod absurdum est. itaque non est ut $AB\Gamma\Delta : EZH\Theta$, ita conus AA ad solidum minus cono EN . iam similiter demonstrabimus, ne EN quidem conum ad solidum minus cono AA eam rationem habere quam $EZH\Theta : AB\Gamma\Delta$.

Iam dico, ne ad maius quidem cono EN solidum conum AA eam rationem habere quam

$$AB\Gamma\Delta : EZH\Theta.$$

Nam si fieri potest, habeat ad maius Ξ . itaque e contrario erit $EZH\Theta : AB\Gamma\Delta = \Xi : AA$ [V, 7 coroll.]. uerum ut $\Xi : AA$, ita conus EN ad solidum minus cono AA [prop. II lemma]. quare etiam ut $EZH\Theta : AB\Gamma\Delta$, ita conus EN ad solidum minus cono AA ; quod fieri non posse demonstraui. itaque non est ut $AB\Gamma\Delta : EZH\Theta$, ita conus AA ad solidum maius cono EN . demonstraui autem, eum ne ad minus quidem illam habere rationem. itaque

$$AB\Gamma\Delta : EZH\Theta = AA : EN.$$

sed ut conus ad conum, ita cylindrus ad cylindrum; nam uterque utroque triplo maior est [prop. X]. itaque etiam ut $AB\Gamma\Delta : EZH\Theta$, ita cylindri in iis constructi, qui eandem altitudinem habent.¹⁾

1) Uerba τοῖς κώνοις lin. 28 uereor ne antiqua glossa sit; neque enim hic de eo agitur, ut cylindri eandem altitudinem habeant quam coni, sed ut demonstremus, cylindros ἰσονψεῖς eam rationem habere quam bases.

14. ἀλλ' — 15. κώνον] mg. m. 1 P. 19. ἐστίν] om. V.
 ὥς] om. q. 21. τε] om. q. κώνον] om. V. 25. ἀλλὰ P.

Οἱ ἄρα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιβ'.

5 Οἱ ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων.

Ἐστωσαν ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ $ABΓΔ$, $EZHΘ$ κύκλοι, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων αἱ $ΒΔ$, $ZΘ$, ἄξονες δὲ τῶν κώνων καὶ κυλίνδρων οἱ $ΚΑ$, MN . λέγω, ὅτι ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν [ἐστίν] ὁ $ABΓΔ$ κύκλος, κορυφή δὲ τὸ $Α$ σημείον, πρὸς τὸν κῶνον, οὗ βάσις μὲν [ἐστίν] ὁ $EZHΘ$ κύκλος, κορυφή δὲ τὸ N σημείον, τριπλασίονα λόγον
15 ἔχει ἥπερ ἡ $ΒΔ$ πρὸς τὴν $ZΘ$.

Εἰ γὰρ μὴ ἔχει ὁ $ABΓΔΑ$ κῶνος πρὸς τὸν $EZHΘN$ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἥπερ ἡ $ΒΔ$ πρὸς τὴν $ZΘ$, ἔξει ὁ $ABΓΔΑ$ κῶνος ἢ πρὸς ἑλασσόν τι τοῦ $EZHΘN$ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἢ πρὸς μείζον. ἐχέτω
20 πρότερον πρὸς ἑλασσον τὸ $Ξ$, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν $EZHΘ$ κύκλον τετράγωνον τὸ $EZHΘ$. τὸ ἄρα $EZHΘ$ τετράγωνον μείζον ἐστίν ἢ τὸ ἡμισυ τοῦ $EZHΘ$ κύκλου. καὶ ἀνεστάτω ἐπὶ τοῦ $EZHΘ$ τετραγώνου πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ· ἡ ἄρα
25 ἀνασταθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἡμισυ μέρος

2. ὅπερ ἔδει δεῖξαι]: ~ V. 5. καί] καὶ οἱ q. 6. εἰσὶν PB. βάσεσιν P. 8. βάσις q. 10. αἱ] οἱ BV. δέ] om. q. καί] ἢ BVq. 12. ἐστίν] om. BVq. 13. ἐστίν] om. BVq. 16. ἔχη P, ἔχοι B. 17. τριπλασίον P, postea corr. m. 1. Post λόγον ras. 3 litt. V. 20. πρὸς ἑλασσον πρότερον BVq. 22. κύκλου — 23. EZHΘ] mg. m.

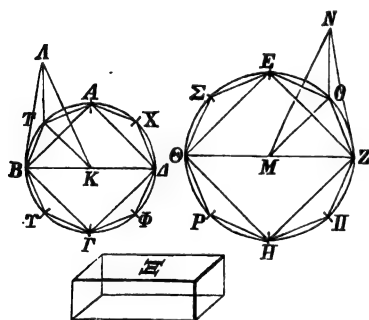
Ergo coni et cylindri, qui eandem habent altitudinem, eam inter se rationem habent quam bases; quod erat demonstrandum.

XII.

Similes coni et cylindri inter se triplicatam rationem habent quam diametri basium.

Sint similes coni et cylindri, quorum bases sint circuli $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$, diametri autem basium $B\Delta$, $Z\Theta$, axes autem conorum et cylindrorum KA , MN . dico, conum, cuius basis sit circulus $AB\Gamma\Delta$, uertex autem A punctum, ad conum, cuius basis sit circulus $EZH\Theta$, uertex autem N punctum, triplicatam rationem habere quam $B\Delta:Z\Theta$.

nam si non est $AB\Gamma\Delta A:EZH\Theta N = B\Delta^3:Z\Theta^3$, conus $AB\Gamma\Delta A$ aut ad solidum aliquod minus cono $EZH\Theta N$ triplicatam rationem habebit aut ad maius.



prius habeat ad minus Ξ , et in circulo $EZH\Theta$ inscribatur quadratum $EZH\Theta$ [IV, 6]. itaque quadratum $EZH\Theta$ maius est dimidio circuli $EZH\Theta$ [p. 142, 11]. et in quadrato $EZH\Theta$ pyramis construatur eundem uerticem habens,

quem conus. itaque pyramis constructa maior erit

XII. Psellus p. 65.

1 P. 23. ἐπὶ ἀπὸ V. ἰσοψηῆς Theon (BVq).

24. τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα]

- τοῦ κώνου. τετμήσθωσαν δὴ αἱ EZ , ZH , $H\Theta$, ΘE περιφέρειαί διχα κατὰ τὰ O , Π , P , Σ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ EO , OZ , $Z\Pi$, ΠH , HP , $P\Theta$, $\Theta\Sigma$, ΣE . καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν EOZ , $Z\Pi H$, $HP\Theta$, $\Theta\Sigma E$ τριγώνων μεῖζόν ἐστίν ἢ τὸ ἡμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ $EZH\Theta$ κύκλου. καὶ ἀνεστάτω ἐφ' ἑκάστου τῶν EOZ , $Z\Pi H$, $HP\Theta$, $\Theta\Sigma E$ τριγώνων πυραμῖς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων μεῖζων ἐστίν
- 10 ἢ τὸ ἡμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας διχα καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἐχούσας τῷ κώνῳ καὶ τοῦτο αἶψι ποιοῦντες καταλείβομεν τινα
- 15 ἀποτμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ἣ ὑπερέχει ὁ $EZH\Theta N$ κώνος τοῦ Ξ στερεοῦ. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν EO , OZ , $Z\Pi$, ΠH , HP , $P\Theta$, $\Theta\Sigma$, ΣE λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμῖς, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $EOZ\Pi HP\Theta\Sigma$ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ
- 20 N σημεῖον, μεῖζων ἐστὶ τοῦ Ξ στερεοῦ. ἐγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον τῷ $EOZ\Pi HP\Theta\Sigma$ πολυγώνῳ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον πολύγωνον τὸ $ATB\Upsilon\Gamma\Phi\Delta X$, καὶ ἀνεστάτω ἐπὶ τοῦ $ATB\Upsilon\Gamma\Phi\Delta X$ πολυγώνου πυραμῖς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ
- 25 κώνῳ, καὶ τῶν μὲν περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $ATB\Upsilon\Gamma\Phi\Delta X$ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἐν τρίγωνον ἔστω τὸ ΔBT , τῶν δὲ περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ

2. τὰ] τό V. 4. $HP\Theta$] $HE\Theta$ q. 7. ἀφ' V. EOZ] O in ras. m. 2 B, $E\Theta Z$ q. 8. ἔχουσα] χ in ras. B. 9. με-

dimidio conī [p. 192, 12]. iam arcus EZ , ZH , $H\Theta$, ΘE in punctis O , Π , P , Σ in duas partes aequales secantur, et ducantur EO , OZ , $Z\Pi$, ΠH , HP , $P\Theta$, $\Theta\Sigma$, ΣE . itaque etiam singuli trianguli EOZ , $Z\Pi H$, $HP\Theta$, $\Theta\Sigma E$ maiores sunt dimidio segmentorum circuli $EZH\Theta$ ad eos pertinentium [p. 142, 22]. et in singulis triangulis EOZ , $Z\Pi H$, $HP\Theta$, $\Theta\Sigma E$ pyramis construatur eundem uerticem habens, quem conus. itaque etiam singulae pyramides constructae maiores sunt dimidio segmentorum conī ad eas pertinentium [p. 194, 11]. iam si arcus reliquos in duas partes aequales secuerimus et rectas duxerimus et in singulis triangulis pyramides construxerimus eundem uerticem habentes, quem conus, et hoc semper fecerimus, frustra quaedam conī relinuemus, quae minora erunt excessu, quo conus $EZH\Theta N$ solidum Ξ excedit. relinquantur et sint ea, quae in EO , OZ , $Z\Pi$, ΠH , HP , $P\Theta$, $\Theta\Sigma$, ΣE posita sunt. itaque quae relinquitur pyramis, cuius basis est $EOZ\Pi H P\Theta\Sigma$ polygonum, uertex autem punctum N , maior est solido Ξ . iam etiam in circulum $AB\Gamma\Delta$ polygono $EOZ\Pi H P\Theta\Sigma$ simile et similiter positum polygonum $ATB\Gamma\Phi\Delta X$ inscribatur [VI, 18], et in polygono $ATB\Gamma\Phi\Delta X$ pyramis construatur eundem uerticem habens, quem conus, et ex triangulis comprehendentibus pyramidem, cuius basis est polygonum $ATB\Gamma\Phi\Delta X$, uertex autem A punctum, unus sit $AB\Gamma$, ex iis autem, qui pyramidem comprehendunt, cuius basis est polygonum

$[\xi\omega\nu]$ in ras. B. 10. $\mu\acute{\epsilon}\rho\omicron\varsigma$] om. V. 17. $\epsilon\lambda\acute{\eta}\varphi\theta\omega$ q.
 18. $\Theta\Sigma$] om. q. 20. $\mu\epsilon\iota\zeta\omicron\nu$ q. 23. $\acute{\epsilon}\pi\acute{\iota}$ — 24. $\pi\omicron\lambda\upsilon\gamma\acute{\alpha}\nu\omicron\nu$
 $\acute{\alpha}\pi' \alpha\upsilon\tau\omicron\upsilon$ Theon (BVq). 27. ATB P. 28. $\tau\acute{\eta}\nu$] om. V.

ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφή δὲ τὸ Ν σημείον,
 ἐν τρίγωνον ἔστω τὸ ΝΖΟ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΤ,
 ΜΟ. καὶ ἐπεὶ ὁμοίος ἔστιν ὁ ΑΒΓΔΔ κῶνος τῷ
 ΕΖΗΘΝ κῶνῳ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ,
 5 οὕτως ἡ ΚΑ ἄξων πρὸς τὸν ΜΝ ἄξονα. ὡς δὲ ἡ
 ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, οὕτως ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜ· καὶ
 ὡς ἄρα ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜ, οὕτως ἡ ΚΑ πρὸς τὴν
 ΜΝ. καὶ ἐναλλάξ ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΑ, οὕτως
 ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΝ. καὶ περὶ ἰσας γωνίας τὰς ὑπὸ
 10 ΒΚΑ, ΖΜΝ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα
 ἔστί τὸ ΒΚΑ τρίγωνον τῷ ΖΜΝ τριγώνῳ. πάλιν,
 ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΤ, οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς
 τὴν ΜΟ, καὶ περὶ ἰσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΒΚΤ, ΖΜΟ,
 ἐπειδήπερ, ὃ μέρος ἔστιν ἡ ὑπὸ ΒΚΤ γωνία τῶν πρὸς
 15 τῷ Κ κέντρῳ τεσσάρων ὀρθῶν, τὸ αὐτὸ μέρος ἔστι
 καὶ ἡ ὑπὸ ΖΜΟ γωνία τῶν πρὸς τῷ Μ κέντρῳ τεσ-
 σάρων ὀρθῶν· ἐπεὶ οὖν περὶ ἰσας γωνίας αἱ πλευραὶ
 ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα ἔστί τὸ ΒΚΤ τρίγωνον
 τῷ ΖΜΟ τριγώνῳ. πάλιν, ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς ἡ ΒΚ
 20 πρὸς τὴν ΚΑ, οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΝ, ἴση δὲ
 ἡ μὲν ΒΚ τῇ ΚΤ, ἡ δὲ ΖΜ τῇ ΟΜ, ἔστιν ἄρα ὡς
 ἡ ΤΚ πρὸς τὴν ΚΑ, οὕτως ἡ ΟΜ πρὸς τὴν ΜΝ.
 καὶ περὶ ἰσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΤΚΑ, ΟΜΝ· ὀρθαὶ
 γάρ· αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα ἔστί τὸ
 25 ΑΚΤ τρίγωνον τῷ ΝΜΟ τριγώνῳ. καὶ ἐπεὶ διὰ
 τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΚΒ, ΝΜΖ τριγώνων ἔστιν ὡς
 ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΚ, οὕτως ἡ ΝΖ πρὸς τὴν ΖΜ,
 διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΒΚΤ, ΖΜΟ τριγώνων

1. ΕΟΖΠΗΡΘΣ q. 2. ΝΟΖ Ρ. 3. ΑΒΓΔ Β, et
 V, corr. m. 2. 4. ΕΖΗΘ Β, et V, corr. m. 2 (ΖΗ in ras.).

$EOZ\pi HP\Theta\Sigma$, uertex autem N punctum, unus sit NZO , et ducantur KT , MO . et quoniam conus $AB\Gamma\Delta A$ cono $EZH\Theta N$ similis est, erit $BA:Z\Theta = KA:MN$ [XI def. 24]. uerum $BA:Z\Theta = BK:ZM$; quare etiam $BK:ZM = KA:MN$. et permutando [V, 16] $BK:KA = ZM:MN$. et circum angulos aequales BKA , ZMN . latera proportionalia sunt. itaque $BKA \sim ZMN$ [VI, 6]. rursus quoniam $BK:KT = ZM:MO$, et angulos aequales BKT , ZMO comprehendunt (quoniam quae pars est $\angle BKT$ quattuor rectorum ad centrum K positorum, eadem¹⁾ pars est $\angle ZMO$ quattuor rectorum ad centrum M positorum), erit $BKT \sim ZMO$. rursus quoniam demonstrauimus $BK:KA = ZM:MN$, et $BK = KT$, $ZM = OM$, erit $TK:KA = OM:MN$. et latera aequales angulos TKA , OMN (recti enim sunt) comprehendentia proportionalia sunt. itaque $AKT \sim NMO$ [VI, 6]. et quoniam propter similitudinem triangulorum AKB , NMZ est $AB:BK = NZ:ZM$, et propter similitudinem BKT , ZMO triangulorum $KB:BT = MZ$

1) Nam polygona similia sunt et latera eorum numero aequalia. Deletis uerbis $\epsilon\pi\epsilon\iota\delta\eta\mu\epsilon\varsigma$ lin. 14 — $\gamma\omega\nu\lambda\alpha\varsigma$ lin. 17 molestam anacoluthiam euitabimus et solitam orationis formam efficiemus; nec sane iis opus est.

7. $\tau\eta\nu ZM$] ZM V. 9. MN] corr. ex NM m. 1 P.
 11. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}$] om. V. ZMN] Z corr. ex B m. rec. P.
 12. $\tau\eta\nu KT$] KT V. 13. MO] O in ras. m. 2 B. 15. $\tau\epsilon\sigma\sigma\acute{\alpha}\rho\omega\nu$] corr. ex δ mg. m. 1 P. 16. ZMO] O in ras. m. 2 B. 17. $\acute{\epsilon}\pi\epsilon\iota\delta\eta\mu\epsilon\varsigma$ — $\gamma\omega\nu\lambda\alpha\varsigma$] om. q; mg. m. 2 B. 18. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}$] om. V. 20. $\tau\eta\nu KA$] KA B. 21. BK] K e corr. V. KT] TK P. MO B. 22. η] (prius) om. P. 24. $\acute{\epsilon}\lambda\acute{\iota}\omega\nu$] om. V. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}$] om. V. 27. $\tau\eta\nu$] om. BV. $\tau\eta\nu$] om. BVq.

ἐστὶν ὡς ἡ KB πρὸς τὴν BT , οὕτως ἡ MZ πρὸς
 τὴν ZO , δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BT , οὕτως
 ἡ NZ πρὸς τὴν ZO . πάλιν, ἐπεὶ διὰ τὴν ομοιότητα
 τῶν ATK , NOM τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ AT πρὸς
 5 τὴν TK , οὕτως ἡ NO πρὸς τὴν OM , διὰ δὲ τὴν
 ὁμοιότητα τῶν TKB , OMZ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ
 KT πρὸς τὴν TB , οὕτως ἡ MO πρὸς τὴν OZ , δι'
 ἴσου ἄρα ὡς ἡ AT πρὸς τὴν TB , οὕτως ἡ NO πρὸς
 τὴν OZ . ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ TB πρὸς τὴν BA ,
 10 οὕτως ἡ OZ πρὸς τὴν ZN . δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ TA
 πρὸς τὴν AB , οὕτως ἡ ON πρὸς τὴν NZ . τῶν
 ATB , NOZ ἄρα τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί·
 ἰσογώνια ἄρα ἐστὶ τὰ ATB , NOZ τρίγωνα· ὥστε καὶ
 ὅμοια. καὶ πυραμῖς ἄρα, ἧς βάσις μὲν τὸ BKT τρί-
 15 γωνον, κορυφή δὲ τὸ A σημεῖον, ὅμοία ἐστὶ πυραμίδι,
 ἧς βάσις μὲν τὸ ZMO τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ N
 σημεῖον· ὑπὸ γὰρ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχονται ἴσων
 τὸ πλῆθος. αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες καὶ τριγώνους
 ἔχουσιν βάσεις ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμο-
 20 λόγων πλευρῶν. ἡ ἄρα $BKTA$ πυραμῖς πρὸς τὴν
 $ZMON$ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ
 BK πρὸς τὴν ZM . ὁμοίως δὲ ἐπιξευγνύντες ἀπὸ τῶν
 A , X , Δ , Φ , Γ , Υ ἐπὶ τὸ K εὐθείας καὶ ἀπὸ τῶν
 E , Σ , Θ , P , H , Π ἐπὶ τὸ M καὶ ἀνιστάντες ἐφ'
 25 ἐκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας τὴν αὐτὴν κορυφήν
 ἐχούσας τοῖς κῶνοις δείξομεν, ὅτι καὶ ἐκάστη τῶν
 ὁμοταγῶν πυραμίδων πρὸς ἐκάστην ὁμοταγῇ πυραμίδα
 τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ BK ὁμόλογος πλευρὰ

1. τὴν] om. V. 2. τὴν ZO] ZO BVq. 3. MZ B, et
 V, sed corr. ἐπεὶ] om. P. 4. ATK] T supra m. 1 V.

: ZO [VI def. 1], ex aequo erit $AB:BT = NZ:ZO$ [V, 22]. rursus quoniam propter similitudinem triangulorum ATK , NOM est $AT:TK = NO:OM$, et propter similitudinem TKB , OMZ triangulorum $KT:TB = MO:OZ$, ex aequo erit $AT:TB = NO:OZ$. demonstrauius autem, esse etiam $TB:BA = OZ:ZN$. ex aequo igitur erit $TA:AB = ON:NZ$. itaque triangulorum ATB , NOZ latera proportionalia sunt. quare aequianguli sunt trianguli ATB , NOZ [VI, 5]. itaque iidem similes sunt [VI def. 1]. itaque etiam pyramis, cuius basis est triangulus BKT , uertex autem A punctum, similis est pyramidi, cuius basis est triangulus ZMO , uertex autem N punctum; nam planis similibus comprehenduntur numero aequalibus [XI def. 9]. similes autem pyramides, quae triangulas habent bases, in triplicata sunt ratione laterum correspondentium [prop. VIII]. itaque erit

$$BKTA:ZMON = BK^3:ZM^3.$$

iam ductis rectis ab A , X , Δ , Φ , Γ , Υ ad K et ab E , Σ , Θ , P , H , Π ad M et in singulis triangulis erectis pyramidibus eosdem uertices habentibus, quos coni, similiter demonstrabimus, etiam singulas pyramides eiusdem ordinis ad singulas pyramides eiusdem ordinis eam rationem habere quam $BK^3:ZM^3$, h. e.

6. OMZ] Z corr. ex N m. rec. P. 7. KT] K in ras. m. 2 B. 8. AT] in ras. V; Δ corr. ex A m. 2 B. 9. $\tau\eta\nu BA$] BA V. 10. $\tau\eta\nu$] om. Vq. 12. ATB] litt. Δ non liquet in P. 14. $\alpha\beta\alpha$] alt. α e corr. V. $\mu\epsilon\nu$ $\epsilon\sigma\tau\iota$ Bq. 19. $\beta\alpha\sigma\epsilon\iota\varsigma$ $\epsilon\chi\theta\upsilon\sigma\alpha\iota$ q. $\epsilon\iota\sigma\iota\nu$ PB. 23. Δ] postea ins. m. 1 P. 24. $\epsilon\varphi$ $\epsilon\kappa\alpha\sigma\tau\omicron\nu$] $\epsilon\pi\iota$ Theon (BVq). 25. $\tau\alpha\varsigma$ $\alpha\upsilon\tau\alpha\varsigma$ $\kappa\omicron\rho\upsilon\nu\alpha\varsigma$ Theon (BVq). 28. $\delta\mu\acute{o}\lambda\omicron\gamma\omicron\nu$ $\pi\lambda\epsilon\nu\rho\acute{\alpha}\nu$ P, corr. m. 1.

πρὸς τὴν ZM ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἥπερ ἡ
 $B\Delta$ πρὸς τὴν $Z\Theta$. καὶ ὥς ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς
 ἐν τῶν ἐπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς
 ἅπαντα τὰ ἐπόμενα· ἐστὶν ἄρα καὶ ὥς ἡ $BK\Gamma\Delta$ πυ-
 5 ραμὶς πρὸς τὴν $ZMON$ πυραμίδα, οὕτως ἡ ὅλη πυ-
 ραμὶς, ἧς βάσις τὸ $ATBT\Gamma\Phi\Delta X$ πολύγωνον, κορυφὴ
 δὲ τὸ Λ σημείον, πρὸς τὴν ὅλην πυραμίδα, ἧς βάσις
 μὲν τὸ $EOZ\Pi\text{HP}\Theta\Sigma$ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ N
 σημείον· ὥστε καὶ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ $ATBT\Gamma\Phi\Delta X$,
 10 κορυφὴ δὲ τὸ Λ , πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις [μὲν]
 τὸ $EOZ\Pi\text{HP}\Theta\Sigma$ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ N ση-
 μεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ $B\Delta$ πρὸς τὴν
 $Z\Theta$. ὑπόκειται δὲ καὶ ὁ κῶνος, οὗ βάσις [μὲν] ὁ
 $AB\Gamma\Delta$ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημείον, πρὸς τὸ Ξ
 15 στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχων ἥπερ ἡ $B\Delta$ πρὸς
 τὴν $Z\Theta$ · ἐστὶν ἄρα ὥς ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν
 ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Λ , πρὸς τὸ Ξ στε-
 ρεόν, οὕτως ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ $ATBT\Gamma\Phi\Delta X$
 [πολύγωνον], κορυφὴ δὲ τὸ Λ , πρὸς τὴν πυραμίδα,
 20 ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $EOZ\Pi\text{HP}\Theta\Sigma$ πολύγωνον, κο-
 ρυφὴ δὲ τὸ N · ἐναλλάξ ἄρα, ὥς ὁ κῶνος, οὗ βάσις
 μὲν ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Λ , πρὸς τὴν ἐν
 αὐτῷ πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ $ATBT\Gamma\Phi\Delta X$ πο-
 λύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ , οὕτως τὸ Ξ [στερεόν] πρὸς
 25 τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $EOZ\Pi\text{HP}\Theta\Sigma$
 πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ N . μεῖζον δὲ ὁ εἰρημένος
 κῶνος τῆς ἐν αὐτῷ πυραμίδος· ἐμπεριέχει γὰρ αὐτήν.
 μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Ξ στερεὸν τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις

2. τήν] om. Bq. καί] ἀλλ' BVq. 4. ἄρα] δέ V.
 8. μὲν ἐστὶ Bq. 10. Λ σημείον V. τήν] om. V. μὲν]

$BA^3 : Z\Theta^3$. et ut unum praecedentium ad unum sequentium, ita omnia praecedentia ad omnia sequentia [V, 12]. est igitur ut $BKTA : ZMON$, ita tota pyramis, cuius basis est polygonum $ATBT\Gamma\Phi\Delta X$, uertex autem A punctum, ad totam pyramidem, cuius basis est polygonum $EOZ\Pi HP\Theta\Sigma$, uertex autem N punctum. quare etiam pyramis, cuius basis est $ATBT\Gamma\Phi\Delta X$, uertex autem A , ad pyramidem, cuius basis est polygonum $EOZ\Pi HP\Theta\Sigma$, uertex autem N punctum, eam rationem habet quam $BA^3 : Z\Theta^3$. supposuimus autem, etiam conum, cuius basis sit circulus $AB\Gamma\Delta$, uertex autem A punctum, ad Ξ solidum eam rationem habere quam $BA^3 : Z\Theta^3$. itaque ut conus, cuius basis est $AB\Gamma\Delta$ circulus, uertex autem A , ad Ξ solidum, ita pyramis, cuius basis est $ATBT\Gamma\Phi\Delta X$, uertex autem A , ad pyramidem, cuius basis est $EOZ\Pi HP\Theta\Sigma$ polygonum, uertex autem N . permutando igitur [V, 16], ut conus, cuius basis est $AB\Gamma\Delta$ circulus, uertex autem A , ad pyramidem suam, cuius basis est polygonum $ATBT\Gamma\Phi\Delta X$, uertex autem A , ita Ξ ad pyramidem, cuius basis est polygonum $EOZ\Pi HP\Theta\Sigma$, uertex autem N . uerum conus, quem diximus, maior est pyramide sua; nam eam continet. itaque etiam Ξ solidum maius est pyramide, cuius

om. P. 11. Litt. ΠH e corr. V. $\sigma\eta\mu\epsilon\iota\omicron\nu$ — 21. $\tau\omicron N$]
 mg. m. 2 B. 13. $\mu\acute{\epsilon}\nu$] om. P. 14. $\sigma\eta\mu\epsilon\iota\omicron\nu$] om. Bq.
 15. $\acute{\epsilon}\chi\omega\nu$] ω in ras. P, $\acute{\epsilon}\chi\omicron\nu$ q. 16. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$] om. V.
 17. A $\sigma\eta\mu\epsilon\iota\omicron\nu$ V. 19. $\pi\omicron\lambda\upsilon\gamma\omega\nu\omicron\nu$] om. P. 22. $\mu\acute{\epsilon}\nu \acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$
 Bq. A $\sigma\eta\mu\epsilon\iota\omicron\nu$ V. 23. $\pi\upsilon\gamma\mu\acute{\iota}\delta\omicron\varsigma$ V. 24. $\sigma\tau\epsilon\gamma\epsilon\acute{\omicron}\nu$] m.
 rec. P. 28. Ξ] Z q?

- μέν ἐστι τὸ $EOZΠHPΘΣ$ πολύγωνον, κορυφή δὲ το N . ἀλλὰ καὶ ἐλαττον· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ κῶνος, οὗ βάσις ὁ $ABΓΔ$ κύκλος, κορυφή δὲ τὸ $Δ$ [σημεῖον], πρὸς ἐλαττόν τι τοῦ κῶνου στερεόν, οὗ
 5 βάσις μὲν ὁ $EZHΘ$ κύκλος, κορυφή δὲ τὸ N σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ $BΔ$ πρὸς τὴν $ZΘ$. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ὁ $EZHΘN$ κῶνος πρὸς ἐλαττόν τι τοῦ $ABΓΔΔ$ κῶνου στερεόν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ $ZΘ$ πρὸς τὴν $BΔ$.
- 10 $Α$ έγω δὴ, ὅτι οὐδὲ ὁ $ABΓΔΔ$ κῶνος πρὸς μείζον τι τοῦ $EZHΘN$ κῶνου στερεόν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ $BΔ$ πρὸς τὴν $ZΘ$.
- $Ε$ ἰ γὰρ δυνατόν, ἐχέτω πρὸς μείζον το $Ξ$. ἀνά-
 παλιν ἄρα τὸ $Ξ$ στερεόν πρὸς τὸν $ABΓΔΔ$ κῶνον
 15 τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ $ZΘ$ πρὸς τὴν $BΔ$. ὥς δὲ τὸ $Ξ$ στερεόν πρὸς τὸν $ABΓΔΔ$ κῶνον, οὕτως ὁ $EZHΘN$ κῶνος πρὸς ἐλαττόν τι τοῦ $ABΓΔΔ$ κῶνου στερεόν. καὶ ὁ $EZHΘN$ ἄρα κῶνος πρὸς ἐλαττόν τι τοῦ $ABΓΔΔ$ κῶνου στερεόν τριπλασίονα λό-
 20 γον ἔχει ἥπερ ἡ $ZΘ$ πρὸς τὴν $BΔ$. ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ὁ $ABΓΔΔ$ κῶνος πρὸς μείζον τι τοῦ $EZHΘN$ κῶνου στερεόν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ $BΔ$ πρὸς τὴν $ZΘ$. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἐλαττον. ὁ $ABΓΔΔ$ ἄρα κῶνος πρὸς τὸν $EZHΘN$
 25 κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ $BΔ$ πρὸς τὴν $ZΘ$.
- Ὡς δὲ ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον· τριπλάσιος γὰρ ὁ κύλινδρος τοῦ κῶνου ὁ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῷ κῶνῳ καὶ ἰσοϋψῆς

1. ἐστὶν P. Z] ins. m. 1 P. 2. ἐλάττων B. ὅπερ ἄτοπον V. 3. βάσις μὲν ἐστὶν ὁ Theon (BVq). 4. σημεῖον]

basis est polygonum $EOZH\Theta\Sigma$, uertex autem N .
uerum idem minus est; quod fieri non potest. itaque
conus, cuius basis est circulus $AB\Gamma\Delta$, uertex autem
 A , ad solidum minus cono, cuius basis est circulus
 $EZH\Theta$, uertex autem N punctum, eam rationem non
habet quam $B\Delta^3 : Z\Theta^3$. iam similiter demonstabi-
mus, ne $EZH\Theta N$ quidem conum ad solidum minus
cono $AB\Gamma\Delta A$ eam rationem habere quam $Z\Theta^3 : B\Delta^3$.

iam dico, conum $AB\Gamma\Delta A$ ne ad maius quidem
cono $EZH\Theta N$ solidum eam rationem habere quam
 $B\Delta^3 : Z\Theta^3$.

nam si fieri potest, habeat ad maius Ξ . e con-
trario igitur [V, 7 coroll.] $\Xi : AB\Gamma\Delta A = Z\Theta^3 : B\Delta^3$.
uerum ut Ξ solidum ad conum $AB\Gamma\Delta A$, ita conus
 $EZH\Theta N$ ad solidum minus cono $AB\Gamma\Delta A$ [prop. II
lemma]. itaque etiam conus $EZH\Theta N$ ad solidum
minus cono $AB\Gamma\Delta A$ eam rationem habet quam $Z\Theta^3$
: $B\Delta^3$; quod fieri non posse demonstraui. itaque
conus $AB\Gamma\Delta A$ ad solidum maius cono $EZH\Theta N$ eam
rationem non habet quam $B\Delta^3 : Z\Theta^3$. demonstraui-
mus autem, eum ne ad minus quidem hanc rationem
habere. ergo $AB\Gamma\Delta A : EZH\Theta N = B\Delta^3 : Z\Theta^3$.

sed ut conus ad conum, ita cylindrus ad cylindrum;
nam cylindrus, qui in eadem basi et sub eadem alti-
tudine est ac conus, triplo maior est cono [prop. X].

- om. P. $\xi\lambda\alpha\sigma\sigma\acute{o}\nu$ BV. 5. $EZH\Theta$] $H\Theta$ in ras. m. 2 B.
7. $\delta\tau\iota\ \sigma\acute{o}\delta\epsilon$] bis P, corr. m. 1. 8. $\xi\lambda\alpha\sigma\sigma\acute{o}\nu$ BVq. 9. η] ins. V.
10. $\delta\eta$] om. B. $\sigma\acute{o}\delta$ V. 16. $AB\Gamma\Delta$ q, et B, corr. m. 2.
 $\sigma\acute{o}\tau\omega\varsigma\ \kappa\alpha\iota$ q. $\sigma\acute{o}\tau\omega\varsigma$ — 17. $\kappa\acute{\omega}\nu\omicron\varsigma$] mg. m. 2 B. 17. $\xi\lambda\alpha\sigma\sigma\acute{o}\nu$
BVq. $AB\Gamma\Delta$ B. 18. $\kappa\alpha\iota\ \acute{o}$ — 19. $\sigma\tau\epsilon\phi\epsilon\acute{o}\nu$] mg. m. 2 V.
18. $\xi\lambda\alpha\sigma\sigma\acute{o}\nu$ BVq. 19. $AB\Gamma\Delta$ q. $\tau\epsilon\tau\pi\lambda\acute{\alpha}\sigma\iota\omicron\nu$ V. 22. $\sigma\tau\epsilon$ -
 $\phi\epsilon\acute{o}\nu$] supra V. 24. $\xi\lambda\alpha\sigma\sigma\omicron\nu$ BV. $\acute{o}\ \acute{\alpha}\rho\alpha$ $AB\Gamma\Delta A$ V.
27. $\tau\epsilon\tau\pi\lambda\acute{\alpha}\sigma\iota\omicron\varsigma$ — 216, 1. $\alpha\upsilon\tau\acute{\omega}$] om. q, mg. m. 2 B.

αὐτῷ. καὶ ὁ κύλινδρος ἄρα πρὸς τὸν κύλινδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ BA πρὸς τὴν $ZΘ$.

Οἱ ἄρα ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιγ'.

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παράλληλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὥς ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, οὕτως ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα.

Κύλινδρος γὰρ ὁ AA ἐπιπέδῳ τῷ $HΘ$ τετμήσθω παράλληλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς AB , $ΓΔ$, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἄξονι τὸ $HΘ$ ἐπίπεδον κατὰ τὸ K σημειον· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ BH κύλινδρος πρὸς τὸν HA κύλινδρον, οὕτως ὁ EK ἄξων πρὸς τὸν KZ ἄξονα.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ὁ EZ ἄξων ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ A , M σημεία, καὶ ἐκκείσθωσαν τῷ EK ἄξονι ἴσοι ὅσοιδηποτοῦν οἱ EN , NA , τῷ δὲ ZK ἴσοι ὅσοιδηποτοῦν οἱ $ZΞ$, $ΞM$, καὶ νοείσθω ὁ ἐπὶ τοῦ AM ἄξονος κύλινδρος ὁ OX , οὗ βάσεις οἱ $OΠ$, $ΦΧ$ κύκλοι. καὶ ἐκβεβλήσθω διὰ τῶν N , $Ξ$ σημείων ἐπίπεδα παράλληλα τοῖς AB , $ΓΔ$ καὶ ταῖς βάσεσι τούτου OX κυλίνδρου καὶ ποιείτωσαν τοὺς $PΞ$, $ΤΤ$ κύκλους περὶ τὰ N , $Ξ$ κέντρα. καὶ ἐπεὶ οἱ AN , NE , EK

1. Post αὐτῷ add. Theon: ἐδείχθη γὰρ (supra V) πᾶς (haec tria uocab. et in textu et mg. m. 2 B) κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον (BVq). ὁ] om. P. 4. εἰσὶν PB. βάσειν P. 5. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. V. 6. ιγ'] om. q. 13. συμβαλλέτω P. τῷ] τῷ EZ

itaque etiam cylindrus ad cylindrum eam rationem habet quam $BA^3 : ZO^3$.

Ergo similes coni et cylindri triplicatam inter se rationem habent quam diametri basium; quod erat demonstrandum.

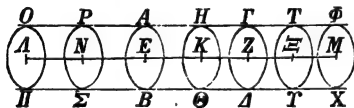
XIII.

Si cylindrus plano planis oppositis parallelo secatur, erit ut cylindrus ad cylindrum, ita axis ad axem.

Nam cylindrus AA plano $H\Theta$ planis oppositis AB , ΓA parallelo secetur, et planum $H\Theta$ cum axe in puncto K concurrat. dico, esse

$$BH : HA = EK : KZ.$$

producatur enim axis EZ ad utramque partem ad puncta A , M , et ponantur axi EK aequales quotlibet



rectae EN , NA , axi autem ZK aequales quotlibet rectae $ZΞ$, $ΞM$, et OX fingatur cylindrus in axe AM ,

cuius bases sunt circuli $OΠ$, $ΦX$. et per puncta N , $Ξ$ plana planis AB , ΓA et basibus cylindri OX parallela ducantur et circulos $PΣ$, TT circum centra N , $Ξ$ efficiant. et quoniam axes AN , NE , EK inter

Theon (BVq). τὸ $H\Theta$ ἐπιπέδον] om. Theon (BVq).

18. κείσθωσαν q. 20. καὶ — 21. κύκλοι] om. Theon (BVq).

22. ἐκβεβλήσθω] διήχθω Theon (BVq). N , $Ξ$] A , N , $Ξ$, M Theon (BVq). 23. ταῖς βάσεσι — 25. κέντρα] νενοσθώσαν ἐν τοῖς διὰ τῶν A , N , $Ξ$, M ἐπιπέδοις περὶ κέντρα τὰ A , N , $Ξ$, M , κύκλοι οἱ $OΠ$, $PΣ$, TT , $ΦX$ ἴσοι τοῖς AB , ΓA καὶ νενοσθώσαν κύλινδροι οἱ $ΠP$, PB , AT , TX Theon (BVq).

23. βάσειςιν P. 25. οἱ AN] mg. m. 1 V.

ἄξονες ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις, οἱ ἄρα $ΠΡ$, PB , BH κύ-
 λινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἴσαι δέ
 εἰσιν αἱ βάσεις· ἴσοι ἄρα καὶ οἱ $ΠΡ$, PB , BH κύ-
 λινδροι ἀλλήλοις. ἐπεὶ οὖν οἱ $ΑΝ$, NE , EK ἄξονες
 5 ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ $ΠΡ$, PB , BH κύ-
 λινδροι ἴσοι ἀλλήλοις, καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ πλῆθος τῷ
 πλήθει, ὅσαπλασίων ἄρα ὁ $ΚΑ$ ἄξων τοῦ EK ἄξονος,
 τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ $ΠΗ$ κύλινδρος τοῦ HB
 κυλίνδρου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὅσαπλασίων ἐστὶν ὁ
 10 $ΜΚ$ ἄξων τοῦ KZ ἄξονος, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ
 ὁ $ΧΗ$ κύλινδρος τοῦ $HΔ$ κυλίνδρου. καὶ εἰ μὲν ἴσος
 ἐστὶν ὁ $ΚΑ$ ἄξων τῷ KM ἄξονι, ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ
 $ΠΗ$ κύλινδρος τῷ HX κυλίνδρῳ, εἰ δὲ μείζων ὁ
 ἄξων τοῦ ἄξονος, μείζων καὶ ὁ κύλινδρος τοῦ κυ-
 15 λίνδρου, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων. τεσσάρων δὴ με-
 γεθῶν ὄντων, ἀξόνων μὲν τῶν EK , KZ , κυλίνδρων
 δὲ τῶν BH , $HΔ$, εἰληπται ἰσάκεις πολλαπλάσια, τοῦ
 μὲν EK ἄξονος καὶ τοῦ BH κυλίνδρου ὅ τε $ΑΚ$
 ἄξων καὶ ὁ $ΠΗ$ κύλινδρος, τοῦ δὲ KZ ἄξονος καὶ
 20 τοῦ $HΔ$ κυλίνδρου ὅ τε KM ἄξων καὶ ὁ HX κύλιν-
 δρος, καὶ δέδεικται, ὅτι εἰ ὑπερέχει ὁ $ΚΑ$ ἄξων τοῦ
 KM ἄξονος, ὑπερέχει καὶ ὁ $ΠΗ$ κύλινδρος τοῦ HX
 κυλίνδρου, καὶ εἰ ἴσος, ἴσος, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων.
 ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ EK ἄξων πρὸς τὸν KZ ἄξονα, οὕτως
 25 ὁ BH κύλινδρος πρὸς τὸν $HΔ$ κύλινδρον· ὅπερ ἔδει
 δεῖξαι.

ιδ'.

Οἱ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντες κῶνοι καὶ κύ-
 λινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη.

1. οἱ ἄρα] καὶ οἱ P . 4. ἀλλήλοις] om. V . οὖν] οὖν
 καὶ P . 5. εἰσὶν] om. V . εἰσὶ] εἰσὶν B . 6. πλῆθος τῶν

se aequales sunt, cylindri ΠP , PB , BH eam inter se rationem habent quam bases [prop. XI]. uerum bases inter se aequales sunt; quare etiam $\Pi P = PB = BH$. iam quoniam axes AN , NE , EK inter se aequales sunt, et etiam cylindri ΠP , PB , BH inter se aequales, et multitudo multitudini aequalis est, quoties multiplex est axis KA axis EK , toties erit etiam cylindrus ΠH cylindri HB multiplex. eadem de causa quoties axis MK multiplex est axis KZ , toties etiam cylindrus XH multiplex est cylindri $H\Delta$. et si $KA = KM$, erit etiam $\Pi H = HX$, sin axis axe maior est, etiam cylindrus cylindro maior est, sin minor est, minor. iam datis quattuor magnitudinibus, axibus EK , KZ et cylindris BH , $H\Delta$, aequae multiplicia sumpta sunt, axis EK et BH cylindri axis AK et cylindrus ΠH , axis autem KZ et $H\Delta$ cylindri axis KM et cylindrus HX , et demonstrauiamus, si $KA > KM$, esse etiam $\Pi H > HX$, sin $KA = KM$, esse $\Pi H = HX$, sin $KA < KM$, esse $\Pi H < HX$. itaque $EK : KZ = BH : H\Delta$ [V def. 5]; quod erat demonstrandum.

XIV.

Coni et cylindri, qui aequales bases habent, eam inter se rationem habent quam altitudines.

AN (A e corr. m. 2 B), NE , EK τῶ πλήθει τῶν ΠP , PB , BH Theon (BVq). 7. ἄρα ἐστίν Bq. KA] AK P.
 EK] KE P. 8. HB] BH Vq. 9. ἐστίν] ἐστὶ καὶ q.
10. ἔσται V. 12. ἔσται] ἐστὶ V. 14. KA ἄξων τοῦ KM
 $\tilde{\alpha}\xi\omega\nu\varsigma$ Theon (BVq). ΠH κύλινδρος τοῦ HX κύλινδρον
Theon (BVq). 15. Ante δὴ del. γάρ m. 1 P. ὄντων
μεγεθῶν V. 17. πολλαπλάσιος V. 20. ὁ HX] ἡ X q.
21. AK P. 23. ἴσος ἐστίν, ἴσος P.

"Εστωσαν γὰρ ἐπὶ ἰσων βάσεων τῶν AB , $\Gamma\Delta$ κύκλων κύλινδροι οἱ EB , $Z\Delta$ · λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ EB κύλινδρος πρὸς τὸν $Z\Delta$ κύλινδρον, οὕτως ὁ $H\Theta$ ἄξων πρὸς τὸν $ΚΑ$ ἄξονα.

- 5 Ἐκβεβλήσθω γὰρ ὁ $ΚΑ$ ἄξων ἐπὶ τὸ N σημειον, καὶ κείσθω τῷ $H\Theta$ ἄξονι ἴσος ὁ AN , καὶ περὶ ἄξονα τὸν AN κύλινδρος νενοήσθω ὁ ΓM . ἐπεὶ οὖν οἱ EB , ΓM κύλινδροι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶν, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἴσαι δὲ εἰσὶν αἱ βάσεις
 10 ἀλλήλαις· ἴσοι ἄρα εἰσὶ καὶ οἱ EB , ΓM κύλινδροι. καὶ ἐπεὶ κύλινδρος ὁ ZM ἐπιπέδῳ τέτμηται τῷ $\Gamma\Delta$ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ ΓM κύλινδρος πρὸς τὸν $Z\Delta$ κύλινδρον, οὕτως ὁ AN ἄξων πρὸς τὸν $ΚΑ$ ἄξονα. ἴσος δὲ ἐστὶν ὁ
 15 μὲν ΓM κύλινδρος τῷ EB κύλινδρῳ, ὁ δὲ AN ἄξων τῷ $H\Theta$ ἄξονι· ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ EB κύλινδρος πρὸς τὸν $Z\Delta$ κύλινδρον, οὕτως ὁ $H\Theta$ ἄξων πρὸς τὸν $ΚΑ$ ἄξονα. ὡς δὲ ὁ EB κύλινδρος πρὸς τὸν $Z\Delta$ κύλινδρον, οὕτως ὁ ABH κῶνος πρὸς τὸν $\Gamma\Delta K$ κῶνον.
 20 καὶ ὡς ἄρα ὁ $H\Theta$ ἄξων πρὸς τὸν $ΚΑ$ ἄξονα, οὕτως ὁ ABH κῶνος πρὸς τὸν $\Gamma\Delta K$ κῶνον καὶ ὁ EB κύλινδρος πρὸς τὸν $Z\Delta$ κύλινδρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

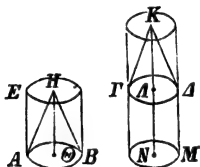
ιε'.

- Τῶν ἰσων κῶνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόν-
 25 θασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· καὶ ὧν κῶνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι εἰσὶν ἐκείνοι.

1. κύκλων] om. Theon (BVq). 2. $Z\Delta$, EB BVq (Z in V supra scr. m. 1). 5. $ΚΑ$] K ins. m. 1 V. τό] corr. ex

Nam cylindri EB , $Z\Delta$ aequalés bases habeant circulos AB , $\Gamma\Delta$. dico, esse $EB : Z\Delta = H\Theta : KA$.

axis enim KA ad N punctum producat, et ponatur $AN = H\Theta$, et circum axem AN fingatur cylindrus ΓM . iam quoniam cylindri EB , ΓM eandem altitudinem habent, eam inter se rationem habent



quam bases [prop. XI]. uerum bases inter se aequales sunt. itaque etiam $EB = \Gamma M$. et quoniam cylindrus ZM plano $\Gamma\Delta$ planis oppositis parallelo sectus est, erit [prop. XIII] $\Gamma M : Z\Delta = AN : KA$. sed $\Gamma M = EB$, $AN = H\Theta$. itaque $EB : Z\Delta = H\Theta : KA$. uerum $EB : Z\Delta = ABH : \Gamma\Delta K$ [prop. X]. ergo erit

$$H\Theta : KA = ABH : \Gamma\Delta K = EB : Z\Delta;$$

quod erat demonstrandum.

XV.

Aequalium conorum et cylindrorum bases in contraria ratione sunt atque altitudines; et quorum conorum et cylindrorum bases in contraria ratione sunt atque altitudines, ii aequales sunt.

τόν P. 7. ἐννοήσθω P. 8. εἰσὶ codd. 10. εἰσὶν PB.
 EB] eras. V. κύλινδροι ἀλλήλοις Bq. 11. ἐπιπέδον
 τινὶ V. 19. Post κώνων add. Theon: τριπλάσιοι γὰρ οἱ κύ-
 λινδροι τῶν κώνων (BVq). 25. ὕψει q. καὶ — 26. ὕψει
 σιν] mg. m. 1 V.

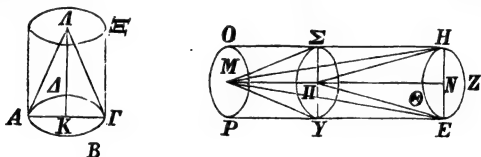
"Εστωσαν ἴσοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ $ΑΒΓΔ$, $ΕΖΗΘ$ κύκλοι, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ $ΑΓ$, $ΕΗ$, ἄξονες δὲ οἱ $ΚΑ$, $ΜΝ$, οἵτινες καὶ ὕψη εἰσὶ τῶν κῶνων ἢ κυλίνδρων, καὶ συμπεπληρωσθῶσαν
 5 οἱ $ΑΞ$, $ΕΟ$ κύλινδροι. λέγω, ὅτι τῶν $ΑΞ$, $ΕΟ$ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἔστιν ὡς ἡ $ΑΒΓΔ$ βάσις πρὸς τὴν $ΕΖΗΘ$ βάσιν, οὕτως τὸ $ΜΝ$ ὕψος πρὸς τὸ $ΚΑ$ ὕψος.

Τὸ γὰρ $ΑΚ$ ὕψος τῷ $ΜΝ$ ὕψει ἦτοι ἴσον ἐστὶν
 10 ἢ οὐ. ἔστω πρότερον ἴσον. ἔστι δὲ καὶ ὁ $ΑΞ$ κύλινδρος τῷ $ΕΟ$ κυλίνδρῳ ἴσος. οἱ δὲ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις· ἴση ἄρα καὶ ἡ $ΑΒΓΔ$ βάσις τῇ $ΕΖΗΘ$ βάσει. ὥστε καὶ ἀντιπέπονθεν, ὡς ἡ $ΑΒΓΔ$ βάσις
 15 πρὸς τὴν $ΕΖΗΘ$ βάσιν, οὕτως τὸ $ΜΝ$ ὕψος πρὸς τὸ $ΚΑ$ ὕψος. ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω τὸ $ΑΚ$ ὕψος τῷ $ΜΝ$ ἴσον, ἀλλ' ἔστω μείζον τὸ $ΜΝ$, καὶ ἀφηρησθῶ ἀπὸ τοῦ $ΜΝ$ ὕψους τῷ $ΚΑ$ ἴσον τὸ $ΠΝ$, καὶ διὰ τοῦ $Π$ σημείου τετμήσθω ὁ $ΕΟ$ κύλινδρος ἐπιπέδῳ τῷ $ΤΤΣ$
 20 παραλλήλῳ τοῖς τῶν $ΕΖΗΘ$, $ΡΟ$ κύκλων ἐπιπέδοις, καὶ ἀπὸ βάσεως μὲν τοῦ $ΕΖΗΘ$ κύκλου, ὕψους δὲ τοῦ $ΝΠ$ κύλινδρος νενοήσθω ὁ $ΕΣ$. καὶ ἐπεὶ ἴσος ἐστὶν ὁ $ΑΞ$ κύλινδρος τῷ $ΕΟ$ κυλίνδρῳ, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ $ΑΞ$ κύλινδρος πρὸς τὸν $ΕΣ$ κύλινδρον, οὕτως
 25 ὁ $ΕΟ$ κύλινδρος πρὸς τὸν $ΕΣ$ κύλινδρον. ἀλλ' ὡς μὲν ὁ $ΑΞ$ κύλινδρος πρὸς τὸν $ΕΣ$ κύλινδρον, οὕτως

1. βάσις q. 3. δέ] om. q. ὕψη] corr. ex ὕψει V.
 4. καὶ — 5. κύλινδροι] punctis del. V. 6. ὕψει Vq.
 καὶ] τουτέστιν ὅτι Theon (BVq). 7. βάσις] corr. ex
 βάσις m. 1 P. 8. $ΑΚ$ Bq. 9. $ΚΑ$ P. 10. ἔστιν P.
 11. ἐπὶ] corr. ex ἀπὸ m. rec. P. 16. $ΚΑ$] $ΑΚ$ B; supra
 eras. " V. μῆ] supra scr. m. 1 V. $ΑΚ$] $ΚΑ$ P.

Sint aequales conus et cylindri, quorum bases sint circuli $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$, diametri autem eorum AG , EH , axes autem KA , MN , qui iidem altitudines sunt conorum uel cylindrorum, et expleantur cylindri $A\Xi$, EO . dico, cylindrorum $A\Xi$, EO bases in contraria ratione esse atque altitudines, et esse $AB\Gamma\Delta : EZH\Theta = MN : KA$.

nam altitudo AK aut aequalis est altitudini MN aut non aequalis. prius sit aequalis. uerum etiam $A\Xi = EO$. coni autem et cylindri, qui eandem habent altitudinem, eam inter se rationem habent quam bases [prop. XI]. itaque etiam $AB\Gamma\Delta = EZH\Theta$. quare etiam in contraria ratione est $AB\Gamma\Delta : EZH\Theta = MN : KA$. iam uero ne sit $AK = MN$, sed sit $MN > AK$, et ab altitudine MN altitudini KA aequalis abscindatur ΠN , et per Π punctum cylindrus EO



plano $T\Gamma\Sigma$ planis circulorum $EZH\Theta$, PO parallelo secetur, et cylindrus fingatur $E\Sigma$ basim habens circulum $EZH\Theta$, altitudinem autem $N\Pi$. et quoniam $A\Xi = EO$, erit $A\Xi : E\Sigma = EO : E\Sigma$ [V, 7]. uerum

17. καὶ — 18. ΠN] P, B mg. m. 2, V ($\tau\omega$ corr. ex $\tau\acute{o}$, $\tau\acute{o}$ ex $\tau\omega$ m. 2; ΠM pro ΠN , sed M e corr. m. 2); καὶ κείσθω $\tau\omega$ AK ὑψεὶ ἴσον $\tau\omega$ ΠM B in textu, q ($\tau\omega$ ΠH pro $\tau\omega$ ΠM), V in textu post καὶ ἀφαιρεθῶ — $\tau\omega$ ΠM , sed punctis del.

19. EO] O in ras. m. 2 B. $T\Gamma\Sigma$] T eras. P. 20. παρ-
αλλήλων ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τῶν $EZH\Theta$, PO κύ-
κλων. καὶ Theon (BVq). 22. ΠN P, $M\Pi$ corr. ex $N\Pi$ m.
2 V. 23. Post κύλινδρον add. ἄλλος δὲ τις ὁ $E\Sigma$ κύλινδρος
Vq, B mg. m. 2.

ἡ $ΑΒΓΔ$ βάσις πρὸς τὴν $ΕΖΗΘ$ · ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶν οἱ $ΑΞ$, $ΕΣ$ κύλινδροι· ὥς δὲ ὁ $ΕΟ$ κύλινδρος πρὸς τὸν $ΕΣ$, οὕτως τὸ $ΜΝ$ ὕψος πρὸς τὸ $ΠΝ$ ὕψος· ὁ γὰρ $ΕΟ$ κύλινδρος ἐκικέδω τέμνεται
 5 παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐκικέδοις. ἔστιν ἄρα καὶ ὥς ἡ $ΑΒΓΔ$ βάσις πρὸς τὴν $ΕΖΗΘ$ βάσιν, οὕτως τὸ $ΜΝ$ ὕψος πρὸς τὸ $ΠΝ$ ὕψος. ἴσον δὲ τὸ $ΠΝ$ ὕψος τῷ $ΚΑ$ ὕψει· ἔστιν ἄρα ὥς ἡ $ΑΒΓΔ$ βάσις πρὸς τὴν $ΕΖΗΘ$ βάσιν, οὕτως τὸ $ΜΝ$ ὕψος
 10 πρὸς τὸ $ΚΑ$ ὕψος. τῶν ἄρα $ΑΞ$, $ΕΟ$ κυλίνδρων ἀντιπεκόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

Ἀλλὰ δὴ τῶν $ΑΞ$, $ΕΟ$ κυλίνδρων ἀντιπεκονθέντωςαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἔστω ὥς ἡ $ΑΒΓΔ$ βάσις πρὸς τὴν $ΕΖΗΘ$ βάσιν, οὕτως τὸ $ΜΝ$ ὕψος
 15 πρὸς τὸ $ΚΑ$ ὕψος· λέγω, ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ $ΑΞ$ κύλινδρος τῷ $ΕΟ$ κυλίνδρῳ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ἐκεῖ ἔστιν ὥς ἡ $ΑΒΓΔ$ βάσις πρὸς τὴν $ΕΖΗΘ$ βάσιν, οὕτως τὸ $ΜΝ$ ὕψος πρὸς τὸ $ΚΑ$ ὕψος, ἴσον δὲ τὸ $ΚΑ$ ὕψος
 20 τῷ $ΠΝ$ ὕψει, ἔστιν ἄρα ὥς ἡ $ΑΒΓΔ$ βάσις πρὸς τὴν $ΕΖΗΘ$ βάσιν, οὕτως τὸ $ΜΝ$ ὕψος πρὸς τὸ $ΠΝ$ ὕψος. ἀλλ' ὥς μὲν ἡ $ΑΒΓΔ$ βάσις πρὸς τὴν $ΕΖΗΘ$ βάσιν, οὕτως ὁ $ΑΞ$ κύλινδρος πρὸς τὸν $ΕΣ$ κύλινδρον· ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶν· ὥς δὲ τὸ $ΜΝ$
 25 ὕψος πρὸς τὸ $ΠΝ$ [ὕψος], οὕτως ὁ $ΕΟ$ κύλινδρος πρὸς τὸν $ΕΣ$ κύλινδρον· ἔστιν ἄρα ὥς ὁ $ΑΞ$ κύλιν-

1. $ΕΖΗΘ$ βάσιν BV. 3. $ΕΣ$ κύλινδρον V. 4. ΠΜ B, ΜΠ V. Post ἐκικέδω add. τῷ ΤΣΡ m. 3 e corr.; eadem verba post τέμνεται hab. V et m. 2 B. 6. καί] om. BVq. βάσις] βάσιν, sed corr. m. 1, P. 7. ΠΜ BV. τό] supra add. ω V. 8. ΠΜ BV. 9. βάσιν] om. BVq. 12. ἀλλά

$A\Xi : E\Sigma = AB\Gamma\Delta : EZH\Theta$ (nam eandem altitudinem habent cylindri $A\Xi$, $E\Sigma$) [prop. XI], et $EO : E\Sigma = MN : \Pi N$; nam cylindrus EO plano planis oppositis parallelo sectus est [prop. XIII]. itaque $AB\Gamma\Delta : EZH\Theta = MN : \Pi N$. uerum $\Pi N = KA$. erit igitur $AB\Gamma\Delta : EZH\Theta = MN : KA$. ergo cylindrorum $A\Xi$, EO bases in contraria ratione sunt atque altitudines.

Iam uero cylindrorum $A\Xi$, EO bases in contraria ratione sint atque altitudines, et sit $AB\Gamma\Delta : EZH\Theta = MN : KA$. dico, esse $A\Xi = EO$.

nam iisdem comparatis quoniam est $AB\Gamma\Delta : EZH\Theta = MN : KA$, et $KA = \Pi N$, erit $AB\Gamma\Delta : EZH\Theta = MN : \Pi N$. uerum $AB\Gamma\Delta : EZH\Theta = A\Xi : E\Sigma$ (nam eandem habent altitudinem) [prop. XI], et $MN : \Pi N = EO : E\Sigma$ [prop. XIII]. est igitur $A\Xi$

— 13. $\tilde{\nu}\psi\epsilon\sigma\iota\nu$] mg. m. 2 B. 13. $\tilde{\nu}\psi\epsilon\sigma\iota$ BVq. 20. ΠM BV.
 21. ΠM corr. ex ΠN V. 25. ΠM corr. ex ΠN V.
 $\tilde{\nu}\psi\epsilon\sigma$] om. P. EO] E in ras. m. 1 P. 26. $\acute{\omega}\varsigma$] supra m. rec. P.

δρος πρὸς τὸν $ΕΣ$ κύλινδρον, οὕτως ὁ $ΕΟ$ κύλινδρος πρὸς τὸν $ΕΣ$. ἴσος ἄρα ὁ $ΑΞ$ κύλινδρος τῷ $ΕΟ$ κύλινδρῳ. ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν κώνων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

6

ις'.

Δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων εἰς τὸν μείζονα κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἄρτιόπλευρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου.

10 Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο κύκλοι οἱ $ΑΒΓΔ$, $ΕΖΗΘ$ περὶ το αὐτὸ κέντρον τὸ $Κ$. δεῖ δὴ εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν $ΑΒΓΔ$ πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἄρτιόπλευρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τοῦ $ΕΖΗΘ$ κύκλου.

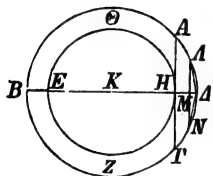
15 Ἦχθω γὰρ διὰ τοῦ $Κ$ κέντρου εὐθεῖα ἡ $ΒΚΔ$, καὶ ἀπὸ τοῦ $Η$ σημείου τῇ $ΒΔ$ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ $ΗΑ$ καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ $Γ$ · ἡ $ΑΓ$ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ $ΕΖΗΘ$ κύκλου. τέμνοντες δὴ τὴν $ΒΑΔ$ περιφέρειαν δίχα καὶ τὴν ἱμίσειαν αὐτῆς δίχα καὶ τοῦτο
20 αἰ ποιοῦντες καταλείψομεν περιφέρειαν ἐλάσσονα τῆς $ΑΔ$. λελείφθω, καὶ ἔστω ἡ $ΑΔ$, καὶ ἀπὸ τοῦ $Α$ ἐπὶ τὴν $ΒΔ$ κάθετος ἤχθω ἡ $ΑΜ$ καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ $Ν$, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $ΑΔ$, $ΑΝ$. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ $ΑΔ$ τῇ $ΑΝ$. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ $ΑΝ$ τῇ $ΑΓ$,
25 ἡ δὲ $ΑΓ$ ἐφάπτεται τοῦ $ΕΖΗΘ$ κύκλου, ἡ $ΑΝ$ ἄρα

1. ὁ $ΕΟ$] δέ in ras. m. rec. V. 2. κύλινδρον] -φ in ras. V. 3. ὡσαύτως] δει in ras. m. rec. V. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. V. 5. ις'] om. q. 6. κύκλων] κύλινδρων q. κέντρων P, sed corr. 7. πολύγωνον] om. V. 8. ψαῦσον? V, ψαύοντος q. τοῦ] om. q. 10. οἱ δοθέντες] om. V. 12. κύκλον] om. V. $ΑΒΓΔ$] $ΒΓ$ eras. V. Dein add. κύκλον V. πολυγώνιον q.

: $E\Sigma = EO : E\Sigma$. ergo $A\Sigma = EO$ [V, 9]. et eodem modo etiam in conis; quod erat demonstrandum.

XVI.

Datis duobus circum idem centrum circulis in maiorem circumulum polygonum aequilaterum, cuius latera paria sunt numero, ita inscribere, ut minorem circumulum non tangat.



Sint dati duo circuli $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$ circum idem centrum K . oportet igitur in maiorem circumulum $AB\Gamma\Delta$ polygonum aequilaterum, cuius latera paria sunt numero, ita

inscribere, ut circumulum $EZH\Theta$ non tangat.

ducatur enim per K centrum recta $BK\Delta$, et ab H puncto ad rectam $B\Delta$ perpendicularis ducatur HA et producat ad Γ . itaque $A\Gamma$ circumulum $EZH\Theta$ contingit [III, 16 coroll.]. iam si arcum $B\Delta\Delta$ in duas partes aequales secuerimus et partem eius dimidiam in duas partes aequales et hoc semper fecerimus, arcum arcu $\Delta\Delta$ minorem relinquemus [X, 1]. relinquatur et sit $\Delta\Delta$, et ab Δ ad $B\Delta$ perpendicularis ducatur ΔM et ad N producat, et ducantur $\Delta\Delta$, ΔN . itaque $\Delta\Delta = \Delta N$ [III, 3. I, 4]. et quoniam ΔN rectae $A\Gamma$ parallela est [I, 28], et $A\Gamma$ circumulum $EZH\Theta$ contingit,

13. $\mu\eta]$ in ras. m. 2 V.

17. $HA]$ AH BV.

20. $\pi\omicron\iota\omicron\upsilon\upsilon\tau\epsilon\varsigma]$ -ες in ras. m. rec. V.

$\Delta\Delta]$ Δ e corr. m. 1 B.

23. $\Delta N]$ $\Delta Z\Theta$, sed $Z\Theta$ in ras. m. rec. V.

V. 24. $\Delta N]$ ΔH q.

15. $BK\Delta]$ $\beta\acute{\alpha}\sigma\iota\varsigma$ in ras. m. rec. V.

$\kappa\alpha\iota]$ $\iota\sigma\eta$ in ras. m. rec. V.

21. $\Delta\Delta]$ AB q.

22. $\Delta M]$ M e corr. m. 2 B.

25. $\Delta\Gamma]$ Δ in ras. m. rec. V.

οὐκ ἐφάπτεται τοῦ $EZH\Theta$ κύκλου· πολλῶ ἄρα αἱ $\Delta\Delta$,
 ΔN οὐκ ἐφάπτονται τοῦ $EZH\Theta$ κύκλου. ἐὰν δὴ τῇ
 $\Delta\Delta$ εὐθείᾳ ἴσας κατὰ τὸ συνεχὲς ἐναρμόσωμεν εἰς τὸν
 $AB\Gamma\Delta$ κύκλον, ἐγγραφήσεται εἰς τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον
 5 πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἄρτιόπλευρον μὴ ψαῦον
 τοῦ ἐλάσσονος κύκλου τοῦ $EZH\Theta$ · ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιζ'.

Δύο σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν
 εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον
 10 ἐγγράφαι μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας
 κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Νενοήσθωσαν δύο σφαῖραι περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον
 τὸ A · δεῖ δὴ εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον
 ἐγγράφαι μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν
 15 ἐπιφάνειαν.

Τετμήσθωσαν αἱ σφαῖραι ἐπιπέδῳ τινὶ διὰ τοῦ
 κέντρου· ἔσονται δὴ αἱ τομαὶ κύκλοι, ἐπειδήπερ με-
 νούσης τῆς διαμέτρου καὶ περιφερομένου τοῦ ἡμικυ-
 κλίου ἐγίγνετο ἡ σφαῖρα· ὥστε καὶ καθ' οἷας ἂν θέ-
 20 σεως ἐπινόησωμεν τὸ ἡμικύκλιον, τὸ δι' αὐτοῦ ἐκβαλ-
 λόμενον ἐπίπεδον ποιήσει ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς
 σφαίρας κύκλον. καὶ φανερόν, ὅτι καὶ μέγιστον, ἐπει-
 δήπερ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας, ἥτις ἐστὶ καὶ τοῦ
 ἡμικυκλίου διάμετρος δηλαδὴ καὶ τοῦ κύκλου, μείζων
 25 ἐστὶ πασῶν τῶν εἰς τὸν κύκλον ἢ τὴν σφαῖραν δια-
 γομένων [εὐθειῶν]. ἔστω οὖν ἐν μὲν τῇ μείζονι

1. αἱ] ἡ q. 2. κύκλου] -κλου erat. V. δέ BV.
 5. τε] om. P. 6. τοῦ] (alt.) τό q. πόρισμα. καὶ φανερόν,
 ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ A κάθετος ἐπὶ τὴν BD οὐκ ἐφάπτεται τοῦ ἐντὸς
 κύκλου mg. m. 1 P. 10. ἐλάττωτος V. 11. περιφέρειαν

AN circumum $EZH\odot$ non contingit. multo igitur magis AA , AN circumum $EZH\odot$ non contingunt. itaque si rectas rectae AA aequales in circumum $AB\Gamma A$ continue aptauerimus [IV, 1], in circumum $AB\Gamma A$ polygonum aequilaterum, cuius latera paria sunt numero, ita inscribemus, ut minorem circumum $EZH\odot$ non tangat; quod oportebat fieri.

XVII.

Datis duabus sphaeris circum idem centrum positis in maiorem sphaeram solidum polyedrum ita inscribere, ut minorem sphaeram secundum superficiem non tangat.

Fingantur duae sphaerae circum idem centrum A .¹⁾ oportet igitur in maiorem sphaeram solidum polyedrum ita inscribere, ut minorem sphaeram secundum superficiem non tangat.

secentur sphaerae plano aliquo per centrum posito. sectiones igitur circuli erunt, quoniam sphaera orta est manente diametro et circumacto semicirculo [XI def. 14]; quare in quacunque positione semicirculum finxerimus, planum per eum ductum sectionem in superficie sphaerae efficiet circumum. et adparet, etiam maximum circumum id effecturum esse, quoniam diametrus sphaerae, quae eadem diametrus est semicirculi et ipsius circuli, ut adparet, maior est omnibus rectis, quae in circulo uel sphaera ducuntur

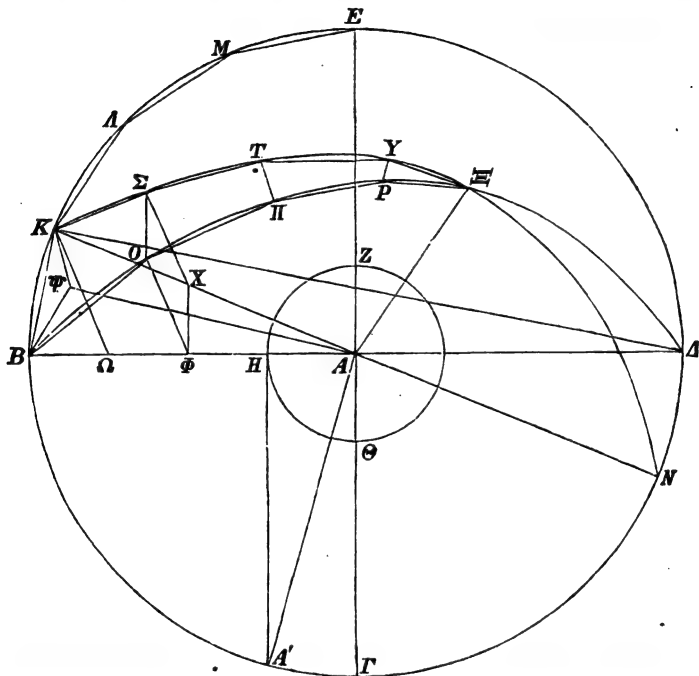
1) Figuram dedi ex P; in B recta KQ omissa est. nouam delineauit Peyrardus.

P; γρ. ἐπιφάνειαν supra m. rec. 19. ἐγένετο V (ante τ ras. 1 litt. et accentus corr.). 23. ἐστίν P. 24. καί] ins. m. 1 V. 26. εὐθείων] om. P.

σφαίρα κύκλος ὁ $BΓΔΕ$, ἐν δὲ τῇ ἐλάσσονι σφαίρα
κύκλος ὁ $ZHΘ$, καὶ ἤχθωσαν αὐτῶν δύο διάμετροι
πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ $BΔ$, $ΓΕ$, καὶ δύο κύκλων
περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων τῶν $BΓΔΕ$, $ZHΘ$ εἰς
5 τὸν μείζονα κύκλον τὸν $BΓΔΕ$ πολύγωνον ἰσόπλευρον
καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγεγράφθω μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος
κύκλου τοῦ $ZHΘ$, 'οὗ πλευραὶ ἔστωσαν ἐν τῷ $ΒΕ$
τεταρτημορίῳ αἱ BK , $ΚΑ$, $ΑΜ$, $ΜΕ$, καὶ ἐπιζευχθεῖσα
ἡ $ΚΑ$ διήχθω ἐπὶ τὸ N , καὶ ἀνεστιάτω ἀπὸ τοῦ A ση-
10 μείου τῷ τοῦ $BΓΔΕ$ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ

2. κύκλος] bis P, corr. m. 2. δύο] om. q. 3. $BΔ$,
 $ΓΕ$] $Δ$ et $Γ$ e corr. V; $BΓ$, $ΔΕ$ B. 6. τε καὶ V.
10. τῷ] om. q.

[III, 15]. Jam in maiore sphaera sit circulus $B\Gamma\Delta E$, in minore autem circulus $ZH\Theta$, et duae eorum diametri inter se perpendiculares ducantur $B\Delta$, ΓE , et datis duobus circulis circum idem centrum positus $B\Gamma\Delta E$, $ZH\Theta$ in maiorem circulum $B\Gamma\Delta E$ polygonum



aequilaterum, cuius latera paria sunt numero, ita inscribatur, ut minorem circulum $ZH\Theta$ non tangat [prop. XVI], et latera eius in BE quarta parte circuli sint BK , $K\Lambda$, ΛM , ME , et ducta KA producat ad N , et ab A puncto ad planum circuli $B\Gamma\Delta E$ per-

$A\Xi$ καὶ συμβαλλέτω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ
 τὸ Ξ , καὶ διὰ τῆς $A\Xi$ καὶ ἑκατέρας τῶν $B\Delta$, KN
 ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω· ποιήσουσι δὴ διὰ τὰ εἰρημένα
 ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας μεγίστους κύκλους.
 5 ποιεῖτωσαν, ὧν ἡμικύκλια ἔστω ἐπὶ τῶν $B\Delta$, KN
 διαμέτρων τὰ $B\Xi\Delta$, $K\Xi N$. καὶ ἐπεὶ ἡ ΞA ὀρθή
 ἐστὶ πρὸς τὸ τοῦ $B\Gamma\Delta E$ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πάντα
 ἄρα τὰ διὰ τῆς ΞA ἐπίπεδά ἐστὶν ὀρθὰ πρὸς τὸ τοῦ
 $B\Gamma\Delta E$ κύκλου ἐπίπεδον· ὥστε καὶ τὰ $B\Xi\Delta$, $K\Xi N$
 10 ἡμικύκλια ὀρθὰ ἐστὶ πρὸς τὸ τοῦ $B\Gamma\Delta E$ κύκλου ἐπί-
 πεδον. καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶ τὰ $BE\Delta$; $B\Xi\Delta$, $K\Xi N$ ἡμι-
 κύκλια· ἐπὶ γὰρ ἴσων εἰσὶ διαμέτρων τῶν $B\Delta$, KN .
 ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ BE , $B\Xi$, $K\Xi$ τεταρτημόρια ἀλλήλοις.
 ὅσαι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ BE τεταρτημορίῳ πλευραὶ τοῦ
 15 πολυγώνου, τοσαῦταί εἰσι καὶ ἐν τοῖς $B\Xi$, $K\Xi$ τεταρ-
 τημορίοις ἴσαι ταῖς BK , KA , AM , ME εὐθείαις.
 ἐγγεγράφθωσαν καὶ ἔστωσαν αἱ BO , OP , PP , $P\Xi$,
 $K\Sigma$, ΣT , TT , $T\Xi$, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΣO , TP ,
 TP , καὶ ἀπὸ τῶν O , Σ ἐπὶ τὸ τοῦ $B\Gamma\Delta E$ κύκλου
 20 ἐπίπεδον κάθετοι ἤχθωσαν· πεσοῦνται δὴ ἐπὶ τὰς
 κοινὰς τομὰς τῶν ἐπιπέδων τὰς $B\Delta$, KN , ἐπειδὴ περ
 καὶ τὰ τῶν $B\Xi\Delta$, $K\Xi N$ ἐπίπεδα ὀρθὰ ἐστὶ πρὸς τὸ
 τοῦ $B\Gamma\Delta E$ κύκλου ἐπίπεδον. πιπτέτωσαν, καὶ ἔστωσαν
 αἱ $O\Phi$, ΣX , καὶ ἐπεξεύχθω ἡ $X\Phi$. καὶ ἐπεὶ ἐν ἴσοις
 25 ἡμικυκλίοις τοῖς $B\Xi\Delta$, $K\Xi N$ ἴσαι ἀπειλημμένοι εἰσὶν
 αἱ BO , $K\Sigma$, καὶ κάθετοι ἡγμένοι εἰσὶν αἱ $O\Phi$, ΣX ,
 ἴση [ἄρα] ἐστ' ἐν ἡ μὲν $O\Phi$ τῇ ΣX , ἡ δὲ $B\Phi$ τῇ KX .
 ἐστὶ δὲ καὶ ὅλη ἡ BA ὅλη τῇ KA ἴση· καὶ λοιπὴ

3. ποιήσουσιν P, ποιούσι q. 5. ἔστωσαν BVq. 6. τὰ]
 corr. ex τὸ B. 7. ἐστὶν B. 8. ὀρθὰ ἐστὶ BVq. 10. ἐστὶν
 PB. $B\Delta\Gamma E$ q. 11. ἐστὶν PB. $K\Xi N$] om. P.

pendicularis erigatur $A\Xi$ et cum superficie sphaerae concidat in Ξ , et per $A\Xi$ et utramque $B\Delta$, KN plana ducantur. itaque propter ea, quae supra diximus, in superficie sphaerae maximos circulos efficient. eos efficiant, quorum semicirculi in diametris $B\Delta$, KN sint, $B\Xi\Delta$, $K\Xi N$. et quoniam ΞA ad planum circuli $B\Gamma\Delta E$ perpendicularis est, etiam omnia plana, quae per ΞA ducuntur, ad planum circuli $B\Gamma\Delta E$ perpendicularia sunt [XI, 18]. quare etiam semicirculi $B\Xi\Delta$, $K\Xi N$ ad planum circuli $B\Gamma\Delta E$ perpendiculares sunt. et quoniam semicirculi $BE\Delta$, $B\Xi\Delta$, $K\Xi N$ aequales sunt (nam in aequalibus sunt diametris $B\Delta$, KN) [III def. 1], etiam quartae circulorum partes BE , $B\Xi$, $K\Xi$ inter se aequales sunt. itaque quot sunt in BE quarta parte latera polygoni, totidem etiam in $B\Xi$, $K\Xi$ quartis partibus sunt rectis BK , $K\Delta$, ΔM , ME aequalia. inscribantur et sint BO , $O\Pi$, ΠP , $P\Xi$ et $K\Sigma$, ΣT , $T\Gamma$, $\Gamma\Xi$, et ducantur ΣO , $T\Pi$, ΓP , et ab O , Σ ad planum circuli $B\Gamma\Delta E$ perpendiculares ducantur. cadent igitur in communes planorum sectiones $B\Delta$, KN , quoniam etiam plana circulorum $B\Xi\Delta$, $K\Xi N$ ad planum circuli $B\Gamma\Delta E$ perpendicularia sunt [tum u. XI def. 4]. cadant et sint $O\Phi$, ΣX , et ducatur $X\Phi$. et quoniam in aequalibus semicirculis $B\Xi\Delta$, $K\Xi N$ aequales abscissae sunt BO , $K\Sigma$ [III, 28], et perpendiculares ductae sunt $O\Phi$, ΣX , erit $O\Phi = \Sigma X$, $B\Phi = KX$ [III, 27. I, 26]. verum etiam $BA = KA$. itaque $\Phi A = XA$. quare

13. Post BE eras. ΔP . Post $B\Xi$ ras. 1 litt. P. $K\Xi$ in ras. m. 1, dein del. N, P. 15. $\tau\sigma\alpha\upsilon\tau\alpha$ q. $\epsilon\lambda\omicron\upsilon\upsilon$ P.B.
 21. $\kappa\alpha\iota \epsilon\pi\epsilon\iota\delta\eta\mu\epsilon\tau\epsilon\varsigma \kappa\alpha\iota$ q. 24. $X\Phi$] corr. ex ΦX m. 1 V, ΦX B. 27. $\acute{\alpha}\rho\alpha$] m. rec. P. ΣX] Σ e corr. V. 28. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ B. KA] e corr. m. 2 V.

- ἄρα ἡ ΦA λοιπῇ τῇ XA ἐστὶν ἴση· ἐστὶν ἄρα ὥς ἡ $B\Phi$ πρὸς τὴν ΦA , οὕτως ἡ KX πρὸς τὴν XA · παρ-
 ἄλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ $X\Phi$ τῇ KB . καὶ ἐπεὶ ἑκατέρω
 τῶν $O\Phi$, ΣX ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ $B\Gamma\Delta E$ κύκλου
 5 ἐπίπεδον, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ $O\Phi$ τῇ ΣX . ἐδείχθη
 δὲ αὐτῇ καὶ ἴση· καὶ αὖ $X\Phi$, ΣO ἄρα ἴσαι εἰσὶ καὶ
 παράλληλοι. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστὶν ἡ $X\Phi$ τῇ
 ΣO , ἀλλὰ ἡ $X\Phi$ τῇ KB ἐστὶ παράλληλος, καὶ ἡ
 ΣO ἄρα τῇ KB ἐστὶ παράλληλος. καὶ ἐπιξεννύουσιν
 10 αὐτὰς αἱ BO , $K\Sigma$ · τὸ $KBO\Sigma$ ἄρα τετραπλευρον ἐν
 ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ, ἐπειδήπερ, ἐὰν ὥσι δύο εὐθεῖαι
 παράλληλοι, καὶ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν ληφθῇ τυχόντα
 σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιξεννυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ
 αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις. διὰ τὰ αὐτὰ
 15 δὴ καὶ ἑκάτερον τῶν ΣOPT , $TPPT$ τετραπλεύρων
 ἐν ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ. ἐστὶ δὲ καὶ τὸ $TP\Xi$ τρίγωνον
 ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ. ἐὰν δὴ νοήσωμεν ἀπὸ τῶν O , Σ ,
 Π , T , P , T σημείων ἐπὶ τὸ A ἐπιξεννυμένας εὐθείας,
 συσταθήσεται τι σχῆμα στερεὸν πολυέδρον μεταξὺ
 20 τῶν $B\Xi$, $K\Xi$ περιφερειῶν ἐκ πυραμίδων συγκείμενον,
 ὧν βάσεις μὲν τὰ $KBO\Sigma$, ΣOPT , $TPPT$ τετρα-
 πλευρα καὶ τὸ $TP\Xi$ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ A ση-
 μεῖον. ἐὰν δὲ καὶ ἐπὶ ἐκάστης τῶν KA , AM , ME
 πλευρῶν καθάπερ ἐπὶ τῆς BK τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν
 25 καὶ ἔτι ἐπὶ τῶν λοιπῶν τριῶν τεταρτημορίων, συστα-
 θήσεται τι σχῆμα πολυέδρον ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν
 σφαῖραν πυραμίδι περιεχόμενον, ὧν βάσεις [μὲν] τὰ

1. τῇ λοιπῇ τῇ q. 2. $B\Phi$] e corr. V m. 2. 4. ἐστὶν
 P. 6. καὶ] (alt.) om. q. ΣO] O euan. P. εἰσὶν PB.
 7. ἐστὶν] -ιν in ras. V, om. q. ΦX P. 8. $X\Phi$] corr.
 in ΦX m. 1 V. 10. $KBO\Sigma$] $BOK\Sigma$ V. 11. ὥσιν PB.

$B\Phi : \Phi A = KX : XA$. itaque $X\Phi$ rectae KB parallela est [VI, 2]. et quoniam utraque $O\Phi$, ΣX ad planum circuli $B\Gamma\Delta E$ perpendicularis est, $O\Phi$ rectae ΣX parallela est [XI, 6]. demonstrauiamus autem, esse etiam $O\Phi = \Sigma X$. quare etiam rectae $X\Phi$, ΣO aequales sunt et parallelae [I, 33]. et quoniam $X\Phi$ rectae ΣO parallela est, eadem autem $X\Phi$ rectae KB parallela, etiam ΣO rectae KB parallela est [I, 30]. et eas iungunt BO , $K\Sigma$. itaque quadrilaterum $KBO\Sigma$ in uno plano positum est, quoniam, si datis duabus rectis parallelis in utraque sumuntur quaelibet puncta, recta ad puncta ducta in eodem plano est ac parallelae [XI, 7]. eadem de causa etiam utrumque quadrilaterum $\Sigma O\Pi T$, $T\Pi P T$ in uno est plano. uerum etiam triangulus $T P \Xi$ in uno plano est [XI, 2]. iam si a punctis O , Σ , Π , T , P , T ad A rectas finxerimus ductas, figura quaedam solida polyedra inter arcus $B\Xi$, $K\Xi$ construatur ex pyramidibus composita, quarum bases sunt quadrilatera $KBO\Sigma$, $\Sigma O\Pi T$, $T\Pi P T$ et triangulus $T P \Xi$, uertex autem A punctum. et si etiam in singulis lateribus KA , AM , ME eadem comparauerimus, quae in BK , et praeterea in reliquis tribus quartis circuli partibus eadem, figura quaedam polyedra construatur in sphaera inscripta ex pyramidibus composita, quarum bases sunt quadrilatera,

14. ἐστὶν B. 15. ἐκάτερα BV. 16. ἐπιπέδῳ ἐστὶν q.
 ἐστὶν B. 21. βάσις BVq. $\Pi T P T$ q. 22. τὸν q.
 $T \Xi P P$, corr. m. 1. τριγώνον q. 24. κατασκευάσμεν
 e corr. m. 1 q. 25. Post τεταρτημορίων add. Theon: καὶ
 ἐπὶ τοῦ λοιποῦ ἡμισφαίριον (BVq). 26. σχῆμα] σχῆμα στε-
 ρεόν. V. συγγεγραμμένον P. 27. πυραμίδων P, ἐκ πυρα-
 μίδων BVq. συγκεῖμενον BV. μέν] om. BVq.

εἰρημένα τετράπλευρα καὶ τὸ $\Gamma\text{P}\Xi$ τρίγωνον καὶ τὰ ὁμοταγῇ αὐτοῖς, κορυφὴ δὲ τὸ A σημεῖον.

Λέγω, ὅτι τὸ εἰρημένον πολυέδρον οὐκ ἐφάπτεται τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, ἐφ' ἧς
5 ἐστὶν ὁ $Z\text{H}\Theta$ κύκλος.

"Ἐχθω ἀπὸ τοῦ A σημείου ἐπὶ τὸ τοῦ $K\text{B}\text{O}\Sigma$ τετραπλεύρου ἐπίπεδον κάθετος ἡ $A\Psi$ καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ψ σημεῖον, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΨB , ΨK . καὶ ἐπεὶ ἡ $A\Psi$ ὀρθή ἐστι πρὸς
10 τὸ τοῦ $K\text{B}\text{O}\Sigma$ τετραπλεύρου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὕτως ἐν τῷ τοῦ τετραπλεύρου ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστὶν. ἡ $A\Psi$ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν $\text{B}\Psi$, ΨK . καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ AK , ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ
15 τῆς AB τῷ ἀπὸ τῆς AK . καὶ ἐστὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AB ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν $\text{A}\Psi$, ΨB . ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Ψ . τῷ δὲ ἀπὸ τῆς AK ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν $\text{A}\Psi$, ΨK . τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $\text{A}\Psi$, ΨB ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $\text{A}\Psi$, ΨK . κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς $\text{A}\Psi$. λοι-
20 πὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $\text{B}\Psi$ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΨK ἴσον ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ $\text{B}\Psi$ τῇ ΨK . ὁμοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Ψ ἐπὶ τὰ O , Σ ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ τῶν $\text{B}\Psi$, ΨK . ὁ ἄρα κέντρον τῷ Ψ καὶ διαστήματι ἐνὶ τῶν ΨB , ΨK
25 γραφόμενος κύκλος ἥξει καὶ διὰ τῶν O , Σ , καὶ ἐστὶ ἐν κύκλῳ τὸ $K\text{B}\text{O}\Sigma$ τετράπλευρον.

Καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ KB τῆς $\text{X}\Phi$, ἴση δὲ ἡ $\text{X}\Phi$ τῇ ΣO , μείζων ἄρα ἡ KB τῆς ΣO . ἴση δὲ ἡ

1. $\text{T}\Xi\text{P}\text{BV}$. 2. ὁμοιοταγῇ B . 3. λέγω δὴ η .
9. ΨB] B e corr. P , $\text{B}\Psi\text{BVq}$. ἐστὶν P . 10. $\text{KB}\text{O}\Sigma$] Σ
e corr. m . 1 P , mut. in $\text{BKO}\Sigma$ m . 1 V , $\text{BKO}\Sigma$ q . τετρα-

quae nominauimus, et triangulus $TP\Xi$, et quae similem obtinent locum, uertex autem punctum A .

dico, polyedrum, quod significauimus, minorem sphaeram non tangere secundum superficiem, in qua est circulus $ZH\Theta$.

ducatur ab A puncto ad planum quadrilateri $KBO\Sigma$ perpendicularis $A\Psi$ et cum plano in puncto Ψ concidat, et ducantur ΨB , ΨK . et quoniam $A\Psi$ ad planum quadrilateri $KBO\Sigma$ perpendicularis est, etiam ad omnes rectas eam tangentes et in plano quadrilateri positas perpendicularis est [XI def. 3]. itaque $A\Psi$ ad utramque $B\Psi$, ΨK perpendicularis est. et quoniam $AB = AK$, erit etiam $AB^2 = AK^2$. est autem $A\Psi^2 + \Psi B^2 = AB^2$; nam angulus ad Ψ positus rectus est [I, 47]; et $A\Psi^2 + \Psi K^2 = AK^2$. quare $A\Psi^2 + \Psi B^2 = A\Psi^2 + \Psi K^2$. auferatur, quod commune est, $A\Psi^2$. itaque $B\Psi^2 = \Psi K^2$. quare $B\Psi = \Psi K$. similiter demonstrabimus, etiam rectas a Ψ ad O , Σ ductas aequales esse utrique $B\Psi$, ΨK . itaque circulus, qui centro Ψ et radio alterutra rectarum ΨB , ΨK describitur, etiam per O , Σ ueniet, et quadrilaterum $KBO\Sigma$ in circulo erit.

et quoniam $KB > X\Phi$ et $X\Phi = \Sigma O$, erit $KB > \Sigma O$. uerum $KB = K\Sigma = BO$. quare etiam $K\Sigma$

- $\pi\lambda\epsilon\upsilon\rho\omicron\nu$] om. V. 12. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$] $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu \eta A\Psi$ Theon (BVq).
 13. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ P. 14. $\tau\acute{o}$] corr. ex $\tau\tilde{\omega}$ m. 1 P. 15. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ P.
 18. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ P. 19. $\acute{\alpha}\nu\acute{o}$] $-\pi\acute{o}$ in ras. V. 21. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\alpha\iota$ q.
 ΨB P. 22. $\tau\acute{\alpha}$ O , Σ] corr. m. 2 ex $\tau\acute{o}$ $O B$.
 23. ΨK] K in ras. V. 24. $\tau\tilde{\omega}$] bis P, sed corr. m. 1.
 $-\sigma\tau\eta$ - e corr. m. rec. P. $B\Psi$ Vq. 26. $\tau\acute{o}$] corr. ex $\tau\tilde{\omega}$ V.
 27. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ V. $X\Phi$] corr. ex ΦX V, ΦX B. 28. $\tau\eta$] $\tau\eta\varsigma$ B. $\tau\eta\varsigma$] $\tau\eta$ q. $\iota\sigma\eta$ $\delta\acute{\epsilon}$ — p. 238, 2. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$] mg. m. 2 B.

ΚΒ ἐκατέρᾳ τῶν ΚΣ, ΒΟ· καὶ ἐκατέρᾳ ἄρα τῶν
 ΚΣ, ΒΟ τῆς ΣΟ μείζων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ
 τετράπλευρόν ἐστι τὸ ΚΒΟΣ, καὶ ἴσαι αἱ ΚΒ, ΒΟ,
 ΚΣ, καὶ ἐλάττων ἡ ΟΣ, καὶ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ
 5 κύκλου ἐστὶν ἡ ΒΨ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΚΒ τοῦ ἀπὸ
 τῆς ΒΨ μείζον ἐστὶν ἢ διπλάσιον. ἤχθω ἀπὸ τοῦ
 Κ ἐπὶ τὴν ΒΦ κάθετος ἡ ΚΩ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΔ τῆς
 ΔΩ ἐλάττων ἐστὶν ἢ διπλῇ, καὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς
 τὴν ΔΩ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΔΒ, ΒΩ πρὸς τὸ ὑπὸ
 10 [τῶν] ΔΩ, ΩΒ, ἀναγραφόμενον ἀπὸ τῆς ΒΩ τετρα-
 γώνου καὶ συμπληρουμένου τοῦ ἐπὶ τῆς ΩΔ παραλ-
 ληλογράμμου καὶ τὸ ὑπὸ ΔΒ, ΒΩ ἄρα τοῦ ὑπὸ ΔΩ,
 ΩΒ ἐλαττόν ἐστὶν ἢ διπλάσιον. καὶ ἐστὶ τῆς ΚΔ
 ἐπιξεννυμένης τὸ μὲν ὑπὸ ΔΒ, ΒΩ ἴσον τῷ ἀπὸ
 15 τῆς ΒΚ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΔΩ, ΩΒ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς
 ΚΩ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΚΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΩ ἐλασσόν
 ἐστὶν ἢ διπλάσιον. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΚΒ τοῦ ἀπὸ
 τῆς ΒΨ μείζον ἐστὶν ἢ διπλάσιον· μείζον ἄρα τὸ ἀπὸ
 τῆς ΚΩ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ
 20 τῇ ΚΑ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΚ.
 καὶ ἐστὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΒΑ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΒΨ,
 ΨΑ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΚΑ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΚΩ, ΩΑ·
 τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΨ, ΨΑ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν
 ΚΩ, ΩΑ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΚΩ μείζον τοῦ ἀπὸ τῆς
 ΒΨ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΩΑ ἐλασσόν ἐστὶ τοῦ
 25 ἀπὸ τῆς ΨΑ. μείζων ἄρα ἡ ΑΨ τῆς ΑΩ· πολλῶ

1. καὶ] om. q. καὶ — 2. ΒΟ] mg. m. rec. P. 2. ΚΣ,
 ΒΟ] corr. ex ΚΒ, ΣΟ P. ἐστὶ V q. 6. ἤχθω — 7. κά-
 θετος] bis P, sed corr. m. 1. 7. Κ σημείον B. ΚΩ]
 supra scr. ε, mg. ε m. 1 P, corr. in ΚΦ m. rec.; ΚΦ ΒV q,
 sed in V supra scr. ω m. 1. 8. ΔΩ] P m. 1, ΔΦ ΒV q, P

$> \Sigma O$, $BO > \Sigma O$. et quoniam in circulo est quadrilaterum $KBO\Sigma$, et KB , BO , $K\Sigma$ aequales, $O\Sigma$ autem minor, et radius circuli est $B\Psi$, erit¹⁾ $KB^2 > 2B\Psi^2$. ducatur a K ad $B\Phi$ perpendicularis $K\Omega$.²⁾ et quoniam $BA < 2A\Omega$, et $BA : A\Omega = AB \times B\Omega : A\Omega \times \Omega B$, constructo in $B\Omega$ quadrato et parallelogrammo in ΩA expleto erit etiam $AB \times B\Omega < 2A\Omega \times \Omega B$. et ducta KA erit $AB \times B\Omega = BK^2$, $A\Omega \times B\Omega = K\Omega^2$ [III, 31. VI, 8 coroll.]. itaque $KB^2 < 2K\Omega^2$. uerum $KB^2 > 2B\Psi^2$. itaque $K\Omega^2 > B\Psi^2$. et quoniam $BA = KA$, erit $BA^2 = AK^2$. et $BA^2 = B\Psi^2 + \Psi A^2$, $KA^2 = K\Omega^2 + \Omega A^2$ [I, 47]. itaque $B\Psi^2 + \Psi A^2 = K\Omega^2 + \Omega A^2$, quorum $K\Omega^2 > B\Psi^2$. quare $\Omega A^2 < \Psi A^2$ et $A\Psi > A\Omega$. multo igitur magis

1) Nam singula latera KB , BO , $K\Sigma$ maiora sunt latere quadrati inscripti, quod aequale est $B\Psi\sqrt{2}$.

2) Facile demonstratur, perpendicularem hanc in ipsum punctum Φ cadere, et huc spectat emendatio Theonis Φ ubique pro Ω reponentis. sed tum demonstrandum ei erat, $K\Phi$ perpendicularem esse. Euclides hoc aut non intellexit aut, quod potius crediderim, non curauit, quia ad tenorem demonstrationis nihil prorsus refert.

m. rec.; item lin. 9, 10, 12, 15. 9. $B\Omega$] P m. 1, $B\Phi BVq$, P m. rec.; item lin. 10, 12, 14. 10. $\tau\omega\nu$] om. P. ΩB] P m. 1, $\Phi B BVq$, P m. rec.; item lin. 13, 15. $\acute{\alpha}\pi\acute{o}$] corr. ex $\alpha\theta\tau\omicron\upsilon$ m. 2 B. 11. ΩA] P m. 1, $\Phi A BVq$, P m. rec.; dein add. V: $\Phi B \acute{\epsilon}\nu \acute{\epsilon}\tau\acute{\epsilon}\rho\omega$ (in textu m. 1). 12. $\acute{\upsilon}\pi\acute{o}$] $\acute{\upsilon}\pi\acute{o} \tau\omega\nu$ Vq. $\acute{\upsilon}\pi\acute{o}$] $\acute{\upsilon}\pi\acute{o} \tau\omega\nu$ V. 13. $\eta \delta\iota\pi\lambda\acute{\alpha}\sigma\iota\omicron\nu$] $\delta\iota\pi\lambda\alpha\sigma\iota\omicron\nu$ P. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ P. 15. BK] KB q et in ras. V. $BK - \tau\eta\varsigma$] bis q. 16. $K\Omega$] (prius et alt.) P m. 1, $K\Phi BVq$, P m. rec. $\tau\eta\varsigma$] (alt.) $\tau\omicron\upsilon$ V. 19. $K\Omega$] P m. 1, $K\Phi BVq$, P m. rec.; item lin. 22, 24 bis. 20. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota \kappa\alpha\iota \tau\acute{o}$ V. AK] in ras. V, KA B. 21. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ P. $\tau\omega$] corr. ex $\tau\acute{o}$ V. 22. ΩA] P m. 1, $\Phi A BVq$, P m. rec.; item lin. 24, 25. 23. $\tau\acute{\alpha} \acute{\alpha}\rho\alpha - 24$ ΩA] mg. m. 2 V. 25. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ P. 26. $A\Omega$] P m. 1, $A\Phi BVq$, P m. rec.

ἄρα ἡ $A\Psi$ μείζων ἐστὶ τῆς AH . καὶ ἐστὶν ἡ μὲν $A\Psi$ ἐπὶ μίαν τοῦ πολυέδρου βάσιν, ἡ δὲ AH ἐπὶ τὴν τῆς ἐλάσσονος σφαίρας ἐπιφάνειαν· ὥστε τὸ πολυέδρον οὐ ψαύσει τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν
 5 ἐπιφάνειαν.

Δύο ἄρα σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολυέδρον ἐγγράφεται μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

10

Πόρισμα.

Ἐὰν δὲ καὶ εἰς ἑτέραν σφαῖραν τῷ ἐν τῇ $BΓΔΕ$ σφαίρᾳ στερεῶ πολυέδρῳ ὅμοιον στερεὸν πολυέδρον ἐγγραφῇ, τὸ ἐν τῇ $BΓΔΕ$ σφαίρᾳ στερεὸν πολυέδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ στερεὸν πολυέδρον τρι-
 15 πλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ τῆς $BΓΔΕ$ σφαίρας διάμετρος πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας σφαίρας διάμετρον. διαιρεθέντων γὰρ τῶν στερεῶν εἰς τὰς ὁμοιοπληθεῖς καὶ ὁμοιοταγεῖς πυραμίδας ἔσονται αἱ πυραμίδες ὅμοιαι. αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἐν τρι-
 20 πλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· ἡ ἄρα πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $KBO\Sigma$ τετράπλευρον, κορυφὴ δὲ τὸ A σημεῖον, πρὸς τὴν ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ ὁμοιοταγῇ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ὁμολόγος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμολόγον πλευράν, τουτ-
 25 ἐστιν ἥπερ ἡ AB ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περὶ κέντρον τὸ A πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐτέ-

1. $A\Psi$] $O\Psi$ q. 4. ψαύει P. 5. Seq. demonstr. altera, u. app. 9. ποιῆσαι] δεῖξαι Theon ($B\Gamma\Delta$ q). 10. πόρισμα] mg. m. 1 P; om. $B\Gamma\Delta$ q. 14. πρὸς τὸ — πολυέδρον] mg. m. 2 B. 16. στερεῶς B, ἐλάσσονος q. σφαίρας] om.

$A\Psi > AH$. et $A\Psi$ ad unam basim polyedri, AH autem ad superficiem minoris sphaerae ducta est. quare polyedrum minorem sphaeram secundum superficiem non tanget.¹⁾

Ergo datis duabus sphaeris circum idem centrum positis in maiorem sphaeram solidum polyedrum ita inscriptum est, ut minorem sphaeram secundum superficiem non tangat; quod oportebat fieri.

Corollarium.

Sin etiam in aliam sphaeram solido polyedro in sphaera $B\Gamma\Delta E$ inscripto simile polyedrum solidum inscripserimus, solidum polyedrum in sphaera $B\Gamma\Delta E$ inscriptum ad solidum polyedrum in altera sphaera inscriptum triplicatam rationem habebit quam diametrus sphaerae $B\Gamma\Delta E$ ad diametrum alterius sphaerae. solidis enim in pyramides numero aequales et simili loco positas diuisis pyramides similes erunt. similes autem pyramides triplicatam inter se rationem habent quam latera correspondentia [prop. VIII coroll.]. itaque pyramis, cuius basis est quadrilaterum $KBO\Sigma$, uertex autem A punctum ad pyramidem in altera sphaera simili loco positam triplicatam rationem habet quam latus correspondens ad latus correspondens, h. e. quam AB radius sphaerae, cuius centrum est A , ad radium

1) Idem enim similiter fere de ceteris basibus solidi demonstrari potest.

q. 17. ὁμοπληθεῖς V. 18. ὁμοταγεῖς BV. 20. εἰσὶν B.
 πρῶτα μὲν ἄρα P. 21. $K\Theta\Sigma O$ V, sed corr. 23. ὁμο-
 ταγῇ V et B, sed corr. m. 1. 26. περὶ τό Bq.

Euclides, edd. Heiberg et Menge. IV.

ρας σφαίρας. ὁμοίως καὶ ἐκάστη πυραμὶς τῶν ἐν τῇ
περὶ κέντρον τὸ A σφαίρα πρὸς ἐκάστην ὁμοταγῇ
πυραμίδα τῶν ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρα τριπλασίονα λόγον
ἔξει, ἥπερ ἡ AB πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρον τῆς ἑτέρας
5 σφαίρας. καὶ ὥς ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἐν τῶν ἐπο-
μένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ
ἐπόμενα· ὥστε ὅλον τὸ ἐν τῇ περὶ κέντρον τὸ A σφαίρα
στερεὸν πολύεδρον πρὸς ὅλον τὸ ἐν τῇ ἑτέρᾳ [σφαίρα]
στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔξει, ἥπερ ἡ
10 AB πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρον τῆς ἑτέρας σφαίρας,
τουτέστιν ἥπερ ἡ BA διάμετρος πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας
σφαίρας διάμετρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιγ'.

AI σφαῖραι πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι
15 λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων διαμέτρων.

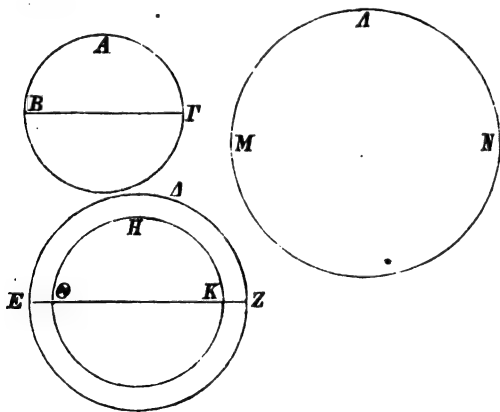
Νενοήσθωσαν σφαῖραι αἱ $ABΓ$, $ΔEZ$, διάμετροι
δὲ αὐτῶν αἱ $BΓ$, EZ · λέγω, ὅτι ἡ $ABΓ$ σφαῖρα πρὸς
τὴν $ΔEZ$ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ
 $BΓ$ πρὸς τὴν EZ .

2. περὶ τὸ Bq. 4. ἑτέρας] om. P. 7. ὥστε καὶ P.
περὶ τὸ B. κέντρῳ τῷ q. 8. σφαίρα] om. P.
10. ἑτέρας] B supra scr. στερεῶς m. 2. 15. εἰσὶν PB.
16. ἐννοήσθωσαν P.

alterius sphaerae. similiter etiam singulae pyramides in sphaera positae, cuius centrum est A , ad singulas pyramides simili loco positae in altera sphaera triplicatam rationem habent quam AB ad radium alterius sphaerae. et ut unum praecedentium ad unum sequentium, ita omnia praecedentia ad omnia sequentia [V, 12]. quare totum solidum polyedrum in sphaera positum, cuius centrum est A , ad totum solidum polyedrum in altera sphaera positum triplicatam rationem habebit quam AB ad radium alterius sphaerae, h. e. quam diameter BA ad diametrum alterius sphaerae; quod erat demonstrandum.

XVIII.

Sphaerae triplicatam inter se rationem habent quam diametri.



Fingantur sphaerae $AB\Gamma$, ΔEZ , earum autem diametri $B\Gamma$, EZ . dico, esse $AB\Gamma : \Delta EZ = B\Gamma^3 : EZ^3$.

Εἰ γὰρ. μὴ ἡ $AB\Gamma$ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔEZ σφαῖραν
 τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν EZ ,
 ἔξει ἄρα ἡ $AB\Gamma$ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς
 ΔEZ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἢ πρὸς μείζονα ἢ περ
 5 ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν EZ . ἐχέτω πρότερον πρὸς ἐλάσσονα
 τὴν $H\Theta K$, καὶ νενοήσθω ἡ ΔEZ τῇ $H\Theta K$ περὶ τὸ
 αὐτὸ κέντρον, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν
 τὴν ΔEZ στερεὸν πολύεδρον μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσο-
 νος σφαίρας τῆς $H\Theta K$ κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, ἐγγε-
 10 γράφθω δὲ καὶ εἰς τὴν $AB\Gamma$ σφαῖραν τῷ ἐν τῇ ΔEZ
 σφαίρᾳ στερεῷ πολυέδρῳ ὁμοιον στερεὸν πολυέδρον·
 τὸ ἄρα ἐν τῇ $AB\Gamma$ στερεὸν πολυέδρον πρὸς τὸ ἐν
 τῇ ΔEZ στερεὸν πολυέδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει
 ἢ περ ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν EZ . ἔχει δὲ καὶ ἡ $AB\Gamma$ σφαῖρα
 15 πρὸς τὴν $H\Theta K$ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἢ περ ἡ
 $B\Gamma$ πρὸς τὴν EZ . ἔστιν ἄρα ὥς ἡ $AB\Gamma$ σφαῖρα πρὸς
 τὴν $H\Theta K$ σφαῖραν, οὕτως τὸ ἐν τῇ $AB\Gamma$ σφαίρᾳ
 στερεὸν πολυέδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔEZ σφαίρᾳ στε-
 ρεὸν πολυέδρον· ἐναλλάξ [ἄρα] ὥς ἡ $AB\Gamma$ σφαῖρα
 20 πρὸς τὸ ἐν αὐτῇ πολυέδρον, οὕτως ἡ $H\Theta K$ σφαῖρα
 πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔEZ σφαίρᾳ στερεὸν πολυέδρον. μείζων
 δὲ ἡ $AB\Gamma$ σφαῖρα τοῦ ἐν αὐτῇ πολυέδρου· μείζων
 ἄρα καὶ ἡ $H\Theta K$ σφαῖρα τοῦ ἐν τῇ ΔEZ σφαίρᾳ πο-
 λυέδρου. ἀλλὰ καὶ ἐλάττων· ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ'
 25 αὐτοῦ. οὐκ ἄρα ἡ $AB\Gamma$ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς
 ΔEZ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ $B\Gamma$
 διάμετρος πρὸς τὴν EZ . ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι

3. σφαῖρα] om. q. 6. $H\Theta$ P. ἐννοήσθω P. Post
 ΔEZ add. σφαῖρα Vq et B m. 2. 7. γεγράφθω q.
 8. ΔEZ] E supra scr. m. 1 V. 9. $H\Theta$ P. 10. ΔEZ] E

nam si non est $AB\Gamma: \triangle EZ = B\Gamma^3: EZ^3$, sphaera $AB\Gamma$ aut ad sphaeram minorem sphaera $\triangle EZ$ triplicatam rationem habebit quam $B\Gamma: EZ$, aut ad maiorem. prius habeat ad minorem $H\Theta K$, et fingantur $\triangle EZ$, $H\Theta K$ circum idem centrum positae, et in maiorem sphaeram $\triangle EZ$ solidum polyedrum ita inscribatur, ut minorem sphaeram $H\Theta K$ secundum superficiem non tangat [prop. XVII], et etiam in sphaeram $AB\Gamma$ solidum polyedro in $\triangle EZ$ sphaera inscripto simile solidum polyedrum inscribatur. itaque polyedrum solidum in $AB\Gamma$ inscriptum ad solidum polyedrum in $\triangle EZ$ inscriptum triplicatam rationem habet quam $B\Gamma: EZ$ [prop. XVII coroll.]. uerum etiam $AB\Gamma: H\Theta K = B\Gamma^3: EZ^3$. itaque ut $AB\Gamma: H\Theta K$, ita erit solidum polyedrum in $AB\Gamma$ sphaera inscriptum ad solidum polyedrum in $\triangle EZ$ sphaera inscriptum. permutando [V, 16] ut sphaera $AB\Gamma$ ad polyedrum in ea inscriptum, ita sphaera $H\Theta K$ ad solidum polyedrum in $\triangle EZ$ sphaera inscriptum. sed sphaera $AB\Gamma$ maior est polyedro in ea inscripto. itaque etiam sphaera $H\Theta K$ maior est polyedro in sphaera $\triangle EZ$ inscripto [V, 14]. uerum eadem minor est; nam ab eo comprehenditur. itaque sphaera $AB\Gamma$ ad minorem sphaeram $\triangle EZ$ triplicatam rationem non habet quam $B\Gamma$ diametrus ad EZ . similiter demonstrabimus, ne $\triangle EZ$ quidem

supra scr. m. 1 V. 11. σφαίρα] om. V. στερεόν] om. V.
 12. πρὸς τό — 13. πολυέδρον] om. q. 14. ABΓ] AΓ P.
 15. λόγον] λόγον ἔχει P. 16. AB q. 17. σφαίρα] om. V.
 18. πρὸς τό — 19. πολυέδρον] om. q. 18. σφαίρα] om.
 V. 19. ἄρα] om. P. 20. σφαίρα] om. V. 22. σφαίρα]
 om. V. 25. ἐλάττωα P. 26. ΔΖ V.

οὐδὲ ἡ ΔEZ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς $AB\Gamma$ σφαίρας
τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ EZ πρὸς τὴν $B\Gamma$.

Λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ ἡ $AB\Gamma$ σφαῖρα πρὸς μείζονά
τινα τῆς ΔEZ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ
5 ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν EZ .

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐχέτω πρὸς μείζονα τὴν AMN
ἀνάπαλιν ἄρα ἡ AMN σφαῖρα πρὸς τὴν $AB\Gamma$ σφαί-
ραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ EZ διάμετρος
πρὸς τὴν $B\Gamma$ διάμετρον. ὥς δὲ ἡ AMN σφαῖρα
10 πρὸς τὴν $AB\Gamma$ σφαῖραν, οὕτως ἡ ΔEZ σφαῖρα πρὸς
ἐλάσσονά τινα τῆς $AB\Gamma$ σφαίρας, ἐπειδήπερ μείζων
ἐστὶν ἡ AMN τῆς ΔEZ , ὥς ἔμπροσθεν ἐδείχθη. καὶ
ἡ ΔEZ ἄρα σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς $AB\Gamma$
σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ EZ πρὸς τὴν
15 $B\Gamma$. ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ἡ $AB\Gamma$ σφαῖρα
πρὸς μείζονά τινα τῆς ΔEZ σφαίρας τριπλασίονα λόγον
ἔχει ἥπερ ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν EZ . ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ
πρὸς ἐλάσσονα. ἡ ἄρα $AB\Gamma$ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔEZ
σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν
20 EZ . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

4. ἔξει V. 11. σφαίρας, ὥς ἔμπροσθεν ἐδείχθη, his
verbis infra lin. 12 omissis, BV. 13. ἄρα] om. BV.
τινα] om. BV. 16. τινα] om. BV. 18. ἐλασσον q.
 $AB\Gamma$] $B\Gamma$ q. In fine: Εὐκλείδου στοιχείων ιβ Pq, Εὐκλείδου
στερεῶν β, ἐστὶ δὲ τῶν στοιχείων τὸ ιβ B. In q seq. τοῦτο τὸ
θεώρημα τὸ ε' ἐστὶ τοῦ ιγ' βιβλίου, deinde in textu XIII, 6
(in mg. θεώρημά ἐστὶ τοῦτο ε' τοῦ ιγ' βιβλίου); u. app.

sphaeram ad minorem sphaera $AB\Gamma$ triplicatam rationem habere quam EZ ad $B\Gamma$.

iam dico, sphaeram $AB\Gamma$ ne ad maiorem quidem sphaera ΔEZ triplicatam rationem habere quam $B\Gamma$ ad EZ . nam si fieri potest, habeat ad maiorem AMN . itaque e contrario [V, 7 coroll.] sphaera AMN ad sphaeram $AB\Gamma$ triplicatam rationem habet quam diametrus EZ ad diametrum $B\Gamma$. sed ut AMN sphaera ad $AB\Gamma$ sphaeram, ita ΔEZ sphaera ad minorem sphaera $AB\Gamma$, quoniam $AMN > \Delta EZ$, ut antea demonstratum est [prop. II. lemma]. itaque etiam ΔEZ sphaera ad minorem sphaera $AB\Gamma$ triplicatam rationem habet quam $EZ : B\Gamma$; quod fieri non posse demonstraui. itaque $AB\Gamma$ sphaera ad maiorem sphaera ΔEZ triplicatam rationem non habet quam $B\Gamma : EZ$. demonstraui autem, eam ne ad minorem quidem hanc rationem habere. ergo

$$AB\Gamma : \Delta EZ = B\Gamma^3 : EZ^3;$$

quod erat demonstrandum.

ιγ'.

α'.

Ἐὰν εὐθεία γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον
 τμηθῇ, τὸ μείζον τμήμα προσλαβὼν τὴν ἡμί-
 σειαν τῆς ὅλης πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ
 5 τῆς ἡμισείας τετραγώνου. ~~¶~~

Εὐθεία γὰρ γραμμὴ ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον
 τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημείον, καὶ ἔστω μείζον τμήμα
 τὸ AG , καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ GA εὐθεία ἡ
 AD , καὶ κείσθω τῆς AB ἡμίσεια ἡ AD . λέγω, ὅτι
 10 πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς GA τοῦ ἀπὸ τῆς DA .

Ἀναγεγράφθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν AB , AD τετρά-
 γωνα τὰ AE , AZ , καὶ καταγεγράφθω ἐν τῷ AZ τὸ
 σχῆμα, καὶ διήχθω ἡ ZG ἐπὶ τὸ H . καὶ ἐπεὶ ἡ AB
 ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ , τὸ ἄρα
 15 ὑπὸ τῶν ABG ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AG . καὶ ἐστὶ
 τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ABG τὸ GE , τὸ δὲ ἀπὸ τῆς AG
 τὸ $Z\Theta$. ἴσον ἄρα τὸ GE τῷ $Z\Theta$. καὶ ἐπεὶ διπλῇ
 ἐστὶν ἡ BA τῆς AD , ἴση δὲ ἡ μὲν BA τῇ KA , ἡ
 δὲ AD τῇ $A\Theta$, διπλῇ ἄρα καὶ ἡ KA τῆς $A\Theta$. ὥς
 20 δὲ ἡ KA πρὸς τὴν $A\Theta$, οὕτως τὸ $ΓK$ πρὸς τὸ $Γ\Theta$.

Εὐκλείδου στοιχείων ιγ PVb, Εὐκλείδου στερεῶν γ στοι-
 χείων ιγ B, Εὐκλείδου στοιχείων ιγ στερεῶν γ q. 5. τετραγώνου]
 P, comp. supra m. 2 V; τῆς ὅλης Theon (BVbq). 8. τῇ] τῆς
 P et B, sed corr. εὐθεία] εὐθείας B, corr. m. 1. 9. καὶ —

$$*) \quad a/(a-x) = x^2. \quad \therefore (x + \frac{a}{x})^2 = 5(\frac{a}{x})^2$$

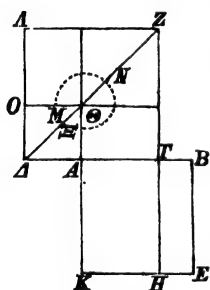
XIII.

I.

Si recta linea secundum rationem extremam ac mediam diuiditur, quadratum maioris partis adiuncta dimidia parte totius aequale est quadrato dimidia quinquies sumpto.

Nam recta linea AB secundum rationem extremam ac mediam diuidatur in puncto Γ , et pars maior sit $A\Gamma$, et ΓA in directum producat, ut fiat $A\Delta$, et ponatur $A\Delta = \frac{1}{2} AB$. dico, esse $\Gamma\Delta^2 = 5 A\Delta^2$.

construantur enim in AB , $A\Gamma$ quadrata AE , ΔZ ,



et in ΔZ figura describatur [I p. 137 not. 1], et $Z\Gamma$ ad H producat. et quoniam AB in Γ secundum rationem extremam ac mediam diuisa est, erit $AB \times B\Gamma = A\Gamma^2$ [VI def. 3. VI, 17]. et $AB \times B\Gamma = \Gamma E$, $A\Gamma^2 = Z\Theta$. itaque $\Gamma E = Z\Theta$. et quoniam $BA = 2A\Delta$, et $BA = KA$, $A\Delta = A\Theta$, erit etiam $KA = 2A\Theta$. ue-

rum $KA : A\Theta = \Gamma K : \Gamma\Theta$ [VI, 1]. itaque $\Gamma K = 2\Gamma\Theta$.

$A\Delta$] mg. postea add. m. 1 P. 10. $A\Delta$ q et corr. ex ΔA V.
 11. -σαν] eras. P. $A\Gamma$] in ras. m. 1 F. τετραγώνων
 V q. 12. ἐν τὸ ἐν P. τὸ] om. P. 13. ἐπὶ] corr. ex
 ἐπὶ m. 2 P. 15. AB , $B\Gamma$ q et m. 2 V. ἔστιν ἴσον BV.
 16. AB , $B\Gamma$ m. 2 V. ἀπὸ] ὑπὸ q. 20. ΓK] $K\Gamma$ P.

διπλάσιον ἄρα τὸ ΓΚ τοῦ ΓΘ. εἰσὶ δὲ καὶ τὰ ΑΘ,
 ΘΓ διπλάσια τοῦ ΓΘ. ἴσον ἄρα τὸ ΚΓ τοῖς ΑΘ,
 ΘΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ΓΕ τῷ ΘΖ ἴσον· ὅλον ἄρα
 τὸ ΑΕ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΝΞ γνώμονι. καὶ
 5 ἐπεὶ διπλῇ ἐστὶν ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ, τετραπλάσιόν ἐστι
 τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τουτέστι τὸ ΑΕ
 τοῦ ΑΘ. ἴσον δὲ τὸ ΑΕ τῷ ΜΝΞ γνώμονι· καὶ ὁ
 ΜΝΞ ἄρα γνώμων τετραπλάσιός ἐστι τοῦ ΑΟ· ὅλον
 ἄρα τὸ ΑΖ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΟ. καὶ ἐστὶ τὸ
 10 μὲν ΑΖ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, τὸ δὲ ΑΟ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΑ·
 τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΑ.
 Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ,
 τὸ μείζον τμήμα προσλαβὼν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης
 πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετρα-
 15 γώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

β'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμήματος ἑαυτῆς πεν-
 ταπλάσιον δύνηται, τῆς διπλασίας τοῦ εἰρη-
 μένου τμήματος ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνο-
 20 μένης τὸ μείζον τμήμα τὸ λοιπὸν μέρος ἐστὶ
 τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας. *)

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ ΑΒ τμήματος ἑαυτῆς τοῦ
 ΑΓ πενταπλάσιον δυνάσθω, τῆς δὲ ΑΓ διπλῇ ἔστω
 ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι τῆς ΓΔ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμ-
 25 νομένης τὸ μείζον τμήμα ἐστὶν ἡ ΓΒ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀφ' ἑκατέρας τῶν ΑΒ, ΓΔ
 τετράγωνα τὰ ΑΖ, ΓΗ, καὶ καταγεγράφθω ἐν τῷ

1. ΚΓ Ρ. Hic in P litt. K saepius in H renouatum est manu π. ΑΘ] Α e corr. m. 1 V. 2. τοῦ ΓΘ διπλάσια Ρ.

*) $(x + \frac{a}{2})^2 = 5(\frac{a}{2})^2$. > . $a(a-x) = x^2$

uerum etiam $A\Theta + \Theta\Gamma = 2\Gamma\Theta$ [I, 43]. itaque $K\Gamma = A\Theta + \Theta\Gamma$. demonstrauius autem, esse etiam $\Gamma E = \Theta Z$. itaque $AE = MN\Xi$. et quoniam $BA = 2AA$, erit $BA^2 = 4AA^2$, h. e. $AE = 4A\Theta$. sed $AE = MN\Xi$. itaque etiam $MN\Xi = 4AO$. quare $AZ = 5AO$. et $AZ = A\Gamma^2$, $AO = AA^2$. itaque $\Gamma A^2 = 5AA^2$.

Ergo si recta secundum rationem extremam ac mediam diuiditur, quadratum maioris partis adiuncta dimidia parte totius aequale est quadrato dimidia quinques sumpto; quod erat demonstrandum.

II.

Si quadratum lineae rectae quadrato partis eius quinques sumpto aequale est, duplo partis illius secundum rationem extremam ac mediam diuiso maior pars reliquum est rectae ab initio sumptae.

nam sit $AB^2 = 5A\Gamma^2$ et $\Gamma A = 2A\Gamma$. dico, recta ΓA secundum rationem extremam ac mediam diuisa maiorem partem esse ΓB .

construantur enim in utraque AB , ΓA quadrata AZ , ΓH , et in AZ figura describatur, et producat

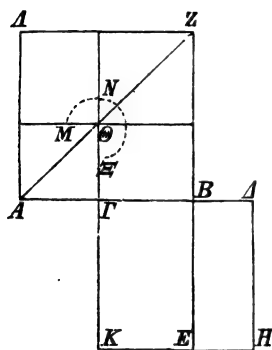
ΓK BVq. 3. $Z\Theta$ BV. $\delta\lambda\omega$] om. P. 4. Post $MN\Xi$ eras. $\tau\epsilon\tau\rho\alpha\gamma\acute{\omega}\nu\omega$ (comp.) b. 5. AB q. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ P.
6. $\tau\omicron\upsilon\tau\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ B. 7. $A\Theta$] e corr. V, $A\Theta$ P et B sed corr.
8. $\acute{\alpha}\rho\alpha$] om. P. $\gamma\nu\acute{\omega}\mu\omega\nu$ $\acute{\alpha}\rho\alpha$ b. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ P. AO] corr.
ex $A\Theta$ B, $A\Theta$ q et in ras. V; item lin. 9, 10. 9. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$] (alt.) $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ PB.
10. ΓA B et V, sed corr. m. 2. 11. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ P.
13. $\tau\acute{\eta}\nu$] e corr. m. 1 q. 14. $\delta\upsilon\nu\acute{\eta}\sigma\epsilon\tau\alpha\iota$ BVbq.
23. $\delta\upsilon\nu\epsilon\iota\sigma\theta\omega$ b. 27. $\tau\acute{o}$ $\acute{\epsilon}\nu$ P.

AZ τὸ σχῆμα, καὶ διήχθω ἡ BE . καὶ ἐπεὶ πεντα-
 πλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς BA τοῦ ἀπὸ τῆς AG , πεντα-
 πλάσιόν ἐστι τὸ AZ τοῦ $A\Theta$. τετραπλάσιος ἄρα ὁ
 $MNΞ$ γνώμων τοῦ $A\Theta$. καὶ ἐπεὶ διπλῇ ἐστὶν ἡ $\Delta Γ$
 5 τῆς $ΓΑ$, τετραπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ $\Delta Γ$ τοῦ ἀπὸ
 $ΓΑ$, τουτέστι τὸ $ΓΗ$ τοῦ $A\Theta$. ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ $MNΞ$
 γνώμων τετραπλάσιος τοῦ $A\Theta$. ἴσος ἄρα ὁ $MNΞ$ γνώ-
 μων τῷ $ΓΗ$. καὶ ἐπεὶ διπλῇ ἐστὶν ἡ $\Delta Γ$ τῆς $ΓΑ$,
 ἴση δὲ ἡ μὲν $\Delta Γ$ τῇ $ΓΚ$, ἡ δὲ $ΑΓ$ τῇ $Γ\Theta$ [διπλῇ
 10 ἄρα καὶ ἡ $ΚΓ$ τῆς $Γ\Theta$], διπλάσιον ἄρα καὶ τὸ $ΚΒ$
 τοῦ $B\Theta$. εἰσὶ δὲ καὶ τὰ $A\Theta$, ΘB τοῦ ΘB διπλάσια.
 ἴσον ἄρα τὸ $ΚΒ$ τοῖς $A\Theta$, ΘB . ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλος
 ὁ $MNΞ$ γνώμων ὅλῳ τῷ $ΓΗ$ ἴσος· καὶ λοιπὸν ἄρα
 τὸ ΘZ τῷ BH ἐστὶν ἴσον. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν BH τὸ
 15 ὑπὸ τῶν $ΓΔB$. ἴση γὰρ ἡ $ΓΔ$ τῇ $ΔΗ$. τὸ δὲ ΘZ τὸ
 ἀπὸ τῆς $ΓB$. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $ΓΔB$ ἴσον ἐστὶ τῷ
 ἀπὸ τῆς $ΓB$. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $\Delta Γ$ πρὸς τὴν $ΓB$,
 οὕτως ἡ $ΓB$ πρὸς τὴν $BΔ$. μείζων δὲ ἡ $\Delta Γ$ τῆς $ΓB$.
 μείζων ἄρα καὶ ἡ $ΓB$ τῆς $BΔ$. τῆς $ΓΔ$ ἄρα εὐθείας
 20 ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μείζον τμήμα
 ἐστὶν ἡ $ΓB$.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμήματος ἑαυτῆς πεντα-
 πλάσιον δύνηται, τῆς διπλασίας τοῦ εἰρημένου τμή-
 ματος ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μείζον
 25 τμήμα τὸ λοιπὸν μέρος ἐστὶ τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας.
 ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

1. τό] om. P b. 5. ἀπό] om. b, ἀπὸ τῆς BVq. ἀπό]
 ἀπὸ τῆς BVq. 6. τουτέστιν P. 7. τετραπλάσιος — γνώ-
 μων] supra m. 2 B. 8. ΓΑ] corr. ex ΔΑ m. 2 B. 9. δι-
 πλῇ — 10. ΓΘ] mg. postea add. P m. 1. 10. ΚΓ] ΓΚ P.
 11. εἰσὶν P. εἰσὶ — ΘB (alt.)] et in textu m. 1 et mg.

BE . et quoniam $BA^2 = 5A\Gamma^2$, erit $AZ = 5A\Theta$. itaque $MN\Xi = 4A\Theta$. et quoniam $\Delta\Gamma = 2\Gamma A$, erit $\Delta\Gamma^2 = 4\Gamma A^2$, h. e. $\Gamma H = 4A\Theta$. demonstraui-
autem, esse etiam $MN\Xi = 4A\Theta$. itaque $MN\Xi = \Gamma H$.
et quoniam $\Delta\Gamma = 2\Gamma A$, et $\Delta\Gamma = \Gamma K$, $A\Gamma = \Gamma\Theta$, erit



etiam $KB = 2B\Theta$ [VI, 1]. uerum
etiam $A\Theta + \Theta B = 2\Theta B$ [I,
43]. itaque $KB = A\Theta + \Theta B$.
demonstraui-
autem, esse
etiam $MN\Xi = \Gamma H$. quare ΘZ
 $= BH$. et $BH = \Gamma A \times \Delta B$
(nam $\Gamma A = \Delta H$), $\Theta Z = \Gamma B^2$.
itaque erit $\Gamma A \times \Delta B = \Gamma B^2$.
est igitur $\Delta\Gamma : \Gamma B = \Gamma B : B\Delta$
[VI, 17]. est autem $\Delta\Gamma > \Gamma B$
[u. lemma]. quare etiam ΓB
 $> B\Delta$ [V, 14]. itaque recta

ΓA secundum rationem extremam ac mediam diuisa
maior pars est ΓB .

Ergo si quadratum lineae rectae quadrato partis
eius quinquies sumpto aequale est, duplo partis illius
secundum rationem extremam ac mediam diuiso maior
pars reliquum est rectae ab initio sumptae; quod
erat demonstrandum.

m. 2 B. διπλάσια τοῦ $B\Theta$ BV. ΘB] (alt.) $B\Theta$ b.
διπλάσιον q. 12. ἴσον — ΘB] mg. m. 2 B. τοῖς τοῦ b.
ὅλος] corr. ex ὅλον m. 1 P. 14. ἐστίν P. 15. ΓA ,
 ΔB q. ΔH] BH b. τό] (alt.) mutat. in τῶ m. 1 q.
16. ἐστίν P. τῶ] corr. ex τό m. 1 P. 19. ΓA] ante Γ
del. Δ m. 1 b. 25. ἐστίν P. 26. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] o): -
b, om. BV q.

Λήμμα.

Ὅτι δὲ ἡ διπλῇ τῆς $ΑΓ$ μείζων ἐστὶ τῆς $ΒΓ$, οὕτως δεικτέον.

Εἰ γὰρ μή, ἔστω, εἰ δυνατόν, ἡ $ΒΓ$ διπλῇ τῆς
 5 $ΓΑ$. τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΓ$ τοῦ ἀπὸ τῆς
 $ΓΑ$ · πενταπλάσια ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν $ΒΓ$, $ΓΑ$ τοῦ ἀπὸ
 τῆς $ΓΑ$. ὑπόκειται δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΑ$ πεντα-
 πλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς $ΓΑ$ · τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $ΒΑ$ ἴσον
 ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΒΓ$, $ΓΑ$ · ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα
 10 ἡ $ΓΒ$ διπλασία ἐστὶ τῆς $ΑΓ$. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν,
 ὅτι οὐδὲ ἡ ἐλάττων τῆς $ΓΒ$ διπλασίῳ ἐστὶ τῆς $ΓΑ$ ·
 πολλῶ γὰρ [μείζον] τὸ ἄτοπον.

Ἡ ἄρα τῆς $ΑΓ$ διπλῇ μείζων ἐστὶ τῆς $ΓΒ$ · ὅπερ
 ἔδει δεῖξαι.

15

γ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον
 τμηθῇ, τὸ ἔλασσον τμήμα προσλαβὼν τὴν ἡμί-
 σειαν τοῦ μείζονος τμήματος πενταπλάσιον δύ-
 νатаι τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τοῦ μείζονος τμή-
 20 ματος τετραγώνου. *)

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ $ΑΒ$ ἄκρον καὶ μέσον λόγον
 τεμήσθω κατὰ τὸ $Γ$ σημεῖον, καὶ ἔστω μείζον τμήμα
 τὸ $ΑΓ$, καὶ τεμήσθω ἡ $ΑΓ$ δίχα κατὰ τὸ $Δ$ · λέγω,
 ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΔ$ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΔΓ$.
 25 Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ τετράγωνον τὸ
 $ΑΕ$, καὶ καταγεγράφθω διπλοῦν τὸ σχῆμα. ἐπεὶ διπλῇ
 ἐστὶν ἡ $ΑΓ$ τῆς $ΔΓ$, τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς

1. λήμμα] om. codd. 2. ἐστίν P. οὕτω B. 10. $ΒΓ$
 P. διπλασίῳ P. ἐστίν B. 11. ἡ] om. B, ins. m. 1 b,

*) $a(a-x) = x^2 \therefore (a-x+\frac{x}{2})^2 = 5(\frac{x}{2})^2$

Lemma.¹⁾

Esse autem $2AG > BG$, sic demonstrandum.

Nam si minus, sit, si fieri potest, $BG = 2GA$. ergo $BG^2 = 4GA^2$. itaque $BG^2 + GA^2 = 5GA^2$. verum supposuimus, esse etiam $BA^2 = 5GA^2$. itaque $BA^2 = BG^2 + GA^2$; quod fieri non potest [II, 4]. itaque non est $GB = 2AG$. similiter demonstrabimus, ne minorem quidem recta GB duplo maiorem esse recta GA ; multo enim magis absurdum est. ergo $2AG > GB$; quod erat demonstrandum.

III.

Si linea recta secundum rationem extremam ac mediam diuiditur, quadratum minoris partis adiuncta dimidia maioris parte aequale est quadrato dimidia maiore partis quinquies sumpto.

Nam recta AB secundum rationem extremam ac mediam diuidatur in puncto Γ , et maior pars sit AG , et AG in Δ in duas partes aequales diuidatur. dico, esse $BA^2 = 5\Delta\Gamma^2$.

construatur enim in AB quadratum AE , et figura duplex describatur. iam quoniam $AG = 2\Delta\Gamma$, erit

1) Dubito, an hoc lemma genuinum non sit. neque enim opus est, et dicendi genus lin. 11 paullo insolentius est.

supra m. 2 V. ΓB] $B\Gamma BV$ q. $\delta\iota\pi\lambda\alpha\sigma\acute{\iota}\omega\nu$] in ras. V.
 Dein add. $\acute{\alpha}\rho\alpha$ B. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$ PB. 12. $\mu\epsilon\acute{\iota}\zeta\omicron\nu$] om. P. 13. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$
 B. 18. $\tau\acute{\mu}\eta\mu\alpha\tau\omicron\varsigma$] om. q. 21. $\tau\iota\varsigma$ η] corr. ex $\tau\eta\varsigma$ m. 2 P.
 23. $\tau\acute{o}$] (prius) η Vq. 24. $\tau\omicron\upsilon$] $\tau\omicron\iota\varsigma$ q. 26. $\delta\iota\pi\lambda\omicron\upsilon\nu$] om. BV bq.
 $\sigma\chi\eta\mu\alpha$ $\delta\iota\pi\lambda\omicron\upsilon\nu$ bq. $\kappa\alpha\iota$ $\acute{\epsilon}\pi\epsilon\iota$ BV bq. 27. $\tau\epsilon\tau\rho\alpha\pi\lambda\acute{\alpha}\sigma\iota\omega\nu$. —
 p. 256, 1. $\Delta\Gamma$] om. b. .

$\Delta\Gamma$ τοῦ ἀπὸ τῆς $\Delta\Gamma$, τουτέστι τὸ $P\Sigma$ τοῦ ZH . καὶ
ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν $AB\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $\Delta\Gamma$, καὶ
ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν $AB\Gamma$ τὸ ΓE , τὸ ἄρα ΓE ἴσον ἐστὶ
τῷ $P\Sigma$. τετραπλάσιον δὲ τὸ $P\Sigma$ τοῦ ZH . τετραπλά-
5 σιον ἄρα καὶ τὸ ΓE τοῦ ZH . πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν
ἡ $\Delta\Delta$ τῇ $\Delta\Gamma$, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΘK τῇ KZ . ὥστε καὶ
τὸ HZ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΘA τετραγώνῳ. ἴση
ἄρα ἡ HK τῇ KA , τουτέστιν ἡ MN τῇ NE . ὥστε καὶ
τὸ MZ τῷ ZE ἐστὶν ἴσον. ἀλλὰ τὸ MZ τῷ ΓH
10 ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ΓH ἄρα τῷ ZE ἐστὶν ἴσον. κοινὸν
προσκεισθῶ τὸ ΓN . ὁ ἄρα $\Xi O\Pi$ γνώμων ἴσος ἐστὶ
τῷ ΓE . ἀλλὰ τὸ ΓE τετραπλάσιον ἐδείχθη τοῦ HZ .
καὶ ὁ $\Xi O\Pi$ ἄρα γνώμων τετραπλάσιός ἐστι τοῦ ZH
τετραγώνου. ὁ $\Xi O\Pi$ ἄρα γνώμων καὶ τὸ ZH τετρά-
15 γωνον πενταπλάσιός ἐστι τοῦ ZH . ἀλλὰ ὁ $\Xi O\Pi$
γνώμων καὶ τὸ ZH τετράγωνόν ἐστι τὸ ΔN . καὶ
ἐστὶ τὸ μὲν ΔN τὸ ἀπὸ τῆς ΔB , τὸ δὲ HZ τὸ ἀπὸ
τῆς $\Delta\Gamma$. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔB πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ
ἀπὸ τῆς $\Delta\Gamma$. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

20

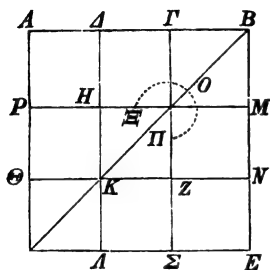
δ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον
τμηθῇ, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἐλάσσονος τμή-
ματος, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, τριπλάσια
ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος τετρα-
25 γώνου. *)

Ἐστω εὐθεῖα ἡ AB , καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον
λόγον κατὰ τὸ Γ , καὶ ἔστω μείζον τμήμα τὸ $\Delta\Gamma$.

1. $\Gamma\Delta V$. 3. τῶν] τῷ b. Post prius ΓE add. τὸ δὲ
ἀπὸ τῆς $\Delta\Gamma$ τὸ (τῷ V) $P\Sigma Vbq$, B m. 2. τὸ ἄρα — 4. $P\Sigma$
*) $a(a-x) = x^2$. $\therefore a^2 + (a-x)^2 = 3x^2$

$AG^2 = 4\Delta\Gamma^2$, h. e. $P\Sigma = 4ZH$. et quoniam $AB \times B\Gamma = AG^2$ [VI def. 3. VI, 17] et $AB \times B\Gamma = \Gamma E$, erit $\Gamma E = P\Sigma$. sed $P\Sigma = 4ZH$. quare etiam $\Gamma E = 4ZH$. rursus quoniam $AA = \Delta\Gamma$, erit etiam $\Theta K = KZ$.



quare etiam $HZ = \Theta A$. est igitur $HK = KA$, h. e. $MN = NE$. quare etiam $MZ = ZE$. sed $MZ = \Gamma H$. quare etiam $\Gamma H = ZE$. commune adiciatur ΓN . itaque $\Xi O \Pi = \Gamma E$. demonstrauius autem, esse $\Gamma E = 4HZ$. itaque etiam $\Xi O \Pi = 4ZH$. quare $\Xi O \Pi + ZH = 5ZH$. sed $\Xi O \Pi + ZH = \Delta N$. et $\Delta N = \Delta B^2$, $HZ = \Delta\Gamma^2$. ergo $\Delta B^2 = 5\Delta\Gamma^2$; quod erat demonstrandum.

IV.

Si recta linea secundum rationem extremam ac mediam secatur, quadratum totius et quadratum partis minoris coniuncta triplo maiora sunt quadrato partis maioris.

Sit recta AB et secundum rationem extremam ac

(prius) om. V. 6. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$ P. 8. $\tau\eta\tilde{\eta}$] (alt.) $\tau\eta\mu$, ι in ras. m. 1 P. 9. $\acute{\alpha}\lambda\lambda\acute{\alpha}$ — 10. $\acute{\iota}\sigma\omicron\nu$ (prius)] postea ins. m. 1 P. 11. ΓN] ΓH ? q. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\alpha\iota$ b. 12. HZ] corr. ex ZH q. 13. $\acute{\alpha}\rho\alpha$] om. P. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ B. HZ BVbq. 14. $\tau\epsilon\tau\rho\alpha\gamma\acute{\omega}\nu\omicron\nu$] om. Bbq, supra m. 1 V. δ — ZH] $\tau\acute{o}$ $\acute{\alpha}\rho\alpha$ ΔN Theon (BVbq; N e corr. V, ΔH q). 15. $\pi\epsilon\nu\tau\alpha\pi\lambda\acute{\alpha}\sigma\iota\omicron\varsigma$] -s e corr. m. 1 P; -σιον BVbq. ZH $\tau\epsilon\tau\rho\alpha\gamma\acute{\omega}\nu\omicron\nu$ BVbq. $\acute{\alpha}\lambda\lambda\acute{\alpha}$ — 16. ΔN] om. Theon (BVbq). 16. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ P. 17. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ B. ΔH q, corr. m. 1. 19. $\Gamma\Delta$ P. 22. $\acute{\epsilon}\lambda\acute{\alpha}\tau\tau\omicron\nu\omicron\varsigma$ P. 26. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\omega$ — $\kappa\alpha\iota$ (prius)] $\epsilon\upsilon\theta\epsilon\iota\alpha$ $\gamma\acute{\alpha}\rho$ $\gamma\rho\alpha\mu\mu\eta$ η AB V.

λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν AB , $BΓ$ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς $ΓΑ$.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ $ΑΔΕΒ$, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνεται κατὰ τὸ $Γ$, καὶ τὸ μείζον τμημά ἐστιν ἡ $ΑΓ$, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $ΑΒΓ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν $ΑΒΓ$ τὸ $ΑΚ$, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ τὸ $ΘΗ$. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΚ$ τῷ $ΘΗ$. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ $ΑΖ$ τῷ $ΖΕ$, κοινὸν προσκείσθω τὸ $ΓΚ$. ὅλον ἄρα τὸ $ΑΚ$ ὅλῳ τῷ $ΓΕ$ ἐστὶν ἴσον· τὰ ἄρα $ΑΚ$, $ΓΕ$ τοῦ $ΑΚ$ ἐστὶ διπλάσια. ἀλλὰ τὰ $ΑΚ$, $ΓΕ$ ὁ $ΑΜΝ$ γνῶμων ἐστὶ καὶ τὸ $ΓΚ$ τετράγωνον· ὁ ἄρα $ΑΜΝ$ γνῶμων καὶ τὸ $ΓΚ$ τετράγωνον διπλάσιά ἐστι τοῦ $ΑΚ$. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ $ΑΚ$ τῷ $ΘΗ$ ἐδείχθη ἴσον· ὁ ἄρα $ΑΜΝ$ γνῶμων καὶ [τὸ $ΓΚ$ τετράγωνον διπλάσιά ἐστι τοῦ $ΘΗ$. ὥστε ὁ $ΑΜΝ$ γνῶμων καὶ] τὰ $ΓΚ$, $ΘΗ$ τετράγωνα τριπλάσιά ἐστι τοῦ $ΘΗ$ τετραγώνου. καὶ ἐστὶν ὁ [μὲν] $ΑΜΝ$ γνῶμων καὶ τὰ $ΓΚ$, $ΘΗ$ τετράγωνα ὅλον τὸ $ΑΕ$ καὶ τὸ $ΓΚ$, ἅπερ ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ τετράγωνα, τὸ δὲ $ΗΘ$ τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ τετράγωνον. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$ τετράγωνα τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ τετραγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ε'.

25 Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, καὶ προστεθῇ αὐτῇ ἴση τῷ μείζονι τμηματι, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέ-

1. τριπλασίονά q.

3. Ante ἀναγ. del. καὶ m. 1 b.

5. Γ σημειὸν V.

7. ἐστὶ] (prius) ἐστίν P.

8. $ΑΚ$] $Κ$

corr. m. 1 ex B P.

$ΑΓ$] $ΑΚ$ b.

9. $ΘΗ$] $Θ$ e corr. m.

τμηται, καὶ τὸ μείζον τμημὰ ἐστὶν ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεία. *)

Εὐθεία γὰρ γραμμὴ ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μείζον τμημα
5 ἡ AG , καὶ τῇ AG ἴση [κείσθω] ἡ AD . λέγω, ὅτι ἡ AB εὐθεία ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ A , καὶ τὸ μείζον τμημὰ ἐστὶν ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεία ἡ AB .

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ
10 AE , καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ , τὸ ἄρα ὑπὸ $AB\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ AG . καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ὑπὸ $AB\Gamma$ τὸ ΓE , τὸ δὲ ἀπὸ τῆς AG τὸ $\Gamma\Theta$. ἴσον ἄρα τὸ ΓE τῷ $\Theta\Gamma$. ἀλλὰ τῷ μὲν ΓE ἴσον ἐστὶ τὸ ΘE ,
15 τῷ δὲ $\Theta\Gamma$ ἴσον τὸ $\Delta\Theta$ καὶ τὸ $\Delta\Theta$ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΘE [κοινὸν προσκείσθω τὸ ΘB]. ὅλον ἄρα τὸ ΔK ὅλῳ τῷ AE ἐστὶν ἴσον. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΔK τὸ ὑπὸ τῶν $B\Delta$, ΔA ἴση γὰρ ἡ AD τῇ ΔA . τὸ δὲ AE τὸ ἀπὸ τῆς AB . τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $B\Delta A$ ἴσον ἐστὶ τῷ
20 ἀπὸ τῆς AB . ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BA , οὕτως ἡ BA πρὸς τὴν AD . μείζων δὲ ἡ AB τῆς BA μείζων ἄρα καὶ ἡ BA τῆς AD .

Ἡ ἄρα AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ A , καὶ τὸ μείζον τμημὰ ἐστὶν ἡ AB . ὅπερ ἔδει
25 δεῖξαι.

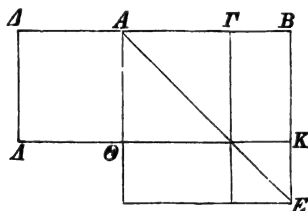
3. ἡ] ἡ τό b. 5. κείσθω] om. P. 6. ΔB] AD b.
7. ἡ] om. q. ἡ — εὐθεία] om. V. 8. AB] supra scr. Δ
m. 1 b. 9. ἀναγεγεργ. P. corr. m. 1. 10. ἐπεὶ γὰρ BV .
12. τῶν $AB\Gamma$ V. ἀπό] corr. ex ὑπό m. 1 P. τῆς
 AG V. ἐστὶν P. 13. τῶν $AB\Gamma$ V. $\Gamma\Theta$] $\Theta\Gamma$ P.
14. $\Theta\Gamma$] corr. ex $\Gamma\Theta$ m. 2 V. 15. $\Theta\Gamma$] Θ e corr. V.
16. κοινόν — ΘB] postea add. m. 1 P. ΘB] Θ e corr. b.

*) $a(a-x) = x^2$. $\therefore (a+x)x = a^2$

mediam secta est, et maior pars est recta ab initio sumpta.

Nam recta linea AB secundum rationem extremam ac mediam in puncto Γ secetur, et maior pars sit $A\Gamma$ et $A\Delta = A\Gamma$. dico, rectam AB secundum rationem extremam ac mediam in A sectam esse, et partem maiorem esse rectam ab initio sumptam AB .

construatur enim in AB quadratum AE , et describatur figura. quoniam AB in Γ secundum rationem extremam ac mediam secta est, erit $AB \times B\Gamma = A\Gamma^2$ [VI def. 3. VI, 17]. et $AB \times B\Gamma = \Gamma E$, $A\Gamma^2 = \Theta\Gamma$. itaque $\Gamma E = \Theta\Gamma$. uerum $\Theta E = \Gamma E$ [I, 43], $\Delta\Theta = \Theta\Gamma$. quare etiam $\Delta\Theta = \Theta E$. itaque



$\Delta K = AE$. et $\Delta K = B\Delta \times \Delta A$ (nam $A\Delta = \Delta A$), $AE = AB^2$. erit igitur $B\Delta \times \Delta A = AB^2$. itaque $\Delta B : BA = BA : \Delta A$ [VI, 17]. sed $\Delta B > BA$. itaque etiam $BA > \Delta A$ [V, 14].

Ergo AB in A secundum rationem extremam ac mediam diuisa est, et maior pars est AB ; quod erat demonstrandum.

18. ΔA] ΔA q. ΔA] corr. ex ΔA m. 1 b. 19. τὸ ἄρα
 — 20. AB] om. q. 20. ΔB] Δ corr. ex A m. 1 b.
 22. BA] (alt.) AB V, ΔB B, $B\Delta$ b q. 23. $B\Delta$ BV.
 25. Seq. alia demonstratio et analysis propp. I—V in b q; u. app.

ς'.

Ἐὰν εὐθεία ρητὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον
 τμηθῇ, ἐκάτερον τῶν τμημάτων ἄλογός ἐστιν
 ἢ καλουμένη ἀποτομή.

- 5 Ἐστω εὐθεία ρητὴ ἡ AB καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ
 μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ , καὶ ἔστω μείζον τμήμα ἡ
 $ΑΓ$. λέγω, ὅτι ἐκατέρα τῶν $ΑΓ$, ΓB ἄλογός ἐστιν ἢ
 καλουμένη ἀποτομή.

- Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ BA , καὶ κείσθω τῆς BA ἡμί-
 10 σεια ἡ $ΑΔ$. ἐπεὶ οὖν εὐθεία ἡ AB τέτμηται ἄκρον
 καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ , καὶ τῷ μείζονι τμήματι
 τῷ $ΑΓ$ πρόσκειται ἡ $ΑΔ$ ἡμίσεια οὖσα τῆς AB , τὸ
 ἄρα ἀπὸ $\GammaΔ$ τοῦ ἀπὸ $ΔΑ$ πενταπλάσιόν ἐστιν. τὸ
 ἄρα ἀπὸ $\GammaΔ$ πρὸς τὸ ἀπὸ $ΔΑ$ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς
 15 πρὸς ἀριθμόν· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ $\GammaΔ$ τῷ ἀπὸ
 $ΔΑ$. ρητὸν δὲ τὸ ἀπὸ $ΔΑ$ · ρητὴ γάρ [ἐστίν] ἡ $ΔΑ$
 ἡμίσεια οὖσα τῆς AB ρητῆς οὔσης· ρητὸν ἄρα καὶ τὸ
 ἀπὸ $\GammaΔ$ · ρητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $\GammaΔ$. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ
 $\GammaΔ$ πρὸς τὸ ἀπὸ $ΔΑ$ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος
 20 ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀσύμμετρος ἄρα
 μήκει ἡ $\GammaΔ$ τῇ $ΔΑ$. αἱ $\GammaΔ$, $ΔΑ$ ἄρα ρηταὶ εἰσι δυ-
 νάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἡ $ΑΓ$.
 πάλιν, ἐπεὶ ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται,

Hanc prop. om. bq. 3. ἐστίν] mg. m. 1 V. 4. ἀπο-
 τομή] ρητὴ B, corr. m. 2. 7. $ΑΓ$] Γ in ras. m. 1 P.
 AB , $B\Gamma B$, corr. m. 2. 9. ἐκβεβλήσθω] x corr. ex μ m.
 2 B. τῆς] τῇ B, corr. m. 2. 10. τέτμηται] om. V.
 11. λόγον τέτμηται V. 13. τῆς $\GammaΔ$ V. τῆς $ΔΑ$ V.
 ἐστὶ BV. 14. τῆς $\GammaΔ$ V. πρὸς] supra m. 1 P. τό] in
 ras. plurium litt. m. 1 P. τῆς $ΔΑ$ V. 16. $ΔΔ$ bis P.
 ρητὴ V. δέ] in ras. V. τό — γάρ] om. V. ἐστίν] om.
 P. 18. ἐστίν B. 21. εἰσιν PB.

VI.¹⁾

Si recta rationalis secundum rationem extremam ac mediam diuiditur, utraque pars irrationalis est apotome quae uocatur.

Sit recta rationalis AB et secundum rationem extremam ac mediam in Γ diuidatur, et maior pars sit $A\Gamma$. dico, utramque $A\Gamma$, ΓB irrationalem esse apotomen quae uocatur.



producatur enim BA et ponatur $\Delta A = \frac{1}{2}BA$. iam quoniam recta AB in Γ secundum rationem extremam ac mediam diuisa est, et parti maiori $A\Gamma$ adiecta est ΔA dimidia rectae AB , erit $\Gamma\Delta^2 = 5\Delta A^2$ [prop. I]. itaque $\Gamma\Delta^2$ ad ΔA^2 rationem habet quam numerus ad numerum. itaque $\Gamma\Delta^2$ et ΔA^2 commensurabilia sunt [X, 6]. sed ΔA^2 rationale est; nam ΔA , quae dimidia est rectae rationalis AB , rationalis est. itaque etiam $\Gamma\Delta^2$ rationale est [X def. 9]. quare $\Gamma\Delta$ et ipsa rationalis est. et quoniam $\Gamma\Delta^2$ ad ΔA^2 rationem non habet quam numerus quadratus ad numerum quadratum, $\Gamma\Delta$ et ΔA longitudine incommensurabiles sunt [X, 9]. itaque $\Gamma\Delta$, ΔA rationales sunt potentia solum commensurabiles. itaque apotome est $A\Gamma$ [X, 73]. rursus quoniam AB secundum rationem extremam ac mediam diuisa est, et maior pars est

1) In P in mg. add. m. 1: τοῦτο τὸ θεώρημα ἐν τοῖς πλείστοις τῆς νέας ἐκδόσεως οὐ φέρεται, ἐν δὲ τοῖς τῆς παλαιᾶς εὐρίσκεται. de q u. app.

καὶ τὸ μείζον τμημά ἐστιν ἡ $ΑΓ$, τὸ ἄρα ὑπὸ $ΑΒ$, $ΒΓ$ τῷ ἀπὸ $ΑΓ$ ἴσον ἐστίν. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ ἀποτομῆς παρὰ τὴν $ΑΒ$ ρητὴν παραβληθὲν πλάτος ποιεῖ τὴν $ΒΓ$. τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ρητὴν παρα-
 5 βαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην· ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἐστὶν ἡ $ΓΒ$. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ $ΓΑ$ ἀποτομή.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ρητὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἐκάτερον τῶν τμημάτων ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10

ξ'.

Ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλεύρου αἱ τρεῖς γωνίαι ἦτοι αἱ κατὰ τὸ ἐξῆς ἢ αἱ μὴ κατὰ τὸ ἐξῆς ἴσαι ᾧσιν, ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ πεντάγωνον.

Πενταγώνου γὰρ ἰσοπλεύρου τοῦ $ΑΒΓΔΕ$ αἱ τρεῖς
 15 γωνίαι πρότερον αἱ κατὰ τὸ ἐξῆς αἱ πρὸς τοῖς $Α$, $Β$, $Γ$ ἴσαι ἀλλήλαις ἔστωσαν· λέγω, ὅτι ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ $ΑΒΓΔΕ$ πεντάγωνον.

Ἐπεξεύχθωσάν γὰρ αἱ $ΑΓ$, $ΒΕ$, $ΖΔ$. καὶ ἐπεὶ
 δύο αἱ $ΓΒ$, $ΒΑ$ δυσὶ ταῖς $ΒΑ$, $ΑΕ$ ἴσαι εἶδιν ἐκα-
 20 τέρα ἐκατέρω, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΓΒΑ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΒΑΕ$ ἐστὶν ἴση, βάσεις ἄρα ἡ $ΑΓ$ βάσει τῇ $ΒΕ$ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον τῷ $ΑΒΕ$ τριγώνῳ ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὅφ' ἄς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ
 25 $ΒΓΑ$ τῇ ὑπὸ $ΒΕΑ$, ἡ δὲ ὑπὸ $ΑΒΕ$ τῇ ὑπὸ $ΓΑΒ$. ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ $ΑΖ$ πλευρᾷ τῇ $ΒΖ$ ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλη ἡ $ΑΓ$ ὅλη τῇ $ΒΕ$ ἴση· καὶ λοιπὴ

1. Ante καὶ add. κατὰ τὸ $Γ Β$. $ΑΒΓ Β$. 2. ἐστὶ
 ΒΒ. 4. ἀποτομῆς] ἀπο- supra scr. m. 2 B. 6. $ΓΑ$] $ΑΓ ΒΒ$.
 7. ρητὴ — 9. δεῖξαι]: ~ ΒΒ. 8. ἄλογον P. Seq. in

AG , erit $AB \times BG = AG^2$ [VI def. 3. VI, 17]. itaque quadratum apotomes AG ad AB rationalem adplicatum latitudinem efficit BG . quadratum autem apotomes ad rationalem adplicatum latitudinem efficit apotomen primam [X, 97]. itaque GB apotome est prima. demonstrauius autem, etiam GA apotomen esse.

Ergo si recta rationalis secundum rationem extremam ac mediam diuiditur, utraque pars irrationalis est apotome quae uocatur; quod erat demonstrandum.

VII.

Si pentagoni aequilateri tres anguli, siue deinceps positi sunt siue non deinceps, inter se aequales sunt, pentagonum aequiangulum erit.

Nam pentagoni aequilateri $ABGAE$ prius, qui deinceps positi sunt, tres anguli A , B , Γ inter se aequales sint. dico, pentagonum $ABGAE$ aequiangulum esse.

ducantur enim AG , BE , ZA . et quoniam duo latera GB , BA duobus lateribus BA , AE singula singulis aequalia sunt, et $\angle GBA = BAE$, erit $AG = BE$ et $\triangle ABG = ABE$, et reliqui anguli reliquis angulis aequales erunt, sub quibus aequalia latera subtendunt [I, 4], $\angle BGA = BEA$, $\angle ABE = GAB$. quare etiam $AZ = BZ$ [I, 6]. demonstrauius autem, esse etiam $AG = BE$. itaque etiam $ZG = ZE$.

P altera demonstr. prop. V et analysis prop. I—V, in BV analysis prop. I—V; u. app. 10. ζ'] om. b, qui hinc numeros propp. om. 12. ητοι] η V. η αλ — εξης] om. q.

η αλ] in ras. m. 1 B. 16. εστιν P. 18. -χθωσαν — 19. AE] mg. m. 2 B, sed etiam m. 1 in textu, om. BE — GB. 19. δύο] αλ δύο P. 22. ισον εστι q. 25. BGA] GA in ras. V, BAG B.

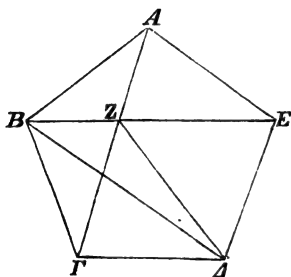
ἄρα ἡ $ZΓ$ λοιπῇ τῇ ZE ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ $ΓΔ$ τῇ $ΔE$ ἴση. δύο δὴ αἱ $ZΓ$, $ΓΔ$ δυοὶ ταῖς ZE , $ΕΔ$ ἴσαι εἰσὶν· καὶ βάσεις αὐτῶν κοινὴ ἡ $ZΔ$ · γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $ZΓΔ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ZEΔ$ ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη
 5 δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $BΓΔ$ τῇ ὑπὸ $ΑΕΒ$ ἴση· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ $BΓΔ$ ὅλη τῇ ὑπὸ $ΑΕΔ$ ἴση. ἀλλ' ἡ ὑπὸ $BΓΔ$ ἴση ὑπόκειται ταῖς πρὸς τοῖς A , B γωνίαις· καὶ ἡ ὑπὸ $ΑΕΔ$ ἄρα ταῖς πρὸς τοῖς A , B γωνίαις ἴση ἐστίν. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ $ΓΔΕ$ γωνία ἴση ἐστὶ ταῖς πρὸς τοῖς A , B , $Γ$ γωνίαις· ἰσο-
 10 γώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΒΓΔΕ$ πεντάγωνον.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστωσαν ἴσαι αἱ κατὰ τὸ ἐξῆς γωνίαι, ἀλλ' ἔστωσαν ἴσαι αἱ πρὸς τοῖς A , $Γ$, $Δ$ σημείοις· λέγω, ὅτι καὶ οὕτως ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ $ΑΒΓΔΕ$
 15 πεντάγωνον.

Ἐπεξεύχθω γὰρ ἡ $BΔ$. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ BA , AE δυοὶ ταῖς $BΓ$, $ΓΔ$ ἴσαι εἰσὶ καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσεις ἄρα ἡ BE βάσει τῇ $BΔ$ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ABE τρίγωνον τῷ $BΓΔ$ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ
 20 αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὅφ' ἂς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΑΕΒ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΓΔΒ$. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $BEΔ$ γωνία τῇ ὑπὸ $BΔΕ$ ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ BE πλευρᾷ τῇ $BΔ$ ἐστὶν ἴση. καὶ ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ
 25 $ΑΕΔ$ γωνία ὅλη τῇ ὑπὸ $ΓΔΕ$ ἐστὶν ἴση. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ $ΓΔΕ$ ταῖς πρὸς τοῖς A , $Γ$ γωνίαις ὑπόκειται ἴση·

1. ἐστὶν ἴση — 3. $ΕΔ$] bis b. 1. ἔστιν B. 3. εἰσὶ
 V b. 5. καὶ] om. BV. 6. ἐστὶν ἴση BV. ἀλλὰ BV q.
 7. $BΓΔ$] sic, sed mg. m. 1 $ΓΔΕ$ b. γωνίαις] om.
 BV b. 8. τοῖς] τοὺς q. Post B add. $Γ$ q et supra m.
 1 V. 10. $Γ$] om. B, supra m. 1 V. 11. ἐστίν B, om. V.

uerum etiam $\Gamma\Delta = \Delta E$. itaque duo latera $Z\Gamma$, $\Gamma\Delta$ duobus lateribus ZE , $E\Delta$ aequalia sunt; et basis eorum communis est $Z\Delta$. itaque $\angle Z\Gamma\Delta = \angle ZEA$ [I, 8]. demonstrauius autem, esse etiam $\angle B\Gamma\Delta = \angle AEB$. quare etiam $\angle B\Gamma\Delta = \angle AEA$. supposuimus



autem, angulum $B\Gamma\Delta$ angulis ad A , B positis aequalem esse. itaque etiam $\angle AEA$ angulis ad A , B positis aequalis est. iam similiter demonstrabimus, etiam angulum $\Gamma\Delta E$ angulis ad A , B , Γ positis aequalem esse. ergo pentagonum $AB\Gamma\Delta E$ aequiangulum est.

iam uero anguli deinceps positi aequales ne sint, sed aequales sint anguli ad puncta A , Γ , Δ positi. dico, sic quoque pentagonum aequiangulum esse.

ducatur enim $B\Delta$. et quoniam duo latera BA , AE duobus lateribus $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ aequalia sunt et aequales angulos comprehendunt, erit $BE = B\Delta$ et $\triangle ABE = \triangle B\Gamma\Delta$, et reliqui anguli reliquis angulis aequales erunt, sub quibus aequalia latera subtendunt [I, 4]. itaque $\angle AEB = \angle \Gamma\Delta B$. uerum etiam $\angle BE\Delta = \angle B\Delta E$, quoniam etiam $BE = B\Delta$ [I, 6]. itaque $\angle AEA = \angle \Gamma\Delta E$. supposuimus autem, angulum $\Gamma\Delta E$ angulis ad A , Γ positis aequalem esse. ergo etiam $\angle AEA$ angulis ad

14. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ B. 16. $\acute{\epsilon}\pi\epsilon\zeta\epsilon\upsilon\chi\theta\omega\sigma\alpha\nu$ B. $\eta]$ al B. 17. $\acute{\epsilon}\lambda\acute{\iota}\sigma\iota\nu$ PB.
 $\pi\epsilon\rho\acute{\iota}\epsilon\chi\omicron\nu\sigma\iota$ PVbq. 18. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ Vq, comp. b. 19. ABE $\acute{\alpha}\rho\alpha$
 bq. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ PVq, comp. b. 21. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu]$ om. V. 22. $AE B$
 $- \Gamma\Delta B]$ $AB\Gamma P$. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ B. 24. $\kappa\alpha\iota]$ om. BV.

καὶ ἡ ὑπὸ $ΑΕΔ$ ἄρα γωνία ταῖς πρὸς τοῖς $Α$, $Γ$ ἴση ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ $ΑΒΓ$ ἴση ἐστὶ ταῖς πρὸς τοῖς $Α$, $Γ$, $Δ$ γωνίαις. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΒΓΔΕ$ πεντάγωνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5

η'.

Ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου τὰς κατὰ τὸ ἐξῆς δύο γωνίας ὑποτείνωσιν εὐθεταί, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνουσιν ἀλλήλας, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα ἐστὶ
10 τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ.

Πενταγώνου γὰρ ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου τοῦ $ΑΒΓΔΕ$ δύο γωνίας τὰς κατὰ τὸ ἐξῆς τὰς πρὸς τοῖς $Α$, $Β$ ὑποτεινέτωσαν εὐθεταί αἱ $ΑΓ$, $ΒΕ$ τέμνουσαι ἀλλήλας κατὰ τὸ $Θ$ σημεῖον· λέγω, ὅτι ἑκατέρα αὐτῶν
15 ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνηται κατὰ τὸ $Θ$ σημεῖον, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ.

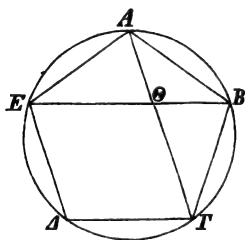
Περιγεγράφω γὰρ περὶ τὸ $ΑΒΓΔΕ$ πεντάγωνον κύκλος ὁ $ΑΒΓΔΕ$. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεταί αἱ $ΕΑ$, $ΑΒ$
20 ὁυσὶ ταῖς $ΑΒ$, $ΒΓ$ ἴσαι εἰσὶ καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσεις ἄρα ἡ $ΒΕ$ βάσει τῇ $ΑΓ$ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ $ΑΒΕ$ τρίγωνον τῷ $ΑΒΓ$ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὅφ' αἷς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.
25 ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΒΑΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΑΒΕ$ · διπλῇ

1. γωνία ἄρα bq. τοῖς] ταῖς b. 2. ἐστίν] ἐστὶ Vbq. ἐστὶ] ἐστίν B. 3. τοῖς] τοῖ P. ἐστὶ] om. V. 4. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. Bbq. 7. ὑποτείνουσιν Pq. 9. ἔσται q. 16. εἰσὶν B, εἰσὶ V. 20. εἰσὶν PB. περιέχουσι Vbq. 21. ἐστὶ PVq, comp. b. 22. ἐστὶ PVbq. 23. ἔσονται] εἰσὶν q. 25. ἴση — p. 270, 1 ΒΑΘ] sic b, sed mg. m. 1:

A, Γ positus aequalis est. eadem de causa etiam $\angle AB\Gamma$ angulis ad A, Γ, Δ positus aequalis est. ergo pentagonum $AB\Gamma\Delta E$ aequiangulum est; quod erat demonstrandum.

VIII.

Si in pentagono aequilatero et aequiangulo sub duobus angulis deinceps positae rectae subtendunt, inter se secundum rationem extremam ac mediam secant, et partes earum maiores aequales sunt lateri pentagoni.



Nam in pentagono aequilatero et aequiangulo $AB\Gamma\Delta E$ sub duobus angulis ad A, B deinceps positae rectae $A\Gamma, BE$ subtendant inter se secantes in puncto Θ . dico, utramque secundum rationem extremam ac mediam sectam esse in puncto Θ , et partes earum maiores aequales esse lateri pentagoni.

circumscribatur enim circum $AB\Gamma\Delta E$ pentagonum circulus $AB\Gamma\Delta E$ [IV, 14]. et quoniam duo latera EA, AB duobus $AB, B\Gamma$ aequalia sunt et aequales angulos comprehendunt, erit $BE = A\Gamma$, et $\triangle ABE = AB\Gamma$, et reliqui anguli reliquis aequales erunt singuli singulis, sub quibus aequalia latera subtendunt [I, 4]. itaque $\angle B\Delta\Gamma = ABE$. quare $\angle A\Theta E$

γρ. ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ABE καὶ ἡ $A\Theta E$ ἄρα διπλῇ ἐστὶ τῆς $BA\Theta$ γωνίας. ἐκτὸς γάρ ἐστι τοῦ $AB\Theta$ τριγώνου. 25. ἐστίν] om.
Vq. γωνία] om. q. διπλῇ ἄρα] om. q.

ἄρα ἡ ὑπὸ $A\Theta E$ τῆς ὑπὸ $BA\Theta$. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ
 $EA\Gamma$ τῆς ὑπὸ $BA\Gamma$ διπλῇ, ἐπειδήπερ καὶ περιφέρεια
 ἡ $E\Delta\Gamma$ περιφερείας τῆς ΓB ἐστὶ διπλῇ· ἴση ἄρα ἡ
 ὑπὸ $\Theta A E$ γωνία τῇ ὑπὸ $A\Theta E$. ὥστε καὶ ἡ ΘE εὐθεία
 5 τῇ EA , τουτέστι τῇ AB ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση
 ἐστὶν ἡ BA εὐθεία τῇ AE , ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ
 ABE τῇ ὑπὸ AEB . ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ABE τῇ ὑπὸ $BA\Theta$
 ἐδείχθη ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ BEA ἄρα τῇ ὑπὸ $BA\Theta$ ἐστὶν
 ἴση. καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε ABE καὶ
 10 τοῦ $AB\Theta$ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ABE · λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ BAE
 γωνία λοιπῇ τῇ ὑπὸ $A\Theta B$ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ
 τὸ ABE τρίγωνον τῷ $AB\Theta$ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα
 ἐστὶν ὡς ἡ EB πρὸς τὴν BA , οὕτως ἡ AB πρὸς τὴν
 $B\Theta$. ἴση δὲ ἡ BA τῇ $E\Theta$ · ὡς ἄρα ἡ BE πρὸς τὴν
 15 $E\Theta$, οὕτως ἡ $E\Theta$ πρὸς τὴν ΘB . μείζων δὲ ἡ BE
 τῆς $E\Theta$ · μείζων ἄρα καὶ ἡ $E\Theta$ τῆς ΘB . ἡ BE ἄρα
 ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Θ , καὶ τὸ
 μείζον τμήμα τὸ ΘE ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου
 πλευρᾷ. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι καὶ ἡ AG ἄκρον
 20 καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Θ , καὶ τὸ μείζον
 αὐτῆς τμήμα ἡ $\Gamma\Theta$ ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου
 πλευρᾷ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

θ'.

Ἐὰν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ καὶ ἡ τοῦ
 25 δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγρα-
 φομένων συντεθῶσιν, ἡ ὅλη εὐθεία ἄκρον

1. Post $A\Theta E$ add. ἄρα διπλῇ ἐστὶ q. Post $BA\Theta$ add.
 γωνίας· ἐκτὸς γάρ ἐστὶ τοῦ $AB\Theta$ τριγώνου Vq, B m. 2.
 ἐστὶν PB. 2. ἐπειδὴ BV. καί] supra m. 2 B. 3. $E\Delta\Gamma$]
 $E\Delta\Gamma$ τῆς q. ἐστὶν B. 4. $\Theta A E$] $A\Theta E$ q, $\Theta A E$ '' b.

$= 2BA\Theta$ [I, 32]. uerum etiam $\angle EA\Gamma = 2BA\Gamma$, quoniam arcus $EA\Gamma$ duplo maior est arcu ΓB [III, 28. VI, 33]. itaque $\angle \Theta AE = A\Theta E$. quare etiam $\Theta E = EA = AB$ [I, 6]. et quoniam $BA = AE$, erit etiam $\angle ABE = AEB$ [I, 5]. demonstrauius autem, esse $\angle ABE = BA\Theta$. quare etiam $\angle BEA = BA\Theta$. et duorum triangulorum ABE , $AB\Theta$ communis est $\angle ABE$. itaque $\angle BAE = A\Theta B$ [I, 32]. quare trianguli ABE , $AB\Theta$ aequianguli sunt. erit igitur [VI, 4] $EB : BA = AB : B\Theta$. sed $BA = E\Theta$. itaque $BE : E\Theta = E\Theta : \Theta B$. uerum $BE > E\Theta$. itaque etiam $E\Theta > \Theta B$ [V, 14]. ergo BE in Θ secundum rationem extremam ac mediam diuisa est, et maior pars ΘE lateri pentagoni aequalis est. similiter demonstrabimus, etiam $A\Gamma$ in Θ secundum rationem extremam ac mediam diuisam esse, et maiorem eius partem $\Gamma\Theta$ lateri pentagoni aequalem esse; quod erat demonstrandum.

IX.

Lateribus hexagoni et decagoni in eundem circulum inscriptorum coniunctis tota recta secundum rationem

IX. Theon in Ptolem. p. 181.

$A\Theta E$] $EA\Theta$ q, $A\Theta E'$ b. 5. $\tau\omicron\upsilon\tau\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ B. 6. BA] AB bq.
 $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$] om. q, $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ B. 7. $\tau\eta\ \acute{\upsilon}\pi\omicron\delta\ AEB$] mg. m. 2 B.
 $\acute{\alpha}\lambda\lambda'$ bq. $BA\Theta$] $AB\Theta$ B, corr. m. 2. 8. $\acute{\alpha}\rho\alpha$] om. P,
 $\acute{\alpha}\rho\alpha\ \gamma\omega\nu\lambda\alpha$ V. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$] om. V. 9. $\iota\sigma\eta$] in ras. m. 1 b.
10. BAE] e corr. V. 11. $AB\Theta$ b. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$] om. V.
12. $AB\Theta$] $B\Theta$ in ras. V. 16. $\acute{\alpha}\rho\alpha$] $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ comp. V. $E\Theta$] corr. in EB b et B m. 2. 18. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ PB. 19. ΓA q.
21. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ B. 25. $\tau\omega\nu$] corr. ex $\tau\omicron\nu$ m. 2 P. $\tau\omicron\nu$] corr. ex $\tau\omega\nu$ m. 2 P. $\acute{\alpha}\upsilon\tau\omicron\nu$] om. b.

καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μείζον αὐτῆς
 τμημά ἐστιν ἢ τοῦ ἑξαγώνου πλευρά.

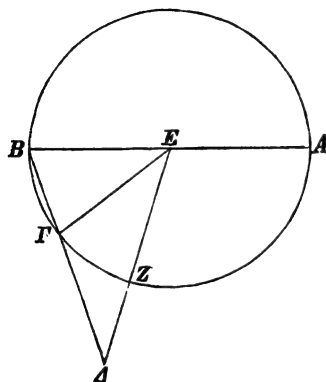
Ἔστω κύκλος ὁ $ΑΒΓ$, καὶ τῶν εἰς τὸν $ΑΒΓ$ κύ-
 κλον ἐγγραφομένων σχημάτων. δεκαγώνου μὲν ἔστω
 5 πλευρὰ ἡ $ΒΓ$, ἑξαγώνου δὲ ἡ $ΓΔ$, καὶ ἔστωσαν ἐπ'
 εὐθείας· λέγω, ὅτι ἡ ὅλη εὐθεῖα ἡ $ΒΔ$ ἄκρον καὶ
 μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μείζον αὐτῆς τμημά
 ἐστιν ἡ $ΓΔ$.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ $Ε$ σημεῖον,
 10 καὶ ἐπεξέυχθωσαν αἱ $ΕΒ$, $ΕΓ$, $ΕΔ$, καὶ διήχθω ἡ
 $ΒΕ$ ἐπὶ τὸ $Α$. ἐπεὶ δεκαγώνου ἰσοπλεύρου πλευρὰ
 ἐστιν ἡ $ΒΓ$, πενταπλασίων ἄρα ἡ $ΑΓΒ$ περιφέρεια
 τῆς $ΒΓ$ περιφερείας· τετραπλασίων ἄρα ἡ $ΑΓ$ περι-
 φέρεια τῆς $ΓΒ$. ὥς δὲ ἡ $ΑΓ$ περιφέρεια πρὸς τὴν
 15 $ΓΒ$, οὕτως ἡ ὑπὸ $ΑΕΓ$ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ $ΓΕΒ$.
 τετραπλασίων ἄρα ἡ ὑπὸ $ΑΕΓ$ τῆς ὑπὸ $ΓΕΒ$. καὶ
 ἐπεὶ ἴση ἡ ὑπὸ $ΕΒΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΕΓΒ$, ἡ ἄρα
 ὑπὸ $ΑΕΓ$ γωνία διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ $ΕΓΒ$. καὶ
 ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΕΓ$ εὐθεῖα τῇ $ΓΔ$ · ἑκατέρα γὰρ
 20 αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ ἑξαγώνου πλευρᾷ τοῦ εἰς τὸν
 $ΑΒΓ$ κύκλον [ἐγγραφομένου]· ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ
 $ΓΕΔ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΓΔΕ$ γωνίᾳ· διπλασία ἄρα ἡ
 ὑπὸ $ΕΓΒ$ γωνία τῆς ὑπὸ $ΕΔΓ$. ἀλλὰ τῆς ὑπὸ $ΕΓΒ$
 διπλασία ἐδείχθη ἡ ὑπὸ $ΑΕΓ$ · τετραπλασία ἄρα ἡ
 25 ὑπὸ $ΑΕΓ$ τῆς ὑπὸ $ΕΔΓ$. ἐδείχθη δὲ καὶ τῆς ὑπὸ
 $ΒΕΓ$ τετραπλασία ἡ ὑπὸ $ΑΕΓ$ · ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ $ΕΔΓ$

1. καί] (prius) corr. ex κατά m. rec. P. 7. Post τέτμηται
 add. κατά τὸ $Γ V$, B m. 2. 11. $ΕΒ$ b. Ante ἐπεὶ add. καὶ
 $Β V q$, P m. 2. τοῦ δεκαγ. q. 12. $ΑΓΒ$] in ras. m. 2 V,
 B add. m. rec. b. 13. $ΒΓ$ — 14. τῆς] om. b. 15. $ΑΕΓ$]
 $Γ$ corr. ex B m. rec. b. 16. ἄρα ἐστίν P. 17. ἴση ἐστίν
 P. 18. $ΑΕΓ$] $ΕΑΓ$ B, corr. m. 2. διπλασίων V.

extremam ac mediam diuisa est, et maior eius pars latus est hexagoni.

Sit circulus $AB\Gamma$, et figurarum in circulo $AB\Gamma$ inscriptarum decagoni latus sit $B\Gamma$, hexagoni autem



$\Gamma\Delta$, et in eadem recta positae sint. dico, totam rectam $B\Delta$ secundum rationem extremam ac mediam diuisam esse, et maiorem partem esse $\Gamma\Delta$.

sumatur enim centrum circuli E punctum [III, 1], et ducantur EB , $E\Gamma$, $E\Delta$, et BE ad A producat. quoniam $B\Gamma$ latus est decagoni aequilateri, arcus

AGB quintuplo maior est arcu $B\Gamma$. itaque arcus AG quadruplo maior est arcu ΓB . sed ut arcus AG ad arcum ΓB , ita angulus AEG ad angulum ΓEB [VI, 33]. itaque $\angle AEG = 4\Gamma EB$. et quoniam $\angle EBG = \angle EGB$ [I, 5], erit $\angle AEG = 2\angle EGB$ [I, 32]. et quoniam $E\Gamma = \Gamma\Delta$ [IV, 15 coroll.] (nam utraque lateri hexagoni in circulo $AB\Gamma$ inscripti aequalis est), erit etiam $\angle \Gamma EA = \angle \Gamma AE$ [I, 5]. itaque $\angle EGB = 2\angle AEG$ [I, 32]. demonstrauimus autem, esse etiam $\angle AEG = 2\angle EGB$. itaque $\angle AEG = 4\angle AEG$. demonstrauimus

$\xi\sigma\tau\iota\nu$ B. 19. $E\Gamma$] corr. ex $B\Gamma$ m. 2 B. $\tau\eta$] $\tau\eta\varsigma$ b.
 20. $\xi\sigma\tau\iota\nu$ B. 21. $\epsilon\gamma\gamma\alpha\phi\omicron\mu\acute{\epsilon}\nu\omicron\upsilon$] om. P. $\xi\sigma\tau\iota\nu$ B.
 η $\gamma\omega\nu\iota\alpha$ η V. 22. $\gamma\omega\nu\iota\alpha$] om. V. $\delta\iota\pi\lambda\eta$ b. 23. $E\Delta\Gamma$
 $\gamma\omega\nu\iota\alpha\varsigma$ b. $E\Gamma B$] B in ras. V; supra scr. $E\Delta\Gamma$ m. 2 B.
 24. AEG] A corr. ex Δ b. 25. AEG] A corr. ex Δ m. 2 P.

τῇ ὑπὸ $ΒΕΓ$. κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε $ΒΕΓ$ καὶ τοῦ $ΒΕΔ$, ἡ ὑπὸ $ΕΒΔ$ γωνία· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $ΒΕΔ$ τῇ ὑπὸ $ΕΓΒ$ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΕΒΔ$ τρίγωνον τῷ $ΕΒΓ$ τριγώνῳ. ἀνά-
 5 λογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $ΔΒ$ πρὸς τὴν $ΒΕ$, οὕτως ἡ $ΕΒ$ πρὸς τὴν $ΒΓ$. ἴση δὲ ἡ $ΕΒ$ τῇ $ΓΔ$. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $ΒΔ$ πρὸς τὴν $ΔΓ$, οὕτως ἡ $ΔΓ$ πρὸς τὴν $ΓΒ$. μείζων δὲ ἡ $ΒΔ$ τῆς $ΔΓ$ · μείζων ἄρα καὶ ἡ $ΔΓ$ τῆς $ΓΒ$. ἡ $ΒΔ$ ἄρα εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέ-
 10 τμηται [κατὰ τὸ $Γ$], καὶ τὸ μείζον τμήμα ἀντιῆς ἐστὶν ἡ $ΔΓ$ · ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ι'.

Ἐὰν εἰς κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγ-
 γραφῇ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τὴν
 15 τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου τῶν
 εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.

Ἔστω κύκλος ὁ $ΑΒΓΔΕ$, καὶ εἰς τὸν $ΑΒΓΔΕ$ κύ-
 κλον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ $ΑΒΓΔΕ$.
 λέγω, ὅτι ἡ τοῦ $ΑΒΓΔΕ$ πενταγώνου πλευρὰ δύναται
 20 τὴν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου πλευ-
 ρὰν τῶν εἰς τὸν $ΑΒΓΔΕ$ κύκλον ἐγγραφομένων.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ $Ζ$ σημεῖον,
 καὶ ἐπιξευχθεῖσα ἡ $ΑΖ$ διήχθω ἐπὶ τὸ $Η$ σημεῖον, καὶ
 ἐπεξεύχθω ἡ $ΖΒ$, καὶ ἀπὸ τοῦ $Ζ$ ἐπὶ τὴν $ΑΒ$ κά-
 25 θετος ἤχθω ἡ $ΖΘ$, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ $Κ$, καὶ ἐπε-
 ξεύχθωσαν αἱ $ΑΚ$, $ΚΒ$, καὶ πάλιν ἀπὸ τοῦ $Ζ$ ἐπὶ
 τὴν $ΑΚ$ κάθετος ἤχθω ἡ $ΖΔ$, καὶ διήχθω ἐπὶ το

2. $ΒΕΓ$] $ΒΕΔ$ P. $ΒΕΔ$] $ΒΕΓ$ P. 4. ἐστὶ] om. V.
 5. $ΔΒ$] $ΒΔ$ B. 6. $ΓΔ$] $Γ$ supra scr. m. 1 V, $ΔΓ$ P. 7. τὴν
 $ΓΒ$] $ΓΒ$ Bq. 8. $ΔΓ$] (prius) $ΑΓ$ b, $ΓΔ$ B. 9. ἄρα εὐθεῖα]

autem, esse etiam $\angle AEF = 4\angle BEF$. ergo $\angle EAF = \angle BEF$. duorum autem triangulorum BEF et BEA communis est angulus $EB\Delta$. itaque etiam $\angle BEA = \angle EFB$ [I, 32]. itaque trianguli $EB\Delta$, EBF aequianguli sunt. quare erit [VI, 4] $\Delta B : BE = EB : BF$. uerum $EB = \Gamma\Delta$. itaque $B\Delta : \Delta F = \Delta F : FB$. uerum $B\Delta > \Delta F$. itaque etiam $\Delta F > FB$ [V, 14]. ergo recta $B\Delta$ secundum rationem extremam ac mediam diuisa est, et maior pars eius est ΔF ; quod erat demonstrandum.

X.

Si in circulum pentagonum aequilaterum inscribitur, quadratum lateris pentagoni aequale est quadratis laterum hexagoni et decagoni in eodem circulo inscriptorum.

Sit circulus $AB\Gamma\Delta E$, et in circulum $AB\Gamma\Delta E$ pentagonum aequilaterum inscribatur $AB\Gamma\Delta E$. dico, quadratum lateris pentagoni $AB\Gamma\Delta E$ aequale esse quadratis laterum hexagoni et decagoni in circulo $AB\Gamma\Delta E$ inscriptorum.

sumatur enim centrum circuli Z punctum [III, 1], et ducta AZ ad H punctum producat, et ducatur ZB , et a Z ad AB perpendicularis ducatur $Z\Theta$, et ad K producat, et ducantur AK , KB , et rursus a Z ad AK perpendicularis ducatur $Z\Lambda$, et ad M pro-

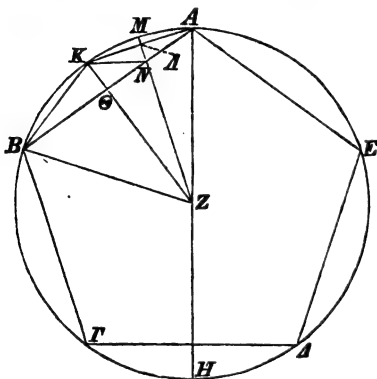
X. Pappus V p. 440, 13. Theon in Ptolem. p. 181.

mg. m. 1 V. 10. κατὰ τὸ Γ] om. P. ἀντὶ τῆς $\tau\mu\eta\mu\alpha$ P.
 ἀντὶ q. 11. ΔF] Δ corr. ex Γ m. 1 b. ὅπερ εἶδει δεῖξαι]
 om. q, o) — b; ὅπερ εἶδει: ~ B. 15. τῶν] om. V.
 17. εἰς — κύκλον] om. q, εἰς αὐτόν V, κύκλον om. Bb.
 24. καί — Z] bis b.

M, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ *KN*. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ *ΑΒΓΗ*
 περιφέρεια τῇ *ΑΕΔΗ* περιφερείᾳ, ὣν ἡ *ΑΒΓ* τῇ
ΑΕΔ ἐστὶν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ *ΓΗ* περιφέρεια λοιπῇ
 τῇ *ΗΔ* ἐστὶν ἴση. πενταγώνου δὲ ἡ *ΓΔ* δεκαγώνου
 5 ἄρα ἡ *ΓΗ*. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ *ΖΑ* τῇ *ΖΒ*, καὶ
 κάθετος ἡ *ΖΘ*, ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ *ΑΖΚ* γωνία τῇ
 ὑπὸ *ΚΖΒ*. ὥστε καὶ περιφέρεια ἡ *ΑΚ* τῇ *ΚΒ* ἐστὶν
 ἴση· διπλῇ ἄρα ἡ *ΑΒ* περιφέρεια τῆς *ΒΚ* περιφερείας·
 δεκαγώνου ἄρα πλευρά ἐστὶν ἡ *ΑΚ* εὐθεῖα. διὰ τὰ
 10 αὐτὰ δὴ καὶ ἡ *ΑΚ* τῆς *ΚΜ* ἐστὶ διπλῇ. καὶ ἐπεὶ
 διπλῇ ἐστὶν ἡ *ΑΒ* περιφέρεια τῆς *ΒΚ* περιφερείας,
 ἴση δὲ ἡ *ΓΔ* περιφέρεια τῇ *ΑΒ* περιφερείᾳ, διπλῇ
 ἄρα καὶ ἡ *ΓΔ* περιφέρεια τῆς *ΒΚ* περιφερείας. ἐστὶ
 δὲ ἡ *ΓΔ* περιφέρεια καὶ τῆς *ΓΗ* διπλῇ· ἴση ἄρα ἡ
 • 15 *ΓΗ* περιφέρεια τῇ *ΒΚ* περιφερείᾳ. ἀλλὰ ἡ *ΒΚ* τῆς
ΚΜ ἐστὶ διπλῇ, ἐπεὶ καὶ ἡ *ΚΑ*· καὶ ἡ *ΓΗ* ἄρα τῆς
ΚΜ ἐστὶ διπλῇ. ἀλλὰ μὲν καὶ ἡ *ΓΒ* περιφέρεια τῆς
ΒΚ περιφερείας ἐστὶ διπλῇ· ἴση γὰρ ἡ *ΓΒ* περιφέρεια
 τῇ *ΒΑ*. καὶ ὅλη ἄρα ἡ *ΗΒ* περιφέρεια τῆς *ΒΜ* ἐστὶ
 20 διπλῇ· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ *ΗΖΒ* γωνίας τῆς ὑπὸ
ΒΖΜ [ἐστὶ] διπλῇ. ἐστὶ δὲ ἡ ὑπὸ *ΗΖΒ* καὶ τῆς ὑπὸ
ΖΑΒ διπλῇ· ἴση γὰρ ἡ ὑπὸ *ΖΑΒ* τῇ ὑπὸ *ΑΒΖ*. καὶ
 ἡ ὑπὸ *ΒΖΝ* ἄρα τῇ ὑπὸ *ΖΑΒ* ἐστὶν ἴση. κοινὴ δὲ
 τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε *ΑΒΖ* καὶ τοῦ *ΒΖΝ*, ἡ

1. καὶ ἐπεὶ *BV*. 4. *ΔΗV*. δε-] *supra m. 1 b*.
 5. ἄρα] *ἐτι V*. 6. *ΑΖΚ*] *K supra m. 1 V*. 7. *ΚΖΒ* γωνία
q. 9. *ΑΚ*] *A corr. ex B V, BK P*. δεκαγώνου — 11. *περι-*
φερείας] *bis V*. (in rep. *AK*). 9. *διὰ*] τῆς *BK*. *διὰ q*. 11. *KB B*.
 12. *ΓΔ*] *corr. ex ΓB m. 2 B*. 13. *ἐστὶν B*. 16. *ἐστὶν B*.
ἄρα] *om. b*. 17. *ἐστὶν B*. 18. *ἐστὶν B*. 19. *τῇ*] *corr.*
ex τῆς B. *BA περιφερείᾳ V*. 20. *ΗΞB q*. 21. *B''Z'M*
b. *ἐστὶ*] *om. P; ἐστὶν B*. *ἐστὶν B*. 22. *ΑΒΖ*]

ducatur, et ducatur KN . quoniam arcus $AB\Gamma H$ arcui $AE\Delta H$ aequalis est, quorum $AB\Gamma = AE\Delta$, erit $\Gamma H = H\Delta$. $\Gamma\Delta$ autem pentagoni est; itaque ΓH est decagoni. et quoniam $ZA = ZB$, et $Z\Theta$ perpendicularis est, erit etiam $\angle AZK = KZB$ [I, 5. I, 26]. quare etiam arcus AK arcui KB aequalis est [III, 26]. itaque



arcus AB duplo maior est arcu BK . quare recta AK latus decagoni est. eadem de causa etiam AK duplo maior est arcu KM . et quoniam arcus AB duplo maior est arcu BK , et arcus $\Gamma\Delta$ arcui AB aequalis, etiam arcus $\Gamma\Delta$ arcu BK duplo maior erit. ue-

rum arcus $\Gamma\Delta$ etiam arcu ΓH duplo maior est. itaque arcus ΓH arcui BK aequalis est. sed arcus BK arcu KM duplo maior est, quoniam arcus KA eo duplo est maior. itaque etiam ΓH arcu KM duplo maior est. uerum etiam arcus ΓB arcu BK duplo maior est; nam arcus ΓB arcui BA aequalis est. quare totus arcus HB arcu BM duplo maior est. itaque etiam $\angle HZB = 2BZM$ [VI, 33]. uerum etiam $\angle HZB = 2ZAB$; nam $ZAB = ABZ$. itaque $\angle BZN = ZAB$. duorum autem triangulorum ABZ , BZN communis

corr. ex AZB m. rec. b. 23. BZN] N corr. ex H m. 2 B;
 ZBN b, corr. m. rec. 24. BZN] N corr. ex H m. 2 B.

ὑπὸ ABZ γωνία· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ AZB λοιπῇ τῇ
 ὑπὸ BNZ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ABZ
 τρίγωνον τῷ BZN τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς
 ἡ AB εὐθεῖα πρὸς τὴν BZ , οὕτως ἡ ZB πρὸς τὴν
 5 BN · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ABN ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ BZ .
 πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AA τῇ AK , κοινὴ δὲ καὶ πρὸς
 ὀρθὰς ἡ AN , βάσεις ἄρα ἡ KN βάσει τῇ AN ἐστὶν
 ἴση· καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ AKN γωνία τῇ ὑπὸ AA
 ἐστὶν ἴση. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ AA τῇ ὑπὸ KBN ἐστὶν
 10 ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ AKN ἄρα τῇ ὑπὸ KBN ἐστὶν ἴση.
 καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε AKB καὶ τοῦ
 AKN ἡ πρὸς τῷ A . λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ AKB λοιπῇ
 τῇ ὑπὸ KNA ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ KBA
 τρίγωνον τῷ KNA τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς
 15 ἡ BA εὐθεῖα πρὸς τὴν AK , οὕτως ἡ KA πρὸς τὴν
 AN · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν BAN ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς
 AK . ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ABN ἴσον τῷ ἀπὸ
 τῆς BZ · τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ABN μετὰ τοῦ ὑπὸ BAN ,
 ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς BA , ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς BZ
 20 μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AK . καὶ ἐστὶν ἡ μὲν BA πεντα-
 γώνου πλευρά, ἡ δὲ BZ ἑξαγώνου, ἡ δὲ AK δεκα-
 γώνου.

Ἡ ἄρα τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τὴν τε
 τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν
 25 αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ια'.

Ἐὰν εἰς κύκλον ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμε-
 τρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ

2. BZN P, et B, sed corr. m. rec. 4. ZB] BZ P.
 5. AB , BN Vq, b e corr. m. rec. ἐστὶν P. τῆς BZ

est $\angle ABZ$. itaque erit $\angle AZB = BNZ$ [I, 32]. itaque trianguli ABZ , BZN aequianguli sunt. erit igitur [VI, 4] $AB: BZ = ZB: BN$. quare $AB \times BN = BZ^2$ [VI, 17]. rursus quoniam $AA = AK$, et AN communis est et perpendicularis, erit $KN = AN$ et $\angle AKN = AAN$ [I, 4]. sed $\angle AAN = KBN$ [III, 29. I, 5]. quare etiam $\angle AKN = KBN$. et duorum triangulorum AKB , AKN communis est angulus ad A positus. erit igitur $\angle AKB = KNA$ [I, 32]. quare trianguli KBA , KNA aequianguli sunt. erit igitur [VI, 4] $BA: AK = KA: AN$. itaque $BA \times AN = AK^2$ [VI, 17]. demonstrauius autem, esse etiam $AB \times BN = BZ^2$. ergo $AB \times BN + BA \times AN = BZ^2 + AK^2 = BA^2$ [II, 2]. et BA latus est pentagoni, BZ hexagoni [IV, 15 coroll.], AK decagoni.

Ergo quadratum lateris pentagoni aequale est quadratis laterum hexagoni et decagoni in eodem circulo inscriptorum; quod erat demonstrandum.

XI.

Si in circulum, cuius diametrus rationalis est, pentagonum aequilaterum inscribitur, latus pentagoni recta est irrationalis minor quae uocatur.

Vq. 7. ἄρα καὶ P. AN] A corr. ex A m. 2 B.
 10. καὶ ἡ — ἐστὶν ἴση] bis P, corr. m. 1; supra m. 1 V.
 ἐστὶν ἴση] ἄρα ἴση ἐστὶ V. 11. τε] om. P. AKB] ABK
 P. 12. ἡ πρὸς τῷ A] om. V; ἡ ὑπὸ NAK Theon (Bbq).
 13. ἐστὶν B. KBA'' b. 14. KNA' b. 15. εὐθεῖα]
 om. q. 16. BA, AN q et e corr. m. rec. b. 17. AK]
 corr. ex ANK m. rec. b. AB, BN Vq et e corr. m. rec.
 b; item lin. 18. 18. BA, AN Vq et corr. ex ABN m. rec.
 b. 19. ὅπερ ἐστὶν P. BZ] corr. ex ZB V. 21. AK]
 supra scr. A m. 1 b. 25. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. bq.

πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Εἰς γὰρ κύκλον τὸν $ΑΒΓΔΕ$ ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ
 5 $ΑΒΓΔΕ$ · λέγω, ὅτι ἡ τοῦ $[ΑΒΓΔΕ]$ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ $Ζ$ σημείον, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $ΑΖ$, $ΖΒ$ καὶ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ $Η$, $Θ$ σημεία, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ $ΑΓ$, καὶ κείσθω τῆς
 10 $ΑΖ$ τέταρτον μέρος ἡ $ΖΚ$. ῥητὴ δὲ ἡ $ΑΖ$ · ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ $ΖΚ$. ἔστι δὲ καὶ ἡ $ΒΖ$ ῥητὴ· ὅλη ἄρα ἡ $ΒΚ$ ῥητὴ ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΑΓΗ$ περιφέρεια τῇ $ΑΔΗ$ περιφερείᾳ, ὥν ἡ $ΑΒΓ$ τῇ $ΑΕΔ$ ἐστὶν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ $ΓΗ$ λοιπῇ τῇ $ΗΔ$ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐὰν
 15 ἐπιξενύξωμεν τὴν $ΑΔ$, συνάγονται ὀρθαὶ αἱ πρὸς τῷ $Α$ γωνίαι, καὶ διπλῇ ἡ $ΓΔ$ τῆς $ΓΑ$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τῷ $Μ$ ὀρθαὶ εἰσιν, καὶ διπλῇ ἡ $ΑΓ$ τῆς $ΓΜ$. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΑΔΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΑΜΖ$, κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε $ΑΓΑ$
 20 καὶ τοῦ $ΑΜΖ$ ἡ ὑπὸ $ΑΑΓ$, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $ΑΓΑ$ λοιπῇ τῇ ὑπὸ $ΜΖΑ$ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΓΑ$ τρίγωνον τῷ $ΑΜΖ$ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὥς ἡ $ΑΓ$ πρὸς $ΓΑ$, οὕτως ἡ $ΜΖ$ πρὸς $ΖΑ$ · καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια· ὥς ἄρα ἡ τῆς $ΑΓ$
 25 διπλῇ πρὸς τὴν $ΓΑ$, οὕτως ἡ τῆς $ΜΖ$ διπλῇ πρὸς τὴν

1. ἄλογος] corr. ex ἀνάλογον m. rec. P. 5. $ΑΒΓΔΕ$] (alt.) om. P. 6. Ante ἄλογος eras. ἀν- P. 7. τό] (alt.) corr. ex τοῦ P. 11. ἐστιν B. 12. ἐστι Vq, comp. b. $ΑΒΓΗ$ bq. 13. $ΑΔΗ$] $ΑΕΔΗ$ bq. $ΑΕΔ$] $ΕΔ$ in ras. m. 2 V. ἴση ἐστὶν P. 14. ἄρα] om. q. 15. τῷ] τό bq. 16. $ΑΓ$ P. 17. τῷ] τό q, τῷ supra scr. o m. 1 b. Post M add. γωνίαι m. rec. P. εἰσι V bq. διπλῇ ἄρα ἡ P.

Nam in circulum $AB\Gamma\Delta E$, cuius diametrus rationalis sit, pentagonum aequilaterum inscribatur $AB\Gamma\Delta E$. dico, latus pentagoni rectam esse irrationalem minorem quae uocetur.

sumatur enim centrum circuli Z punctum [III, 1], et ducantur AZ , ZB et producantur ad puncta H , Θ , et ducatur $A\Gamma$, et ponatur $ZK = \frac{1}{4}AZ$. AZ autem rationalis est; itaque etiam ZK rationalis est. uerum etiam BZ rationalis est. itaque tota BK rationalis est. et quoniam arcus $A\Gamma H$ arcui $A\Delta H$ aequalis est, quorum $AB\Gamma = AE\Delta$, erit $\Gamma H = H\Delta$. et ducta $A\Delta$ concludimus, angulos ad A positos rectos esse, et $\Gamma\Delta = 2\Gamma A$ [I, 4]. eadem de causa etiam anguli

ad M positi recti sunt, et

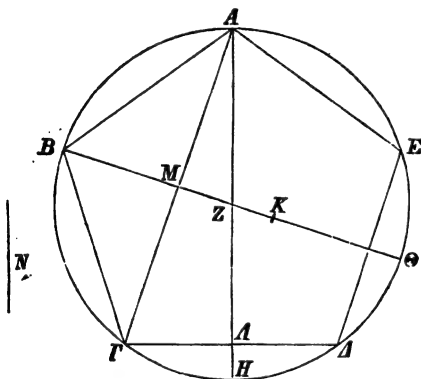
$$A\Gamma = 2\Gamma M.$$

iam quoniam

$\angle A\Gamma\Gamma = \angle AMZ$,
et duorum triangulorum $A\Gamma A$, AMZ communis est $\angle A\Gamma\Gamma$, erit $\angle A\Gamma A = \angle MZA$ [I, 32]. itaque

trianguli $A\Gamma A$, AMZ aequianguli sunt. erit igitur [VI, 4] $A\Gamma : \Gamma A = MZ : ZA$. et sumpto duplo praecedentium erit $2A\Gamma : \Gamma A = 2MZ : ZA$. sed $2MZ$

$A\Gamma$] supra scr. Δ m. 1 b. 19. $\tau\omega\nu$] corr. ex η m. 1 b.
 $A\Gamma A$] $AA\Gamma$ BV. 20. $AA\Gamma$] AA e corr. V. $A\Gamma A$] corr. ex $AA\Gamma$ m. rec. B. 23. $A\Gamma$] ΓA Vq. $\tau\eta\nu$ ΓA V. $\tau\eta\nu$ ZA V.



ZA . ὥς δὲ ἡ τῆς MZ διπλῇ πρὸς τὴν ZA , οὕτως
 ἡ MZ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ZA · καὶ ὥς ἄρα ἡ τῆς
 $ΔΓ$ διπλῇ πρὸς τὴν $ΓΑ$, οὕτως ἡ MZ πρὸς τὴν
 ἡμίσειαν τῆς ZA . καὶ τῶν ἐπομένων τὰ ἡμίσεα· ὥς
 5 ἄρα ἡ τῆς $ΔΓ$ διπλῇ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς $ΓΑ$,
 οὕτως ἡ MZ πρὸς τὸ τέταρτον τῆς ZA . καὶ ἐστὶ τῆς
 μὲν $ΔΓ$ διπλῇ ἢ $ΔΓ$, τῆς δὲ $ΓΑ$ ἡμίσεια ἢ $ΓΜ$, τῆς
 δὲ ZA τέταρτον μέρος ἢ ZK · ἐστὶν ἄρα ὥς ἡ $ΔΓ$
 πρὸς τὴν $ΓΜ$, οὕτως ἡ MZ πρὸς τὴν ZK . συν-
 10 θέντι καὶ ὥς συναμφοτέρως ἡ $ΔΓΜ$ πρὸς τὴν $ΓΜ$,
 οὕτως ἡ $ΜΚ$ πρὸς KZ · καὶ ὥς ἄρα τὸ ἀπὸ συναμ-
 φοτέρου τῆς $ΔΓΜ$ πρὸς τὸ ἀπὸ $ΓΜ$, οὕτως τὸ ἀπὸ
 $ΜΚ$ πρὸς τὸ ἀπὸ KZ . καὶ ἐπεὶ τῆς ὑπὸ δύο πλευρας
 τοῦ πενταγώνου ὑποτεिनούσης, οἷον τῆς $ΑΓ$, ἄκρον
 15 καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μείζον τμήμα ἴσον
 ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ, τουτέστι τῇ $ΔΓ$, τὸ
 δὲ μείζον τμήμα προσλαβὼν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης
 πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ὅλης,
 καὶ ἐστὶν ὅλης τῆς $ΑΓ$ ἡμίσεια ἢ $ΓΜ$, τὸ ἄρα ἀπὸ
 20 τῆς $ΔΓΜ$ ὥς μιᾶς πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς
 $ΓΜ$. ὥς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς $ΔΓΜ$ ὥς μιᾶς πρὸς τὸ ἀπὸ
 τῆς $ΓΜ$, οὕτως ἐδείχθη τὸ ἀπὸ τῆς $ΜΚ$ πρὸς τὸ
 ἀπὸ τῆς KZ · πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $ΜΚ$ τοῦ
 ἀπὸ τῆς KZ . φητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς KZ · φητὴ γὰρ ἡ
 25 διάμετρος· φητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΜΚ$ · φητὴ ἄρα
 ἐστὶν ἡ $ΜΚ$ [δυνάμει μόνον]. καὶ ἐπεὶ τετραπλασία
 ἐστὶν ἡ BZ τῆς ZK , πενταπλασία ἄρα ἐστὶν ἡ BK
 τῆς KZ · εἰκοσιπενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς BK τοῦ

1. ὥς δέ] ἀλλ' ὥς BVb. 2. τῆς $ΔΓ$] τοῦ $ΔΓ$ V; supra
 scr. A m. 1 b. 4. ἡμίσεια P et b, corr. in ἡμίση m. 1; ἡμίση

: $ZA = MZ : \frac{1}{2}ZA$. est igitur $2\Delta\Gamma : \Gamma A = MZ : \frac{1}{2}ZA$.
 et sumpto dimidio sequentium erit $2\Delta\Gamma : \frac{1}{2}\Gamma A = MZ : \frac{1}{4}ZA$. et $2\Delta\Gamma = \Delta\Gamma, \frac{1}{2}\Gamma A = \Gamma M, \frac{1}{4}ZA = ZK$.
 itaque $\Delta\Gamma : \Gamma M = MZ : ZK$. et componendo [V, 18]
 $\Delta\Gamma + \Gamma M : \Gamma M = MK : KZ$. quare erit $(\Delta\Gamma + \Gamma M)^2 : \Gamma M^2 = MK^2 : KZ^2$. et quoniam recta sub duobus
 lateribus pentagoni subtendenti uelut $\Delta\Gamma$ secundum
 rationem extremam ac mediam diuisa maior pars
 lateri pentagoni aequalis est [prop. VIII], h. e. $\Delta\Gamma$,
 et quadratum maioris partis adiuncta dimidia parte
 totius aequale est quadrato dimidia totius quinquies
 sumpto [prop. I], et $\Gamma M = \frac{1}{2}\Delta\Gamma$, erit $(\Delta\Gamma + \Gamma M)^2 = 5\Gamma M^2$. demonstraui-
 mus autem, esse $(\Delta\Gamma + \Gamma M)^2 : \Gamma M^2 = MK^2 : KZ^2$. itaque $MK^2 = 5KZ^2$. uerum
 KZ^2 rationale est; nam diametrus rationalis est. itaque
 etiam MK^2 rationale est. MK igitur rationalis¹⁾ est.
 et quoniam est $BZ = 4ZK$, erit $BK = 5KZ$. itaque
 $BK^2 = 25KZ^2$. uerum $MK^2 = 5KZ^2$. itaque BK^2

1) Uerba *δυνάμει μόνον* lin. 26, quae huc nihil pertinent, glossema sapiunt.

BV. 5. Supra $\Delta\Gamma$ scr. A m. 1 b. 7. $\Delta\Gamma$ P. ἡμισείας
 B, corr. m. 2. 10. $\Delta\Gamma M$] M supra scr. m. 2 B. 11. τὴν
 KZ bq, ZK B, τὴν ZK V. 12. $\Delta\Gamma M$] M supra scr. m.
 2 B. τῆς ΓM V. 13. τῆς KZ V. 15. τετμημένης
 Theon (BVbq). 16. τουτέστιν PB. 17. προσ- in ras. m.
 1 b. 19. ἐστίν] ἐστὶ τῆς q. 20. τῆς] om. q.
 $\Delta\Gamma$ supra scr. M m. 2 B; item lin. 21. ὡς ἀπὸ q. ἐστίν
 P. 25. ἄρα ἐστὶ P. ἐπὶ — 26. μόνον] πρὸς τὸ ἀπὸ KZ
 q. 26. ἐστίν] ἐστὶ καὶ V. δυνάμει μόνον] λόγον γὰρ ἔχει
 ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν τὸ ἀπὸ τῆς MK πρὸς τὸ ἀπὸ (τῆς
 add. V) KZ Theon (BVq). 27. ἐστίν] (alt.) om. V. 28. Post
 KZ in P del. m. 1: εἰκοσιπενταπλά (-σιον postea add.) ἄρα
 ἐστὶν ἢ BK τῆς BZ .

ἀπὸ τῆς KZ. πενταπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς MK τοῦ
 ἀπὸ τῆς KZ· πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς BK τοῦ
 ἀπὸ τῆς KM· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς BK πρὸς τὸ ἀπὸ KM
 λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετρά-
 5 γωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ BK τῇ KM
 μήκει. καὶ ἐστὶ φητὴ ἑκατέρω αὐτῶν. αἱ BK, KM
 ἄρα φηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἐὰν δὲ ἀπὸ
 φητῆς φητὴ ἀφαιρεθῇ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὐδα
 τῇ ὅλῃ, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν ἀποτομή· ἀποτομή ἄρα
 10 ἐστὶν ἡ MB, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ MK. λέγω
 δὴ, ὅτι καὶ τετάρτη. ὅ δὴ μείζων ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς
 BK τοῦ ἀπο τῆς KM, ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς
 N· ἡ BK ἄρα τῆς KM μείζων δύναται τῇ N. καὶ
 ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ KZ τῇ ZB, καὶ συνθέντι σύμ-
 15 μετρός ἐστιν ἡ KB τῇ ZB. ἀλλὰ ἡ BZ τῇ BΘ σύμ-
 μετρός ἐστιν· καὶ ἡ BK ἄρα τῇ BΘ σύμμετρός ἐστιν.
 καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς BK τοῦ ἀπο
 τῆς KM, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς BK πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς KM
 λόγον ἔχει, ὃν ἔ. πρὸς ἔν. ἀναστρέψαντι ἄρα το ἀπὸ
 20 τῆς BK πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς N λόγον ἔχει, ὃν ἔ. πρὸς
 δ, οὐχ ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον· ἀσύμμετρος
 ἄρα ἐστὶν ἡ BK τῇ N· ἡ BK ἄρα τῆς KM μείζων
 δύναται τῷ ἀπο ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ
 BK τῆς προσαρμοζούσης τῆς KM μείζων δύναται τῷ
 25 ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ὅλη ἡ BK σύμμετρός ἐστι
 τῇ ἐκκειμένη φητῇ τῇ BΘ, ἀποτομή ἄρα τετάρτη ἐστὶν
 ἡ MB. τὸ δὲ ὑπὸ φητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης
 περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστιν, καὶ ἡ δυνα-

2. BK] B corr. ex Γ m. 1 b. 3. KM] (alt.) MK b; τῆς
 MK Bq, τῆς KM V. 5. ἐστίν] om. V. KB P. 6. ἐστὶν PB.

$= 5KM^2$. itaque BK^2 ad KM^2 rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque BK , KM longitudine incommensurabiles sunt. et utraque earum rationalis est. itaque BK , KM rationales sunt potentia solum commensurabiles. sin a recta rationali rationalis aufertur toti potentia solum commensurabilis, quae relinquitur, irrationalis est, scilicet apotome. itaque MB apotome est et ei congruens MK [X, 73]. iam dico, eandem quartam esse. sit enim $N^2 = BK^2 \div KM^2$. itaque $BK^2 = KM^2 + N^2$. et quoniam KZ , ZB commensurabiles sunt, etiam componendo KB , ZB commensurabiles sunt. uerum BZ , $B\Theta$ commensurabiles sunt. itaque etiam BK , $B\Theta$ commensurabiles. et quoniam $BK^2 = 5KM^2$, erit $BK^2 : KM^2 = 5 : 1$. conuertendo igitur [V, 19 coroll.] $BK^2 : N^2 = 5 : 4$, quae non est ratio quadrati ad quadratum. itaque BK , N incommensurabiles sunt [X, 9]. quadratum igitur rectae BK quadratum rectae KM excedit quadrato rectae ei incommensurabilis. iam quoniam quadratum totius BK quadratum rectae congruentis KM excedit quadrato rectae ei incommensurabilis, et tota BK et $B\Theta$ commensurabiles sunt, MB quarta apotome erit [X deff. tert. 4].

KM] K corr. ex M m. 1 V. 7. $\epsilon\lambda\alpha\nu$ B. 9. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ $\kappa\alpha\lambda\epsilon\iota\tau\alpha\iota$ $\delta\acute{\epsilon}$ bq. $\acute{\alpha}\pi\omicron\tau\omicron\mu\eta\eta$] om. BV. 10. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$] om. V.
 11. $\delta\eta$] $\delta\acute{\epsilon}$ B. $\delta\eta$] $\gamma\acute{\alpha}\rho$ BV. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ P. $\tau\eta\varsigma$] om. q.
 14. ZB] Z in ras. m. 1 P. 15. ZB] BZ Bq et supra scr. \angle
 b. 16. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ PBVq, comp. b. Dein add. $\mu\eta\eta\kappa\epsilon\iota$ BV.
 $\kappa\alpha\iota$ — $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$] mg. m. 2 ins. ante $\mu\eta\eta\kappa\epsilon\iota$ B. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ Vq, comp.
 Bb. 18. $\tau\acute{o}$] (alt.) $\tau\acute{o}\nu$ V. 19. $\bar{\epsilon}$] $\pi\acute{\epsilon}\nu\tau\epsilon$ q. $\bar{\epsilon}\nu$] $\bar{\alpha}$ BV,
 $\tau\acute{o}\nu$ $\bar{\alpha}$ b. 20. $\tau\acute{o}$] $\tau\acute{o}\nu$ V. 21. $\delta\nu$] δ b. 23. $\sigma\upsilon\mu\mu\acute{\epsilon}\tau\rho\omicron\nu$
 q et P, sed corr. m. rec. 25. Ante BK eras. K P. $\acute{\alpha}\sigma\upsilon\mu\mu\epsilon\tau\rho\omicron\varsigma$ B.
 27. BM P. 28. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ Vq, comp. b.

μένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν, καλεῖται δὲ ἐλάττων. δύ-
νεται δὲ τὸ ὑπὸ τῶν $\Theta B M$ ἢ AB διὰ τὸ ἐπιξευγνυ-
μένης τῆς $A\Theta$ ἰσογώνιον γίνεσθαι τὸ $AB\Theta$ τρίγωνον
τῷ ABM τριγώνῳ καὶ εἶναι ὥς τὴν ΘB πρὸς τὴν
5 BA , οὕτως τὴν AB πρὸς τὴν BM .

Ἡ ἄρα AB τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν
ἢ καλουμένη ἐλάττων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιβ'.

Ἐὰν εἰς κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγ-
10 γραφῇ, ἢ τοῦ τριγώνου πλευρὰ δυνάμει τρι-
πλασίῳ ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

Ἔστω κύκλος ὁ $AB\Gamma$, καὶ εἰς αὐτὸν τρίγωνον
ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ $AB\Gamma$. λέγω, ὅτι τοῦ $AB\Gamma$
τριγώνου μία πλευρὰ δυνάμει τριπλασίῳ ἐστὶ τῆς ἐκ
15 τοῦ κέντρου τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου τὸ
 Δ , καὶ ἐπιξευχθεῖσα ἡ $A\Delta$ διήχθω ἐπὶ τὸ E , καὶ
ἐπεξεύχθω ἡ BE . καὶ ἐπεὶ ἰσόπλευρόν ἐστι τὸ $AB\Gamma$
τρίγωνον, ἡ $BE\Gamma$ ἄρα περιφέρεια τρίτον μέρος ἐστὶ
20 τῆς τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου περιφερείας. ἡ ἄρα BE περι-
φέρεια ἕκτον ἐστὶ μέρος τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας·
ἐξαγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ BE εὐθεῖα· ἴση ἄρα ἐστὶ τῇ
ἐκ τοῦ κέντρου τῇ ΔE . καὶ ἐπεὶ διπλῇ ἐστὶν ἡ AE
τῆς ΔE , τετραπλασίον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AE τοῦ ἀπὸ

1. ἐστὶ BVq , comp. b. 2. τό] om. B, add. mg. m. 2.
 ΘB , $BM Vq$. 3. γίνεσθαι V. $A\Theta B q$. 4. τρι-
γώνῳ] om. b. $B\Theta q$. 5. τὴν] (prius) corr. ex ἡ m. 1 P.
6. ἐστὶν] om. P. 7. πλευρὰ ἐλάττων b, supra scr. β — α. ἡ τοῦ BV .
13. ἐγγεγράφθω (sic) ἰσόπλευρον b, supra scr. β — α. ἡ τοῦ BV .
15. $AB\Gamma$] om. V. 16. $AB\Gamma$] om. BV . 20. κύκλου] om. q.
22. ἐξαγώνος B. Post prius ἄρα add. πλευρὰ V. ἐστὶν PB.

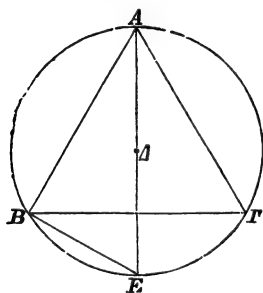
rectangulum autem rationali et quarta apotome comprehensum irrationale est, et recta, cuius quadratum ei aequale est, irrationalis est uocaturque minor [X, 94]. uerum $AB^2 = \Theta B \times BM$, quia ducta $A\Theta$ trianguli $AB\Theta$, ABM aequianguli fiunt [VI, 8], et est $\Theta B : BA = AB : BM$ [VI, 4].

Ergo AB latus pentagoni irrationalis est minor quae uocatur; quod erat demonstrandum.

XII.

Si in circulum triangulus aequiangulus inscribitur, latus trianguli potentia triplo maius est radio circuli.

Sit circulus $AB\Gamma$, et in eum triangulus aequiangulus $AB\Gamma$ inscribatur [IV, 2]. dico, latus quoduis trianguli $AB\Gamma$ potentia triplo maius esse radio circuli $AB\Gamma$.



sumatur enim Δ centrum circuli $AB\Gamma$ [III, 1], et ducta $A\Delta$ ad E producat, et ducatur BE . et quoniam triangulus $AB\Gamma$ aequiangulus est,

arcus $BE\Gamma$ tertia pars est ambitus circuli $AB\Gamma$. itaque arcus BE sexta pars est ambitus circuli.¹⁾ itaque hexagoni est recta BE . quare $BE = \Delta E$ [IV, 15 coroll.]. et quoniam $AE = 2\Delta E$, erit $AE^2 = 4\Delta E^2 = 4BE^2$.

XII. Theon. in Ptolem. p. 183.

1) Nam $\angle \Gamma E = \angle ABE$ et arc. $\angle \Gamma = \angle AB$.

τῆς EA , τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς BE . ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς AE τοῖς ἀπὸ τῶν AB , BE . τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AB , BE τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς BE . διελόντι ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AB τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ BE .
 5 ἴση δὲ ἡ BE τῇ AE . τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AB τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς AE .

Ἡ ἄρα τοῦ τριγώνου πλευρὰ δυνάμει τριπλασία ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου [τοῦ κύκλου]. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιγ'.

10 Πυραμίδα συστήσασθαι καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ
 15 AB , καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, ὥστε διπλασίαν εἶναι τὴν $A\Gamma$ τῆς ΓB . καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ $A\Delta B$, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἡ $\Gamma\Delta$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔA . καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ EZH ἴσην ἔχων τὴν
 20 ἐκ τοῦ κέντρου τῇ $\Delta\Gamma$, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν EZH κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ EZH . καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Θ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $E\Theta$, ΘZ , ΘH . καὶ ἀνεστήτω ἀπὸ τοῦ Θ σημείου τῷ τοῦ EZH κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ
 25 ΘK , καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ τῆς ΘK τῇ $A\Gamma$ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΘK , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ KE , KZ , KH . καὶ ἐπεὶ

4. διπλάσιόν b. ἐστιν P. ἀπὸ τῆς V. 5. διπλάσιόν b. 7. διπλασία b, τριπλασίαν V. 8. ἐστὶν P. τοῦ κύκλου] om. P. 10. Ante καὶ ins. ἐκ τεσσάρων τριγώνων ἰσοπλεύρων mg. m. 1 pro scholio P. σφαῖραν b. 12. ἐστὶν P. 14. ἐκκείσθω] prius κ supra scr. m. rec. P. 15. Ante

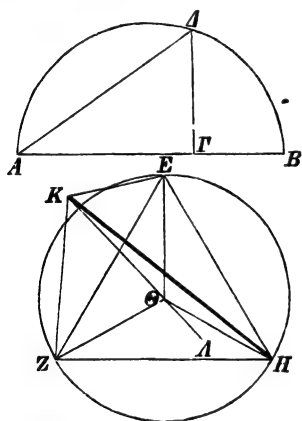
uerum $AE^2 = AB^2 + BE^2$ [III, 31. I, 47]. itaque $AB^2 + BE^2 = 4BE^2$. subtrahendo igitur $AB^2 = 3BE^2$. sed $BE = AE$. itaque $AB^2 = 3AE^2$.

Ergo latus trianguli potentia triplo maius est radio; quod erat demonstrandum.

XIII.

Pyramidem construere et data sphaera comprehendere et demonstrare, diametrum sphaerae potentia sesquialteram esse lateris pyramidis.

Ponatur AB diametrus datae sphaerae et in Γ puncto ita secetur, ut sit $A\Gamma = 2\Gamma B$ [VI, 10]. et in AB semicirculus describatur $A\Delta B$, et a Γ puncto perpendicularis ducatur $\Gamma\Delta$, et ducatur ΔA . et ponatur circulus EZH radium aequalem habens rectae $\Delta\Gamma$, et in circulum EZH triangulus aequilaterus inscribatur EZH [IV, 2]. et sumatur centrum circuli punctum Θ [III, 1], et ducantur $E\Theta$, ΘZ , ΘH . et in Θ puncto ad planum circuli EZH perpendicularis erigatur ΘK , et a ΘK rectae $A\Gamma$ aequalis abscindatur ΘK et ducantur KE , KZ , KH . et quoniam $K\Theta$ ad



XIII—XVII. Hero def. 101, 2.

κατά del. δίχα m. 1 (et m. rec.) P. 16. τῆς ΓΒ] mg. postea
add. m. 1 P, τῆς ΒΓ V. καταγεγράφθω P. 17. ση-]
supra m. 1 b. 19. ΕΗΖ V. ἔχον q. 20. ἐκ] supra m.
1 P. 22. κέντρον b. 25. ἀφαιρέσθω P.

ἡ $K\Theta$ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ EZH κύκλου ἐπίπεδον,
 καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας
 καὶ οὕσας ἐν τῷ τοῦ EZH κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθὰς
 ποιήσει γωνίας. ἄπτεται δὲ αὐτῆς ἐκάστη τῶν ΘE ,
 5 ΘZ , ΘH · ἡ ΘK ἄρα πρὸς ἐκάστην τῶν ΘE , ΘZ ,
 ΘH ὀρθή ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν $ΑΓ$ τῇ
 ΘK , ἡ δὲ $ΓΔ$ τῇ ΘE , καὶ ὀρθὰς γωνίας περιέχουσιν,
 βάσεις ἄρα ἡ $ΔΑ$ βάσει τῇ $ΚΕ$ ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ
 αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρω τῶν KZ , KH τῇ $ΔΑ$ ἐστὶν ἴση·
 10 αἱ τρεῖς ἄρα αἱ $ΚΕ$, KZ , KH ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.
 καὶ ἐπεὶ διπλῇ ἐστὶν ἡ $ΑΓ$ τῆς $ΓΒ$, τριπλῇ ἄρα ἡ
 $ΑΒ$ τῆς $ΒΓ$. ὥς δὲ ἡ $ΑΒ$ πρὸς τὴν $ΒΓ$, οὕτως τὸ
 ἀπὸ τῆς $ΑΔ$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $ΔΓ$, ὥς ἐξῆς δειχθή-
 σεται. τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΔ$ τοῦ ἀπὸ τῆς
 15 $ΔΓ$. ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΖΕ$ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΕΘ$
 τριπλάσιον, καὶ ἐστὶν ἴση ἡ $ΔΓ$ τῇ $ΕΘ$ · ἴση ἄρα καὶ
 ἡ $ΔΑ$ τῇ $ΕΖ$. ἀλλὰ ἡ $ΔΑ$ ἐκάστη τῶν $ΚΕ$, KZ ,
 KH ἐδείχθη ἴση· καὶ ἐκάστη ἄρα τῶν $ΕΖ$, ZH , $ΗΕ$
 ἐκάστη τῶν $ΚΕ$, KZ , KH ἐστὶν ἴση· ἰσόπλευρα ἄρα
 20 ἐστὶ τὰ τέσσαρα τρίγωνα τὰ EZH , $ΚΕΖ$, KZH ,
 $ΚΕΗ$. πυραμὶς ἄρα συνέσταται ἐκ τεσσάρων τρι-
 γώνων ἰσοπλεύρων, ἥς βάσεις μὲν ἐστὶ τὸ EZH τρί-
 γωνον, κορυφὴ δὲ τὸ K σημεῖον.

Δεῖ δὴ αὐτὴν καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ
 25 καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἡμιολία ἐστὶ
 δυνάμει τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

1. ἐστὶν P. 2. ἄρα] ἔτι V. αὐτῆς] corr. ex αὐτῇ m.
 2 B. 3. $EZH\Theta$ Bb. 5. ἡ ΘK — 6. ΘH] mg. m. 2 B.
 5. ΘK] Θ e corr. m. 1 b. 6. ἐστὶ Vq, comp. b.
 7. περιέχουσι Vbq. 8. $ΔΑ$] A e corr. m. 2 P. 9. ἴση· καὶ αἱ
 q. 10. ἀλλήλοις V. εἰσί q, comp. b. 11. τριπλῇ] διπλῇ
 b. 13. Post $ΔΓ$ add. P: ἐπεὶ γάρ ἐστὶν ὥς ἡ $ΑΒ$ πρὸς $ΑΓ$

planum circuli EZH perpendicularis est, etiam ad omnes rectas eam tangentes et in plano circuli EZH positas rectos angulos efficiet [XI def. 3]. tangunt autem $\odot E$, $\odot Z$, $\odot H$. $\odot K$ igitur ad singulas $\odot E$, $\odot Z$, $\odot H$ perpendicularis est. et quoniam $AG = \odot K$, $GA = \odot E$, et rectos angulos comprehendunt, erit $AA = KE$ [I, 4]. eadem de causa etiam $KZ = AA$ et $KH = AA$. itaque $KE = KZ = KH$. et quoniam $AG = 2GB$, erit $AB = 3BG$. sed $AB : BG = AD^2 : AG^2$, ut postea demonstrabitur [u. lemma]. itaque $AD^2 = 3AG^2$. uerum etiam $ZE^2 = 3E\odot^2$ [prop. XII]. et $AG = E\odot$. itaque etiam $AA = EZ$. demonstrauimus autem, esse $AA = KE = KZ = KH$. itaque singulae EZ , ZH , HE singulis KE , KZ , KH aequales sunt. quare quattuor trianguli EZH , KEZ , KZH , KEH aequilateri sunt. ergo ex quattuor triangulis aequilateris pyramis constructa est, cuius basis est triangulus EZH , uertex autem K punctum.

oportet igitur eam etiam data sphaera comprehendere et demonstrare, diametrum sphaerae potentia sesquialteram esse lateris pyramidis.

οὕτως (corr. ex οὕτος m. 2) τὸ ἀπὸ AA πρὸς τὸ ἀπὸ AG , ἀναστρέφονται ὡς ἡ AB πρὸς BG , οὕτως τὸ ἀπὸ AD πρὸς τὸ ἀπὸ AG ; idem mg. m. 2 B (BA pro priore AB , AG pro AG), add. in fine ὡς ἐξῆς δειχθήσεται, sed ins. post δειχθήσεται lin. 13; eodem loco haec uerba ἐπεὶ γάρ — δειχθήσεται in textu hab. V (BA , τὴν AG , τῆς AA , τῆς AG), sed περιττόν add. m. 2. 15. ἐστὶν PB. 17. AA] AD P. τῇ] τῆς P. 18. HE] corr. ex $H\odot$ m. 2 V, $H\odot$ q. 19. KE] EK q. ἴση ἴσα καὶ q. 20. ἐστὶν B. τέσσαρα B. KZH] KEH q et V (E e corr.). 21. KEH] KZH q et V (ZH e corr.), $KH\odot$ B. συνίσταται BVb. Post τριγώνων add. ἴσων καὶ Vq, m. rec. B. 22. ἡ q. 25. δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ V. ἐστὶν P.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας τῇ $K\Theta$ εὐθεία ἡ ΘA , καὶ κείσθω τῇ GB ἴση ἡ ΘA . καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ AG πρὸς τὴν GA , οὕτως ἡ GA πρὸς τὴν GB , ἴση δὲ ἡ μὲν AG τῇ $K\Theta$, ἡ δὲ GA τῇ ΘE , ἡ δὲ
 5 GB τῇ ΘA , ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $K\Theta$ πρὸς τὴν ΘE , οὕτως ἡ $E\Theta$ πρὸς τὴν ΘA . τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $K\Theta$, ΘA ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $E\Theta$. καὶ ἐστὶν ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ $K\Theta E$, $E\Theta A$ γωνιῶν· τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς KA γραφόμενον ἡμικύκλιον ἦξει καὶ διὰ τοῦ E [ἐπει-
 10 δὴπερ εἰάν ἐπιζεύξωμεν τὴν EA , ὀρθὴ γίνεται ἡ ὑπὸ AEK γωνία διὰ τὸ ἰσογώνιον γίνεσθαι τὸ EAK τρίγωνον ἑκατέρω τῶν $EA\Theta$, $E\Theta K$ τριγώνων]. εἰάν δὴ μενούσης τῆς KA περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἦρξατο φέρεσθαι,
 15 ἦξει καὶ διὰ τῶν Z , H σημείων ἐπιzeugνυμένων τῶν ZA , AH καὶ ὀρθῶν ὁμοίως γινομένων τῶν πρὸς τοῖς Z , H γωνιῶν· καὶ ἐστὶ ἡ πυραμὶς σφαῖρα περιελημμένη τῇ δοθείσῃ. ἡ γὰρ KA τῆς σφαίρας διάμετρος ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ
 20 τῇ AB , ἐπειδὴπερ τῇ μὲν AG ἴση κεῖται ἡ $K\Theta$, τῇ δὲ GB ἡ ΘA .

Λέγω δὴ, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἡμιολία ἐστὶ δυνάμει τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

Ἐπεὶ γὰρ διπλῇ ἐστὶν ἡ AG τῆς GB , τριπλῇ ἄρα
 25 ἐστὶν ἡ AB τῆς BG . ἀναστρέψαντι ἡμιολία ἄρα ἐστὶν ἡ BA τῆς AG . ὡς δὲ ἡ BA πρὸς τὴν AG , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς BA πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AA [ἐπειδὴπερ ἐπιzeugνυμένης τῆς AB ἐστὶν ὡς ἡ BA πρὸς τὴν AA , οὕτως ἡ AA πρὸς τὴν AG διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν

1. τῇ] scripsi; τῆς PBVbq. 2. ΘA] supra scr. A m.
 1 b. ἐκείσθω q. 5. ἄρα] e corr. V. 6. Ante $E\Theta$ del.

producatur enim recta $K\Theta$ in directum et fiat ΘA , et ponatur $\Theta A = \Gamma B$. et quoniam est $A\Gamma : \Gamma A = \Gamma A : \Gamma B$ [VI, 8 coroll.], et $A\Gamma = K\Theta$, $\Gamma A = \Theta E$, $\Gamma B = \Theta A$, erit $K\Theta : \Theta E = E\Theta : \Theta A$. itaque $K\Theta \times \Theta A = E\Theta^2$ [VI, 17]. et uterque angulus $K\Theta E$, $E\Theta A$ rectus est. itaque semicirculus in KA descriptus etiam per E ueniet.¹⁾ itaque si manente recta KA semicirculus circumuolutus rursus ad idem punctum refertur, unde circumuolui coeptus est, etiam per puncta Z , H ueniet ductis rectis ZA , AH , quo facto anguli ad Z , H positi et ipsi recti fiunt. et pyramis data sphaera erit comprehensa; nam KA diametro sphaerae AB aequalis est, quoniam posuimus

$$K\Theta = A\Gamma, \Theta A = \Gamma B.$$

iam dico, diametrum sphaerae potentia sesquialteram esse lateris pyramidis.

nam quoniam $A\Gamma = 2\Gamma B$, erit $AB = 3\Gamma B$. itaque conuertendo $BA = \frac{3}{2}A\Gamma$. uerum $BA : A\Gamma = BA^2$

1) Hoc ex VI, 8 concluderat Euclides; nam quae sequuntur lin. 9—12 male cohaerent et subditina uidentur, sicut etiam lin. 27 — pag. 294, 3. ibi Euclides tacite usus erat VI, 4 et V def. 9. quae leguntur, et re (cfr. lemma) et uerbis (*εἶναι* pag. 294 lin. 1) offendunt.

Θ m. 1 P. 7. *ἐστὶ*] *ἐστίν* P. 8. $K\Theta E$] $K\Theta B$; corr. ex $K\Theta$, ΘE m. 1 P. $E\Theta A$] corr. ex $E\Theta$, ΘA m. 1 P.
10. *γίγνεται* P. 11. $A EK$] $EAK B$, corr. m. 2. *γίγνεται* Vb. 12. $E K \Theta$ P. 16. ZA] Z corr. ex A m. 1 V.
γιννομένων Pb. 17. *ἐστίν* P. 19. *ἐστίν* P.
23. *ἐστίν* Pb. 24. *τῆς*] *τῇ* b. *διπλῇ* b. *ἄρα ἐστίν*] *ἄρα* V, *ἐστίν* ἄρα B. 26. BA] (prius) AB V. *πρὸς τῇν*] bis P. 28. ΔB] in ras. V, AB b et B, sed corr. BA] corr. in $B\Delta$ Bb.

ΔAB , $\Delta A\Gamma$ τριγώνων, καὶ εἶναι ὥς τὴν πρώτην πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας]. ἡμιόλιον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς BA τοῦ ἀπὸ τῆς AA . καὶ ἐστὶν ἡ μὲν BA ἡ τῆς δοθείσης
 5 σφαίρας διάμετρος, ἡ δὲ AA ἴση τῇ πλευρᾷ τῆς πυραμίδος.

Ἡ ἄρα τῆς σφαίρας διάμετρος ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λήμμα.

10 Δεικτέον, ὅτι ἐστὶν ὥς ἡ AB πρὸς τὴν $B\Gamma$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AA πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $A\Gamma$.

Ἐκκείσθω γὰρ ἡ τοῦ ἡμικυκλίου καταγραφὴ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΔB , καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς $A\Gamma$ τετράγωνον τὸ $E\Gamma$, καὶ συμπληρώσθω τὸ ZB παρ-
 15 αλληλόγραμμον. ἐπεὶ οὖν διὰ τὸ ἰσογώνιον εἶναι τὸ ΔAB τρίγωνον τῷ $\Delta A\Gamma$ τριγώνῳ ἐστὶν ὥς ἡ BA πρὸς τὴν AA , οὕτως ἡ AA πρὸς τὴν $A\Gamma$, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν BA , $A\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AA . καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὥς ἡ AB πρὸς τὴν $B\Gamma$, οὕτως τὸ EB
 20 πρὸς τὸ BZ , καὶ ἐστὶ τὸ μὲν EB τὸ ὑπὸ τῶν BA , $A\Gamma$. ἴση γὰρ ἡ EA τῇ $A\Gamma$. τὸ δὲ BZ τὸ ὑπὸ τῶν $A\Gamma$, ΓB , ὥς ἄρα ἡ AB πρὸς τὴν $B\Gamma$, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν BA , $A\Gamma$ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν $A\Gamma$, ΓB . καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν BA , $A\Gamma$ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς AA , τὸ
 25 δὲ ὑπὸ τῶν $A\Gamma B$ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς $A\Gamma$. ἡ γὰρ $A\Gamma$ κάθετος τῶν τῆς βάσεως τμημάτων τῶν $A\Gamma$, ΓB μέση ἀνάλογόν ἐστὶ διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι τὴν ὑπὸ $AA B$. ὥς

4. ἡ] (alt.) om. q. 5. AA] om. b. 7. δυνάμει ἡμιολία
 Gregorius. 9. λήμμα] om. codd. 13. ΔB] supra scr. A

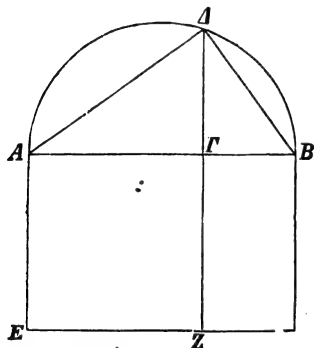
: AA^2 . itaque $BA^2 = \frac{3}{2}AA^2$. et BA datae sphaerae diametrus est, AA autem lateri pyramidis aequalis.

Ergo diametrus sphaerae potentia¹⁾ sesquialtera est lateris pyramidis; quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Demonstrandum, esse $AB : B\Gamma = AA^2 : \Delta\Gamma^2$.

exponatur enim figura semicirculi, et ducatur ΔB , et in $\Delta\Gamma$ quadratum $E\Gamma$ describatur, et expleatur parallelogrammum ZB .



iam quoniam est $BA : AA = \Delta A : \Delta\Gamma$, quia $\Delta AB \sim \Delta A\Gamma$ [VI, 8. VI, 4], erit $BA \times \Delta\Gamma = AA^2$ [VI, 17]. et quoniam est $AB : B\Gamma = EB : BZ$ [VI, 1], et $EB = BA \times \Delta\Gamma$ (nam $EA = \Delta\Gamma$), $BZ = \Delta\Gamma \times \Gamma B$, erit $AB : B\Gamma = BA \times \Delta\Gamma : \Delta\Gamma \times \Gamma B$. et $BA \times \Delta\Gamma = AA^2$, $\Delta\Gamma \times \Gamma B = \Delta\Gamma^2$.

nam perpendicularis $\Delta\Gamma$ media est proportionalis partium basis $\Delta\Gamma$, ΓB [VI, 8 coroll.], quia rectus est

1) Uocabulo *δυνάμει* aegre quidem caremus, sed fortasse tamen audiri potest.

m. 1 b. 14. $E\Gamma$] corr. ex $B\Gamma$ m. 1 B. 20. $\xi\sigma\tau\iota\nu$ B.
21. $\gamma\acute{\alpha}\rho \xi\sigma\tau\iota\nu$ V. 23. $\xi\sigma\tau\iota\nu$ B. 24. $\tau\acute{o}$] $\tau\acute{\omega}$ V. $\tau\acute{\omega}$] $\tau\acute{o}$
V. AA] sic, sed mg. m. 1 ΔB b. 25. $\Delta\Gamma$, ΓB BV.

ἄρα ἡ AB πρὸς τὴν $BΓ$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΔ$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $ΔΓ$. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδ'.

Ὀκτάεδρον συστήσασθαι καὶ σφαῖρα περι-
5 λαβεῖν, ἥ καὶ τὰ πρότερα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ
τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασία ἐστὶ
τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ
 AB , καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ $Γ$, καὶ γεγράφθω
10 ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ $ΑΔΒ$, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ
 $Γ$ τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἡ $ΓΔ$, καὶ ἐπεξέχθω ἡ $ΔΒ$,
καὶ ἐκκείσθω τετράγωνον τὸ $EZHΘ$ ἴσην ἔχον ἐκά-
στην τῶν πλευρῶν τῇ $ΔΒ$, καὶ ἐπεξέχθωσαν αἱ $ΘΖ$,
 $ΕΗ$, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ K σημεῖον τῷ τοῦ $EZHΘ$
15 τετραγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα ἡ $ΚΑ$ καὶ
διήχθω ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τοῦ ἐπιπέδου ὥς ἡ $KΜ$,
καὶ ἀφηρησθῶ ἀφ' ἑκατέρας τῶν $ΚΑ$, $KΜ$ μιᾶ τῶν
 $EΚ$, $ZΚ$, $ΗΚ$, $ΘΚ$ ἴση ἑκατέρα τῶν $ΚΑ$, $KΜ$, καὶ
ἐπεξέχθωσαν αἱ $ΑΕ$, $ΑΖ$, $ΑΗ$, $ΑΘ$, $ΜΕ$, $ΜΖ$, $ΜΗ$,
20 $ΜΘ$. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΚΕ$ τῇ $ΚΘ$, καὶ ἐστὶν
ὀρθὴ ἡ ὑπὸ $EΚΘ$ γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $ΘΕ$ δι-
πλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς $EΚ$. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν
ἡ $ΑΚ$ τῇ $ΚΕ$, καὶ ἐστὶν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ $ΑΚΕ$ γωνία,
τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $ΕΑ$ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ $EΚ$.
25 ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΘΕ$ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ

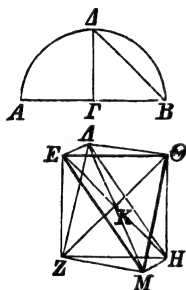
2. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. V. Figura lemmatis fuit in
L. 3. ιδ'] ιδ L. 4. συστήσασθαι P, corr. m. 2.
5. τὰ πρότερα] τὴν πυραμίδα Theon (LBVbq), γε. ἥ καὶ τὴν
πυραμίδα mg. m. 1 pro schol. P. 6. τῆς] om. b. ἐστὶν
LB. 8. δοθείσης] om. q. σφαίρας] σφαίρας ἡ AB L.

$\angle A\Delta B$ [III, 31]. ergo $AB : B\Gamma = A\Delta^2 : \Delta\Gamma^2$; quod erat demonstrandum.

XIV.

Octaedrum construere et sphaera comprehendere sicut priora et demonstrare, diametrum sphaerae potentia duplo maiorem esse latere octaedri.

ponatur datae sphaerae diametrus AB , et in Γ in duas partes aequales diuidatur, et in AB semicirculus describatur $A\Delta B$, et a Γ ad AB perpendicularis ducatur $\Gamma\Delta$, et ducatur ΔB , et exponatur quadratum $EZH\Theta$ singula latera rectae ΔB aequalia habens, et ducantur ΘZ , EH , et in K puncto ad planum quadrati $EZH\Theta$ perpendicularis ducatur recta $K\Delta$, et ad alteram partem plani producat ut KM , et ab utraque $K\Delta$, KM uni rectarum EK , ZK , HK , ΘK aequales abscindantur $K\Delta$, KM , et ducantur ΔE , ΔZ , ΔH , $\Delta\Theta$, ME , MZ , MH , $M\Theta$. et quoniam $KE = K\Theta$, et $\angle EK\Theta$ rectus est, erit [I, 47] $\Theta E^2 = 2EK^2$. rursus quoniam $\Delta K = KE$, et $\angle \Delta KE$ rectus est, erit $E\Delta^2 = 2EK^2$ [id.]. demonstraui



XIV. Pappus V p. 414, 7.

11. $\Gamma\Delta$] Δ e corr. V. $\acute{\epsilon}\pi\epsilon\zeta\epsilon\nu$ q. 12. $\acute{\epsilon}\kappa\epsilon\iota\sigma\theta\omega$ supra
scr. \times m. 1 P. 13. ΔB] in ras. V, $B\Delta$ B. ΘZ] $Z\Theta$ LBb.
16. $\mu\acute{\epsilon}\phi\eta$] om. V. 17. $\kappa\alpha\iota$] om. L? $\mu\iota\acute{\alpha}$ — 18. KM] om. L.
18. EK] KE supra m. 2 B, KE V. ZK] KZ BV q.
 KH , $K\Theta$ BV. 22. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ L. 23. $K\Delta E$ b.
24. Post $E\Delta$ ras. 1 litt. P. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ L. $\tau\eta\varsigma$ EK LBV.

τῆς EK · τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AE ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $E\Theta$ · ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ AE τῇ $E\Theta$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ $A\Theta$ τῇ ΘE ἐστὶν ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ $AE\Theta$ τριγώνον. ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι καὶ ἕκαστον
 5 τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μὲν εἰσιν αἱ τοῦ $EZH\Theta$ τετραγώνου πλευραὶ, κορυφαὶ δὲ τὰ A, M σημεία, ἰσόπλευρόν ἐστιν· ὀκτάεδρον ἄρα συνέσταται. ὑπὸ ὀκτῶ τριγώνων ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ
 10 καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίον ἐστὶ τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ τρεῖς αἱ AK, KM, KE ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς AM γραφόμενον ἡμικύκλιον ἦξει καὶ διὰ τοῦ E . καὶ διὰ τὰ αὐτά, ἕαν
 15 μενούσης τῆς AM περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἦξει καὶ διὰ τῶν Z, H, Θ σημείων, καὶ ἔσται σφαῖρα περιελημμένον τὸ ὀκτάεδρον. λέγω δὴ, ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ AK τῇ KM , κοινὴ δὲ ἡ KE ,
 20 καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν, βάσεις ἄρα ἡ AE βάσει τῇ EM ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ AEM γωνία· ἐν ἡμικυκλίῳ γάρ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AM διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς AE . πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AG τῇ GB , διπλασία ἐστὶν ἡ AB τῆς BG . ὥς δὲ ἡ
 25 AB πρὸς τὴν BG , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BA · διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς BA . ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AM διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς AE . καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς

1. ἐστίν L.
 ὧν add. αἱ b.

2. ἐστίν] om. V.
 βάσεις L et B, sed corr. m. 2.

3. ἐστίν L.

5. Post
 ἐστίν L.

autem, esse etiam $\Theta E^2 = 2EK^2$. itaque $AE^2 = E\Theta^2$. quare $AE = E\Theta$. eadem de causa igitur etiam $A\Theta = \Theta E$. quare triangulus $AE\Theta$ aequilaterus est. similiter demonstrabimus, etiam reliquos triangulos, quorum bases sint latera quadrati $EZH\Theta$, uertices autem puncta A, M , singulos aequilateros esse. ergo octaedrum constructum est octo triangulis aequilateris comprehensum.

Oportet igitur data sphaera idem comprehendere et demonstrare, diametrum sphaerae potentia duplo maiorem esse latere octaedri.

nam quoniam tres rectae AK, KM, KE inter se aequales sunt, semicirculus in AM descriptus etiam per E ueniet. et eadem de causa si manente AM semicirculus circumuolutus ad idem punctum refertur, unde circumuolui coeptus est, etiam per puncta Z, H, Θ ueniet, et octaedrum sphaera comprehensum erit. iam dico, etiam data id sphaera comprehensum esse. nam quoniam $AK = KM$, et KE communis est, et rectos angulos comprehendunt, erit $AE = EM$ [I, 4]. et quoniam $\angle AEM$ rectus est (nam in semicirculo est) [III, 31], erit $AM^2 = 2AE^2$ [I, 47]. rursus quoniam $A\Gamma = \Gamma B$, erit $AB = 2B\Gamma$. uerum $AB : B\Gamma = AB^2 : B\Delta^2$ [VI, 8. V def. 9]. itaque $AB^2 = 2B\Delta^2$. demonstrauius autem, esse etiam $AM^2 = 2AE^2$. et

6. κορυφή P q. 7. ἰσόπλευρά b q. 8. περιεχομένων P, corr. m. 1. 11. ἐστίν L. 12. Post γάρ del. ἐστίν m. 1 P. αἱ] (alt.) α (ᾱ?) L. AK] KA b. 13. εἰσὶ V q, comp. b. 17. Z] E, Z P. 20. περιέχουσι V b q. 21. ἡ] om. q. 23. ἐστι] om. V, ἐστίν L. 24. τῆς] ε in ras. 2 litt. m. 1 P, τῇ q. 26. BΔ] Δ in ras. V. διπλάσιον — 27. BΔ] om. L, mg. m. 2 B.

ΔB τῷ ἀπὸ τῆς AE ἴση γὰρ κεῖται ἢ $E\Theta$ τῇ ΔB . ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τῷ ἀπὸ τῆς AM ἴση ἄρα ἢ AB τῇ AM . καὶ ἐστὶν ἢ AB ἢ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· ἢ AM ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δο-
5 θείσης σφαίρας διαμέτρῳ.

Περιείληπται ἄρα τὸ ὀκτάεδρον τῇ δοθείσῃ σφαίρᾳ. καὶ συναποδέδεικται, ὅτι ἢ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ ὀκτάεδρου πλευρᾶς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10

ιε'.

Κύβον συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ἥ καὶ τὴν πυραμίδα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἢ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς.

- 15 Ἐκκείσθω ἢ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἢ AB καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ ὥστε διπλὴν εἶναι τὴν $A\Gamma$ τῆς GB , καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ $A\Delta B$, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἢ $\Gamma\Delta$, καὶ ἐπεξεύχθω ἢ ΔB , καὶ ἐκκείσθω τετράγωνον
20 τὸ $EZH\Theta$ ἴσην ἔχον τὴν πλευρὰν τῇ ΔB , καὶ ἀπὸ τῶν E, Z, H, Θ τῷ τοῦ $EZH\Theta$ τετραγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ $EK, Z\Lambda, HM, \Theta N$, καὶ

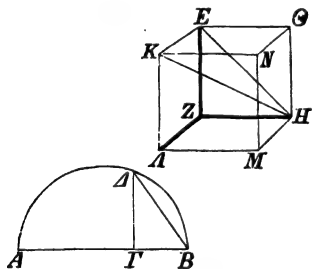
1. AE] supra scr. Δ m. 1 b. ΔB] supra scr. Δ m. 1 b. 2. ἐστὶν ἄρα P. 3. ἢ] (tert.) om. b. 4. ἐστὶν P. 7. ὅτι ἢ] corr. ex ὅτι b m. 1. 8. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. V, ὅπερ ἐστὶ B. 11. κύκλον q. συστήσασθαι P. 12. ἢ] om. b. τὴν πυραμίδα] τὰ πρότερον Theon (BVbq). 13. τριπλὴ Bq b, comp. V. ἐστὶν PB. 15. ἢ] (prius) postea add. m. 1 P. 19. ΔB] AB b. 20. ἔχων P, corr. m. 2. τῇ] ἐκείσθην Vq. 21. τῷ τοῦ $EZH\Theta$] supra m. 2 P. ἐπιπέδων B, corr. m. 2. 22. καί] seq. ras. 8 litt. V.

$AB^2 = AE^2$; supposuimus enim esse $E\Theta = AB$. itaque etiam $AB^2 = AM^2$. quare $AB = AM$. et AB diametrus est datae sphaerae. ergo AM diametro datae sphaerae aequalis est.

Ergo octaedrum data sphaera comprehensum est; et simul demonstrauius, diametrum sphaerae potentia duplo maiorem esse latere octaedri; quod erat demonstrandum.

XV.¹⁾

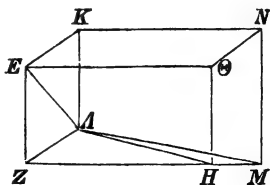
Cubum construere et sphaera comprehendere, sicut pyramidem, et demonstrare, diametrum sphaerae potentia triplo maiorem esse latere cubi.



Exponatur diametrus datae sphaerae AB et in Γ ita diuidatur, ut sit $A\Gamma = 2\Gamma B$ [VI, 10], et in AB semicirculus describatur $A\Delta B$, et a Γ ad AB perpendicularis ducatur $\Gamma\Delta$, et ducatur ΔB , et exponatur

quadratum $EZH\Theta$ latus rectae ΔB aequale habens, et in E, Z, H, Θ ad planum quadrati $EZH\Theta$ perpendiculares erigantur $EK, ZA, HM, \Theta N$, et a singulis

1) In B figura textus eadem est ac nostra, sed in mg. m. 1 haec figura descripta est additis uerbis: ἐν ἄλλῳ ὁ κύβος οὕτως.



ἀφηγήσθω ἀπὸ ἐκάστης τῶν EK , ZA , HM , ΘN μιᾶ
 τῶν EZ , ZH , $H\Theta$, ΘE ἴση ἐκάστη τῶν EK , ZA ,
 HM , ΘN , καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ KA , AM , MN , NK .
 κύβος ἄρα συνέσταται ὁ ZN ὑπὸ ἑξ τετραγώνων ἴσων
 5 περιεχόμενος. δεῖ δὲ αὐτὸν καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν
 τῇ δοθείσῃ καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος
 δυνάμει τριπλασία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου.

Ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ KH , EH . καὶ ἐπεὶ ὀρθή
 ἐστὶν ἡ ὑπὸ KEH γωνία διὰ τὸ καὶ τὴν KE ὀρθὴν
 10 εἶναι πρὸς τὸ EH ἐπίπεδον δηλαδὴ καὶ πρὸς τὴν EH
 εὐθεΐαν, τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς KH γραφόμενον ἡμικύκλιον
 ἦξει καὶ διὰ τοῦ E σημείου. πάλιν, ἐπεὶ ἡ HZ ὀρθή
 ἐστὶ πρὸς ἐκατέραν τῶν ZA , ZE , καὶ πρὸς τὸ ZK
 ἄρα ἐπίπεδον ὀρθή ἐστὶν ἡ HZ . ὥστε καὶ ἐὰν ἐπι-
 15 ζεύξωμεν τὴν ZK , ἡ HZ ὀρθὴ ἔσται καὶ πρὸς
 τὴν ZK . καὶ διὰ τοῦτο πάλιν τὸ ἐπὶ τῆς HK γρα-
 φόμενον ἡμικύκλιον ἦξει καὶ διὰ τοῦ Z . ὁμοίως καὶ
 διὰ τῶν λοιπῶν τοῦ κύβου σημείων ἦξει. ἐὰν δὲ
 μενούσης τῆς KH περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ
 20 αὐτὸ ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἔσται
 σφαῖρα περιειλημμένος ὁ κύβος. λέγω δὴ, ὅτι καὶ τῇ
 δοθείσῃ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ HZ τῇ ZE , καὶ ἐστὶν
 ὀρθὴ ἡ πρὸς τῷ Z γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς EH δι-
 πλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς EZ . ἴση δὲ ἡ EZ τῇ EK .
 25 τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς EH διπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς EK .
 ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν HE , EK , τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς HK ,
 τριπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς EK . καὶ ἐπεὶ τριπλα-
 σίων ἐστὶν ἡ AB τῆς $B\Gamma$, ὥς δὲ ἡ AB πρὸς τὴν

1. ἀφηγήσθωσαν B V b q. 4. συνίσταται V? ZN] N
 in ras. m. 1 P. 7. τριπλασίων P. 8. KH] corr. ex KN
 m. 1 B, KN q. 9. τὴν] corr. ex τό m. 1 q. 12. HZ] in

EK , ZA , HM , $\odot N$ uni rectarum EZ , ZH , $H\odot$, $\odot E$ aequales abscindantur singulae EK , ZA , HM , $\odot N$, et ducantur KA , AM , MN , NK . itaque cubus constructus est sex quadratis aequalibus comprehensus. oportet igitur eundem data sphaera comprehendere et demonstrare, diametrum sphaerae potentia triplo maiorem esse latere cubi.

ducantur enim KH , EH . et quoniam $\angle KEH$ rectus est, quia KE ad planum EH perpendicularis est et manifesto etiam ad rectam EH [XI def. 3], semicirculus in KH descriptus etiam per E punctum ueniet. rursus quoniam HZ ad utramque ZA , ZE perpendicularis est, HZ etiam ad planum ZK perpendicularis est [XI, 4]. quare ducta ZK recta HZ etiam ad ZK perpendicularis erit. qua de causa rursus semicirculus in HK descriptus etiam per Z ueniet. similiter etiam per reliqua puncta cubi ueniet. iam si manente KH semicirculus circumuolutus ad idem punctum refertur, unde circumuolui coeptus est, cubus sphaera comprehensus erit. iam dico, etiam data sphaera eum comprehensum esse. nam quoniam $HZ = ZE$, et angulus ad Z positus rectus est, erit $EH^2 = 2EZ^2$ [I, 47]. uerum $EZ = EK$. erit igitur $EH^2 = 2EK^2$. quare $HE^2 + EK^2 = 3EK^2 = HK^2$. et quoniam $AB = 3B\Gamma$, et $AB : B\Gamma = AB^2 : B\Delta^2$ [VI, 8. V def. 9],

ras. V. 13. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ P. ZA'' , ZE' b, ZE , ZA q et V (E et A in ras.) καί] supra m. 1 b. KZ q et in ras. V.
 14. HZ] in ras. V. καὶ ἄν q, καὶ B V b. 15. HZ] in ras. V.
 16. καί] om. q. 17. $\delta\mu\omega\iota\omega\varsigma$ δὲ καὶ V. 20. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\alpha\iota$ ἄρα b q.
 23. $\tau\tilde{\omega}$] τό V q. 26. $\tau\acute{\alpha}$] καὶ $\tau\acute{\alpha}$ V, $\tau\acute{\alpha}$ postea add. P.
 HE] EH q. EK] supra scr. N m. 1 b. $\tau\tilde{\eta}\varsigma$] τοῦ q.
 HK] H corr. ex E m. rec. B. 28. $B\Gamma$] corr. ex BK m. 1 B.

$B\Gamma$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$,
 τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς $B\Delta$.
 ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς HK τρὺς ἀπὸ τῆς KE τρι-
 πλάσιον. καὶ κεῖται ἴση ἡ KE τῇ ΔB . ἴση ἄρα καὶ
 5 ἡ KH τῇ AB . καὶ ἐστὶν ἡ AB τῆς δοθείσης σφαίρας
 διάμετρος· καὶ ἡ KH ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης
 σφαίρας διαμέτρῳ.

Τῇ δοθείσῃ ἄρα σφαίρᾳ περιείληπται ὁ κύβος· καὶ
 συναποδέδεικται, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει
 10 τριπλασίῳ ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ις'.

Εἰκοσάεδρον συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περι-
 λαβεῖν, ἣ καὶ τὰ προειρημένα σχήματα, καὶ δεῖ-
 ξαι, ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν
 15 ἡ καλουμένη ἐλάττων.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ
 AB καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ ὥστε τετραπλῆν εἶναι
 τὴν $A\Gamma$ τῆς ΓB , καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB ἡμι-
 κύκλιον τὸ $A\Delta B$, καὶ ἦχθω ἀπὸ τοῦ Γ τῇ AB πρὸς
 20 ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἡ $\Gamma\Delta$, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ
 ΔB , καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ $EZH\Theta K$, οὗ ἡ ἐκ τοῦ
 κέντρου ἴση ἔστω τῇ ΔB , καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν
 $EZH\Theta K$ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσο-
 γώνιον τὸ $EZH\Theta K$, καὶ τετμήσθωσαν αἱ EZ , ZH ,
 25 $H\Theta$, ΘK , KE περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Λ , M , N ,
 Ξ , O σημεία, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΛM , MN , $N\Xi$,
 ΞO , $O\Lambda$, EO . ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ $\Lambda MN\Xi O$

1. $B\Gamma$] corr. ex BK m. 1 B. 2. τριπλασίῳ P, corr.
 m. 1. 4. ΔB] AB corr. in $B\Delta$ B, AB supra scr. Δ m. 1 b,

erit $AB^2 = 3BA^2$. demonstrauius autem, esse etiam $HK^2 = 3KE^2$. et posuimus $KE = AB$. itaque etiam $KH = AB$. et AB diametrus est datae sphaerae. itaque etiam KH diametro datae sphaerae aequalis est.

Ergo cubus data sphaera comprehensus est; et simul demonstrauius, diametrum sphaerae potentia triplo maiorem esse latere cubi; quod erat demonstrandum.

XVI.

Icosaedrum construere et sphaera comprehendere, sicut figuras supra nominatas, et demonstrare, latus icosaedri irrationalem esse minorem quae uocatur.

Exponatur diametrus datae sphaerae AB et in Γ ita secetur, ut sit $A\Gamma = 4\Gamma B$ [VI, 10], et in AB semicirculus describatur $A\Delta B$, et a Γ ad AB perpendicularis ducatur recta $\Gamma\Delta$, et ducatur ΔB , et exponatur circulus $EZH\Theta K$, cuius radius aequalis sit rectae ΔB , et in circulum $EZH\Theta K$ pentagonum aequilaterum et aequi-angulum inscribatur $EZH\Theta K$ [IV, 11], et arcus EZ , ZH , $H\Theta$, ΘK , KE in punctis A , M , N , Ξ , O in binas partes aequales diuidantur, et ducantur AM , MN , $N\Xi$, ΞO , OA , EO . itaque pentagonum $AMN\Xi O$

* XVI. Pappus V p. 440, 19.

$B\Delta$ V q. 5. $\tau\eta\varsigma$] η $\tau\eta\varsigma$ q. 6. $\kappa\alpha\iota$] om. q. $\xi\sigma\tau\iota\nu$ B.
 $\tau\eta$] supra scr. m. 1 P. 8. $\delta\omicron\theta\epsilon\iota\sigma\eta$] om. P. 10. $\xi\sigma\tau\iota\nu$ P.
 12. $\sigma\upsilon\nu\sigma\tau\eta\sigma\alpha\theta\alpha\iota$ P, corr. m. rec. 16. $\sigma\varphi\alpha\iota\sigma\alpha\varsigma$] bis P,
 corr. m. 1. 17. $\omega\sigma\tau\omega$] $\omega\varsigma$ b. 19. $AB\Delta$ b. $\tau\eta$ AB] om.
 b. 21. $B\Delta$ e corr. b. $\xi\kappa\kappa\epsilon\iota\sigma\theta\omega$] alt. κ postea add. m. 1 P.
 η $\xi\kappa$ $\tau\omicron\upsilon$] bis P, corr. m. 1. 25. KE $\alpha\iota$ q. 26. O] postea
 ins. B. 27. EO] om. q, supra scr. B uel Θ b.

πεντάγωνον, καὶ δεκαγώνου ἡ ΕΟ εὐθεΐα. καὶ ἀν-
 εστάτωσαν ἀπὸ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ, Κ σημείων τῷ τοῦ
 κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεΐαι αἱ ΕΠ,
 ΖΡ, ΗΣ, ΘΤ, ΚΤ ἴσαι οὖσαι τῇ ἐκ τοῦ κέντρου
 5 τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΠΡ, ΡΣ,
 ΣΤ, ΤΤ, ΤΠ, ΠΛ, ΑΡ, ΡΜ, ΜΣ, ΣΝ, ΝΤ, ΤΞ,
 ΞΤ, ΤΟ, ΟΠ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρω τῶν ΕΠ, ΚΤ τῷ
 αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν, παράλληλος ἄρα ἐστίν
 ἡ ΕΠ τῇ ΚΤ. ἐστὶ δὲ αὐτῇ καὶ ἴση· αἱ δὲ τὰς ἴσας
 10 τε καὶ παραλλήλους ἐπιζευγνύουσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη
 εὐθεΐαι ἴσαι τε καὶ παράλληλοι εἰσιν. ἡ ΠΤ ἄρα τῇ
 ΕΚ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν. πενταγώνου δὲ
 ἰσοπλεύρου ἡ ΕΚ· πενταγώνου ἄρα ἰσοπλεύρου καὶ ἡ
 ΠΤ τοῦ εἰς τὸν ΕΖΗΘΚ κύκλον ἐγγραφομένου. διὰ
 15 τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐκάστη τῶν ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΤ
 πενταγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς τὸν ΕΖΗΘΚ
 κύκλον ἐγγραφομένου· ἰσόπλευρον ἄρα τὸ ΠΡΣΤΤ
 πεντάγωνον. καὶ ἐπεὶ ἑξαγώνου μὲν ἐστὶν ἡ ΠΕ,
 δεκαγώνου δὲ ἡ ΕΟ, καὶ ἐστὶν ὀρθὴ ἡ ὑπὲρ ΠΕΟ,
 20 πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΠΟ· ἡ γὰρ τοῦ πενταγώνου
 πλευρὰ δύναται τὴν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ
 δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.
 διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΟΤ πενταγώνου ἐστὶ πλευρά.
 ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΠΤ πενταγώνου· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ
 25 τὸ ΠΟΤ τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκαστον τῶν
 ΠΑΡ, ΡΜΣ, ΣΝΤ, ΤΞΤ ἰσόπλευρόν ἐστιν. καὶ
 ἐπεὶ πενταγώνου ἐδείχθη ἑκατέρω τῶν ΠΛ, ΠΟ, ἐστὶ

1. δεκαγώνον, mut. in δεκάγωνον ● ΟΕ Ρ. ἀν-
 εστάτω q. 4. οὖσαι] om. b. 7. ΕΠ] ΘΠ? Β, sed corr.
 8. ἐστὶ ΒVq, comp. b. 9. ἐστὶν ΡΒ. 10. ἐπὶ τὰ αὐτὰ
 μέρη ἐπιζευγνύουσαι V. 11. τε] om. q. 12. τέ ἐστὶ V.

aequilaterum est, et decagoni latus est recta EO . et in punctis E, Z, H, Θ, K ad planum circuli perpendiculares erigantur rectae $EP, ZP, H\Sigma, \Theta T, KT$ radio circuli $EZH\Theta K$ aequales, et ducantur $PP, P\Sigma, \Sigma T, TT, T\Pi, \Pi A, AP, PM, M\Sigma, \Sigma N, NT, T\Xi, \Xi T, TO, O\Pi$. et quoniam utraque EP, KT ad idem planum perpendicularis est, EP rectae KT parallela erit [XI, 6]. uerum etiam $EP = KT$. quae autem rectas aequales et parallelas ad easdem partes coniungunt rectae, inter se aequales et parallelae sunt [I, 33]. itaque PT rectae EK aequalis et parallela est. uerum EK latus pentagoni aequilateri est. quare etiam PT latus est pentagoni aequilateri in $EZH\Theta K$ circulo inscripti. eadem de causa etiam singulae $PP, P\Sigma, \Sigma T, TT$ latera sunt pentagoni aequilateri in $EZH\Theta K$ circulo inscripti. itaque pentagonum $PP\Sigma TT$ aequilaterum est. et quoniam hexagoni latus est PE , decagoni autem EO , et $\angle PEO$ rectus est, PO latus est pentagoni; nam quadratum lateris pentagoni quadratis laterum hexagoni et decagoni in eodem circulo inscriptorum aequale est [prop. X]. eadem de causa etiam OT latus est pentagoni. uerum etiam PT pentagoni est. triangulus igitur POT aequilaterus est. eadem de causa etiam singuli trianguli $PA P, PM\Sigma, \Sigma NT, T\Xi T$ aequilateri sunt. et quoniam demonstrauimus, utramque $\Pi A, \Pi O$ latus pentagoni

$\epsilon\sigma\tau\iota\nu$] om. V, $\epsilon\sigma\tau\iota$ q, comp. b. 13. $-\pi\lambda\epsilon\upsilon\rho\omicron\nu - \iota\sigma\omicron$] mg. m. 2 B. 15. $\delta\eta$] om. q. 16. $\epsilon\sigma\tau\iota$, supra add. $\pi\lambda\epsilon\nu\rho\alpha$, V. $EZH\Theta$ V. 17. $\alpha\rho\alpha \epsilon\sigma\tau\iota\nu$ P. 19. EO] $E\Theta$ b, OE q. 21. $\tau\epsilon$] om. q. 22. $\tau\omega\nu$] om. q. 23. TO q. 24. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$ B. 26. PME b. $T\Xi T$ $\tau\rho\iota\gamma\omega\nu\nu$ V. $\epsilon\sigma\tau\iota$ PV q, comp. b. 27. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$ B.

δὲ καὶ ἡ $\Lambda\Omega$ πενταγώνου, ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ $\Pi\Lambda\Omega$ τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν $\Lambda\rho\mu$, $\mu\sigma\eta$, $\eta\tau\epsilon$, $\epsilon\tau\omicron$ τριγώνων ἰσόπλευρόν ἐστιν. εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ $\epsilon\zeta\eta\theta\kappa$ κύκλου τὸ
 5 Φ σημείον· καὶ ἀπὸ τοῦ Φ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτω ἡ $\Phi\Omega$, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ ἑτέρα μέρη ὡς ἡ $\Phi\Psi$, καὶ ἀφηρησθῶ ἑξαγώνου μὲν ἡ $\Phi\chi$, δεκαγώνου δὲ ἑκατέρω τῶν $\Phi\Psi$, $\chi\Omega$, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $\Pi\Omega$, $\Pi\chi$, $\tau\Omega$, $\epsilon\Phi$, $\Lambda\Phi$, $\Lambda\Psi$,
 10 $\Psi\mu$. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρω τῶν $\Phi\chi$, $\Pi\epsilon$ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶν, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ $\Phi\chi$ τῇ $\Pi\epsilon$. εἰσὶ δὲ καὶ ἴσαι· καὶ αἱ $\epsilon\Phi$, $\Pi\chi$ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοι εἰσιν. ἑξαγώνου δὲ ἡ $\epsilon\Phi$ ·
 • ἑξαγώνου ἄρα καὶ ἡ $\Pi\chi$. καὶ ἐπεὶ ἑξαγώνου μὲν
 15 ἐστὶν ἡ $\Pi\chi$, δεκαγώνου δὲ ἡ $\chi\Omega$, καὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ $\Pi\chi\Omega$ γωνία, πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ $\Pi\Omega$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ $\tau\Omega$ πενταγώνου ἐστὶν, ἐπειδὴ περ, εἰς ἐπιζεύξωμεν τὰς $\Phi\kappa$, $\chi\tau$, ἴσαι καὶ ἀπεναντίον ἔσονται, καὶ ἐστὶν ἡ $\Phi\kappa$ ἐκ τοῦ κέντρου οὕσα ἑξα-
 • γώνου· ἑξαγώνου ἄρα καὶ ἡ $\chi\tau$. δεκαγώνου δὲ ἡ $\chi\Omega$, καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ $\tau\chi\Omega$ · πενταγώνου ἄρα ἡ $\tau\Omega$. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ $\Pi\tau$ πενταγώνου· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ $\Pi\tau\Omega$ τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μὲν εἰσιν αἱ $\Pi\rho$, $\rho\sigma$,
 25 $\sigma\tau$, $\tau\tau$ εὐθεῖαι, κορυφὴ δὲ τὸ Ω σημείον, ἰσόπλευρόν ἐστιν. πάλιν, ἐπεὶ ἑξαγώνου μὲν ἡ $\Phi\Lambda$, δεκαγώνου

2. $\Pi\Lambda\theta$ q. 3. τρίγωνον comp. b. 4. τοῦ κύκλου τοῦ $\epsilon\zeta\eta\theta\kappa$ V. 6. ἐκβεβλή q. 7. $\Psi\Phi$ b. 8. $\Phi\Psi$] Ψ in ras. m. 1 P. 9. $\Lambda\Phi$] $\Lambda\Psi$ P, $\Phi\Lambda$ q. $\Lambda\Psi$] $\Lambda\Phi$ P. 10. ΨM] in ras., dein add. $M\Phi$ V; $M\Psi$, del. m. 1 et m. rec. P. 11. ἐστὶν] comp. b, ἐστὶ P B V q. 12. Ante $\Phi\chi$ del.

esse, et AO et ipsa pentagoni est, triangulus ΠAO aequilaterus est. eadem de causa etiam singuli trianguli APM , $M\Xi N$, $NT\Xi$, ΞTO aequilateri sunt. iam sumatur centrum circuli $EZH\Theta K$ [III, 1] et sit punctum Φ . et in puncto Φ ad planum circuli perpendicularis erigatur $\Phi\Omega$ et ad alteram partem producat ut $\Phi\Psi$, et abscindatur latus hexagoni ΦX , decagoni autem utraque $\Phi\Psi$, $X\Omega$, et ducantur $\Pi\Omega$, ΠX , $T\Omega$, $E\Phi$, $A\Phi$, $A\Psi$, ΨM . et quoniam utraque ΦX , ΠE ad planum circuli perpendicularis est, ΦX rectae ΠE parallela est [XI, 6]. uerum etiam aequales sunt. quare etiam $E\Phi$, ΠX aequales et parallelae sunt [I, 33]. sed $E\Phi$ latus est hexagoni. quare etiam ΠX hexagoni est. et quoniam ΠX latus est hexagoni, $X\Omega$ autem decagoni, et $\angle \Pi X\Omega$ rectus est [XI def. 3. I, 29], $\Pi\Omega$ latus est pentagoni [prop. X]. eadem de causa etiam $T\Omega$ pentagoni est, quoniam, si duxerimus ΦK , XT , aequales erunt et inter se oppositae, et ΦK radius aequalis est lateri hexagoni; quare etiam XT hexagoni est. decagoni autem $X\Omega$, et $\angle TX\Omega$ rectus est; quare $T\Omega$ pentagoni est. uerum etiam ΠT pentagoni est. itaque triangulus $\Pi T\Omega$ aequilaterus est. eadem de causa igitur etiam reliqui trianguli, quorum bases sunt rectae ΠP , $P\Sigma$, ΣT , TT , uertex autem punctum Ω , singuli aequilateri sunt. rursus quoniam hexagoni est ΦA , decagoni

1 litt. P. $\epsilon\lambda\sigma\iota\nu$ PB. $X\Pi$ P. 15. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$] (prius) $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ P, $\epsilon\lambda\sigma\iota\nu$ q. 19. ΦX B. 21. $T\Omega$] ΩT P. 22. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ B. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$] om. V, $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ P. 23. $\kappa\alpha\iota$] om. bq, supra m. 2 B. 24. $\acute{\omega}\nu$] supra m. 2 B. 26. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ Pq, comp. b. $\mu\acute{\epsilon}\nu$] $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ q, $\mu\acute{\epsilon}\nu \acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ b. $A\Phi$ q.

δὲ ἡ $\Phi\Psi$, καὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ $\Lambda\Phi\Psi$ γωνία, πεντα-
 γώνου ἄρα ἐστὶν ἡ $\Lambda\Psi$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐὰν ἐπι-
 ξεύσωμεν τὴν $M\Phi$ οὖσαν ἐξαγώνου, συνάγεται καὶ ἡ
 $M\Psi$ πενταγώνου. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΛM πενταγώνου·
 5 ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ $\Lambda M\Psi$ τρίγωνον. ὁμοίως δὴ
 δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων,
 ὧν βάσεις μὲν εἰσιν αἱ MN , $NΞ$, $ΞO$, $O\Lambda$, κορυφὴ
 δὲ τὸ Ψ σημείον, ἰσόπλευρόν ἐστὶν. συνέσταται ἄρα
 εἰκοσάεδρον ὑπὸ εἰκοσι τριγώνων ἰσοπλεύρων περι-
 10 εχόμενον.

Λεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ
 καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστὶν
 ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Ἐπεὶ γὰρ ἐξαγώνου ἐστὶν ἡ ΦX , δεκαγώνου δὲ ἡ
 15 $X\Omega$, ἡ $\Phi\Omega$ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται
 κατὰ τὸ X , καὶ τὸ μείζον αὐτῆς τμημά ἐστὶν ἡ ΦX .
 ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $\Omega\Phi$ πρὸς τὴν ΦX , οὕτως ἡ ΦX
 πρὸς τὴν $X\Omega$. ἴση δὲ ἡ μὲν ΦX τῇ ΦE , ἡ δὲ $X\Omega$
 τῇ $\Phi\Psi$. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $\Omega\Phi$ πρὸς τὴν ΦE , οὕτως
 20 ἡ $E\Phi$ πρὸς τὴν $\Phi\Psi$. καὶ εἰσιν ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ $\Omega\Phi E$,
 $E\Phi\Psi$ γωνίαι· ἐὰν ἄρα ἐπιξεύσωμεν τὴν $E\Omega$ εὐθεῖαν,
 ὀρθὴ ἔσται ἡ ὑπὸ $\Psi E\Omega$ γωνία διὰ τὴν ὁμοιότητα
 τῶν $\Psi E\Omega$, $\Phi E\Omega$ τριγώνων. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐπεὶ
 ἐστὶν ὡς ἡ $\Omega\Phi$ πρὸς τὴν ΦX , οὕτως ἡ ΦX πρὸς
 25 τὴν $X\Omega$, ἴση δὲ ἡ μὲν $\Omega\Phi$ τῇ ΨX , ἡ δὲ ΦX τῇ
 $X\Pi$, ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΨX πρὸς τὴν $X\Pi$, οὕτως ἡ
 ΠX πρὸς τὴν $X\Omega$. καὶ διὰ τοῦτο πάλιν ἐὰν ἐπι-
 ξεύσωμεν τὴν $\Pi\Psi$, ὀρθὴ ἔσται ἡ πρὸς τῷ Π γωνία·

3. $\Phi M P$. 4. $\Psi M P$. ἔστιν PB . ἡ] *supra* scr. m.
 1 b. 5. ἐστὶ] om. V, ἐστίν P . $\Psi \Lambda M P$. δὴ] om. V.

autem $\Phi\Psi$, et $\angle A\Phi\Psi$ rectus est, $A\Psi$ pentagoni est [prop. X]. eadem de causa ducta $M\Phi$, quae latus est hexagoni, concludimus, etiam $M\Psi$ pentagoni esse. uerum etiam AM pentagoni est. itaque triangulus $AM\Psi$ aequilaterus est. similiter demonstrabimus, etiam reliquos triangulos, quorum bases sint MN , $N\Xi$, ΞO , $O\Lambda$, uertex autem punctum Ψ , singulos aequilateros esse. ergo icosaedrum constructum est uiginti triangulis aequilateris comprehensum.

oportet igitur etiam data id sphaera comprehendere et demonstrare, latus icosaedri irrationalem esse minorem quae uocatur.

nam quoniam hexagoni est ΦX , decagoni autem $X\Omega$, recta $\Phi\Omega$ in X secundum rationem extremam ac mediam diuisa est, et maior pars eius est ΦX [prop. IX]. itaque $\Omega\Phi : \Phi X = \Phi X : X\Omega$. uerum $\Phi X = \Phi E$, $X\Omega = \Phi\Psi$. quare $\Omega\Phi : \Phi E = E\Phi : \Phi\Psi$. et anguli $\Omega\Phi E$, $E\Phi\Psi$ recti sunt. ergo ducta $E\Omega$ $\angle \Psi E\Omega$ rectus erit, quia $\triangle \Psi E\Omega \sim \triangle \Phi E\Omega$ [VI, 8]. eadem de causa quoniam est $\Omega\Phi : \Phi X = \Phi X : X\Omega$, et $\Omega\Phi = \Psi X$, $\Phi X = X\Pi$, erit $\Psi X : X\Pi = \Pi X : X\Omega$. quare rursus ducta $\Pi\Psi$ angulus ad Π positus rectus

6. λοιπῶν] : supra scr. m. 1 P. 7. ὧν] mg. m. 2 B.
 μέν] om. B. 8. ἐστὶ Pq, comp. b. 14. ἐστὶν] μέν V.
 18. ΦE] ΦA Theon (BVbq), item lin. 19. 20. $E\Phi$] $A\Phi$
 BVbq (A e corr. m. 2 B). $\Omega\Phi A$ Vbq, A e corr. m. 2 B.
 21. $A\Phi\Psi$ BVbq. $A\Omega$ BVbq. 22. $\Psi A\Omega$ BVbq.
 23. $\Psi A\Omega$ BVbq. $\Phi A\Omega$ BVbq. Post τριγώνων add. τὸ
 ἄρα ἐπὶ τῆς $\Psi\Omega$ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ A
 Vbq, mg. m. 2 B (καὶ om. q). 24. ἡ] (prius) in ras. m. 1 P.
 25. ΨX] $X\Psi$ q. 27. τοῦτο] τὰ αὐτά q; γρ. διὰ τὰ
 αὐτά mg. m. 1 b. εἰ ἐπιζεύξομεν q. 28. τῷ] τὸ q.

- τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς $\Psi\Omega$ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἦξει καὶ διὰ τοῦ Π . καὶ ἐὰν μενούσης τῆς $\Psi\Omega$ περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἦρξατο φέρεσθαι, ἦξει καὶ διὰ τοῦ Π καὶ τῶν λοιπῶν
- 5 σημείων τοῦ εἰκοσαέδρου, καὶ ἔσται σφαῖρα περιειλημμένον τὸ εἰκοσαέδρον. λέγω δὴ, ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ. τετμήσθω γὰρ ἡ ΦX δίχα κατὰ τὸ A' . καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ $\Phi\Omega$ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ X , καὶ τὸ ἐλασσον αὐτῆς τμημὰ ἐστὶν ἡ ΩX ,
- 10 ἡ ἄρα ΩX προσλαβοῦσα τὴν ἡμίσειαν τοῦ μείζονος τμήματος τὴν XA' πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τοῦ μείζονος τμήματος· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $\Omega A'$ τοῦ ἀπὸ τῆς $A'X$. καὶ ἐστὶ τῆς μὲν $\Omega A'$ διπλῇ ἡ $\Omega\Psi$, τῆς δὲ $A'X$ διπλῇ ἡ ΦX .
- 15 πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $\Omega\Psi$ τοῦ ἀπὸ τῆς $X\Phi$. καὶ ἐπεὶ τετραπλῇ ἐστὶν ἡ $A\Gamma$ τῆς ΓB , πενταπλῇ ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῆς $B\Gamma$. ὥς δὲ ἡ AB πρὸς τὴν $B\Gamma$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$ · πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς
- 20 $B\Delta$. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $\Omega\Psi$ πενταπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΦX . καὶ ἐστὶν ἴση ἡ ΔB τῇ ΦX . ἕκαστέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ $EZH\Theta K$ κύκλου· ἴση ἄρα καὶ ἡ AB τῇ $\Psi\Omega$. καὶ ἐστὶν ἡ AB ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· καὶ
- 25 ἡ $\Psi\Omega$ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ. τῇ ἄρα δοθείσῃ σφαίρᾳ περιείληπται τὸ εἰκοσαέδρον.
- Λέγω δὴ, ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων. ἐπεὶ γὰρ ρητὴ ἐστὶν ἡ

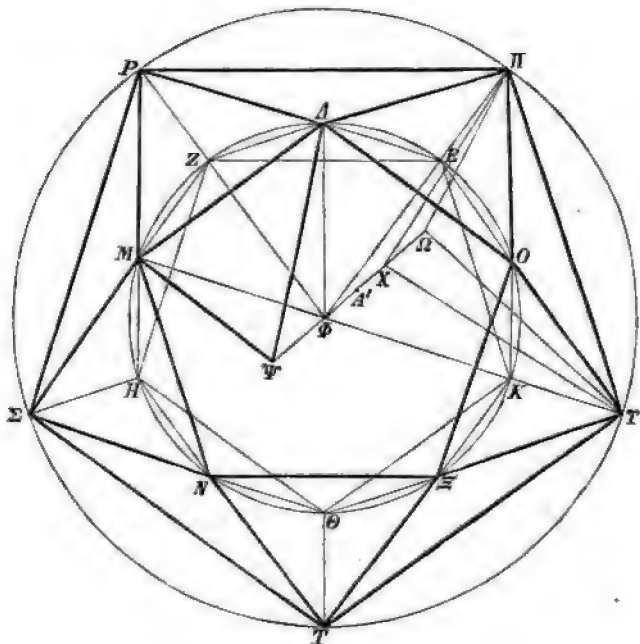
2. Π] supra scr. Ψ b. 3. ὅθεν καὶ q. 7. A'] $\overline{\alpha}$ P, $\overline{\alpha}\chi$ q, α mat. in α V, α Bb (in fig. α B). 9. ἐλάττων V. αὐτῆς] ἐστὶ b, αὐτῆς ἐστὶ Bq. ἐστὶν] om. Bbq.

erit [VI, 8]. itaque semicirculus in $\Psi\Omega$ descriptus etiam per Π ueniet [I, 31]. et si manente $\Psi\Omega$ semicirculus circumuolutus rursus ad idem punctum refertur, unde circumuolui coeptus est, et per Π et per reliqua puncta icosaedri ueniet, et icosaedrum sphaera comprehensum erit. iam dico, data id sphaera comprehensum esse. nam ΦX in A' in duas partes aequales diuidatur. et quoniam recta $\Phi\Omega$ secundum rationem extremam ac mediam in X diuisa est, et minor eius pars est ΩX , erit $A'\Omega^2 = 5A'X^2$ [prop. III]. est autem $\Omega\Psi = 2\Omega A'$, $\Phi X = 2A'X$. itaque $\Omega\Psi^2 = 5X\Phi^2$. et quoniam $A\Gamma = 4\Gamma B$, erit $AB = 5B\Gamma$. uerum $AB : B\Gamma = AB^2 : B\Delta^2$ [VI, 8. V def. 9]. itaque $AB^2 = 5B\Delta^2$. demonstrauimus autem, esse etiam $\Omega\Psi^2 = 5\Phi X^2$. et $\Delta B = \Phi X$; nam utraque earum radio circuli $EZH\Theta K$ aequalis est. itaque etiam $AB = \Psi\Omega$. et AB diametrus est datae sphaerae. quare etiam $\Psi\Omega$ diametro datae sphaerae aequalis est. ergo icosaedrum data sphaera comprehensum est.

iam dico, latus icosaedri irrationalem esse minorem quae uocatur. nam quoniam diametrus sphaerae

ή] τό bq. 10. ή άρα ΩX] om. V, ή ΩX άρα q. „ A' et A non discernunt Bbq, in V α in α corr. 13. ωα b, ωας (ς eras.) B. A'X] ωαχ (ς eras.) B, χα V, χα q, άχ b. και — 14. ΩA'] om. q. 13. έστιν PB. 14. ΩA'] in ras. V, αως (ς eras.) B. διπλή δε της ΩA ή ΩΨ q et b mg. m. 1 (γρ.). XΦ V. 16. XΦ] e corr. V. τετραπλασιών BVbq. έστιν] om. q. πενταπλασιών V et, supra scr. η m. 1, b. 17. έστιν] om. V. BΓ] in ras., dein add. έστιν V, ΓB B. AB — 18. της (prius)] bis P, corr. m. 1. 19. έστιν B. 20. δε] om. b. 21. έση] om. V. ΔB έση V. 22. έστιν PB. του κύκλου του EZHΘK V. 23. EZHΘ q. και] om. q. της ΩΨ b. 25. έστιν PB. 28. ελάσσων BVq.

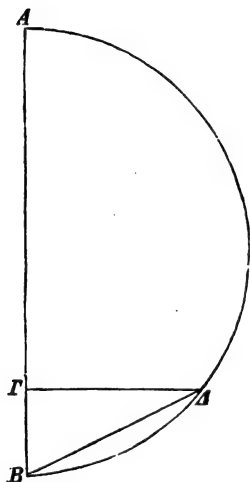
- τῆς σφαίρας διάμετρος, καὶ ἐστὶ δυνάμει πενταπλασίων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ $EZH\Theta K$ κύκλου, ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ $EZH\Theta K$ κύκλου· ὥστε καὶ ἡ διάμετρος αὐτοῦ ῥητὴ ἐστίν. ἐὰν δὲ εἰς κύκλον
 5 ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον



ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων. ἡ δὲ τοῦ $EZH\Theta K$ πενταγώνου πλευρὰ ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐστίν. ἡ ἄρα τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων.

1. ἐστίν B. τετραπλασίων b. 2. $EZH\Theta$ q. 3. ἐστίν PB.
 7. ἐλάττων V. ἡ δὲ ἡ b. 8. ἡ ἄρα ἡ b. 9. ἐλάττων P.

rationalis est et potentia quintuplo maior est radio circuli $EZH\Theta K$, etiam radius circuli $EZH\Theta K$ rationalis est. quare etiam diametrus eius rationalis est. sin in circulum rationalem diametrum habentem pentagonum aequilaterum inscribitur, latus pentagoni irra-



tionalis est minor quae uocatur [prop. XI]. uerum latus pentagoni $EZH\Theta K$ latus est icosaedri. ergo latus icosaedri irrationalis est minor quae uocatur.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διά-
μετρος δυνάμει πενταπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου
τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται, καὶ
5 ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος σύγκειται ἐκ τε τῆς τοῦ
ἐξαγώνου καὶ δύο τῶν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν
αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιζ'.

Δωδεκάεδρον συστήσασθαι καὶ σφαῖρα περι-
10 λαβεῖν, ἥ καὶ τὰ προειρημένα σχήματα, καὶ
δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός
ἐστίν ἢ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐκκείσθωσαν τοῦ προειρημένου κύβου δύο ἐπίπεδα
πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοις τὰ $ΑΒΓΔ$, $ΓΒΕΖ$, καὶ τετμή-
15 σθω ἐκάστη τῶν $ΑΒ$, $ΒΓ$, $ΓΔ$, $ΔΑ$, $ΕΖ$, $ΕΒ$, $ΖΓ$
πλευρῶν δίχα κατὰ τὰ $Η$, $Θ$, $Κ$, $Λ$, $Μ$, $Ν$, $Ξ$, καὶ
ἐπεξεύχθωσαν αἱ $ΗΚ$, $ΘΛ$, $ΜΞ$, $ΝΞ$, καὶ τετμήσθω
ἐκάστη τῶν $ΝΟ$, $ΟΞ$, $ΘΠ$ ἄκρον καὶ μέσον λόγον
κατὰ τὰ P , $Σ$, T σημεία, καὶ ἔστω αὐτῶν μείζονα
20 τμήματα τὰ $ΡΟ$, $ΟΣ$, $ΤΠ$, καὶ ἀνεστάτωσαν ἀπὸ τῶν
 P , $Σ$, T σημείων τοῖς τοῦ κύβου ἐπιπέδοις πρὸς ὀρθὰς
ἐπὶ τὰ ἐκτὸς μέρη τοῦ κύβου αἱ $ΡΤ$, $ΣΦ$, $ΤΧ$, καὶ
κείσθωσαν ἴσαι ταῖς $ΡΟ$, $ΟΣ$, $ΤΠ$, καὶ ἐπεξεύχθωσαν
αἱ $ΤΒ$, $ΒΧ$, $ΧΓ$, $ΓΦ$, $ΦΤ$. λέγω, ὅτι τὸ $ΤΒΧΓΦ$
25 πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἐνὶ ἐπιπέδῳ καὶ ἐτι

1. πόρισμα] om. b q.

3. ἐστίν B.

5. τοῦ] om. B V.

6. τῶν δύο V.

7. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. B V.

8. ιζ'] om. q.

9. συστήσασθαι P, corr. m. rec.

10. προειρημένα] πρότερον q; mg. m. 1: γρ. τὰ πρότερον b.

13. κύβου] κύκλου comp. b.

16. Ξ σημεία V.

17. τετμή-

Corollarium.

Hinc manifestum est, diametrum sphaerae potentia quintuplam esse radii circuli, in quo icosaedrum descriptum est, et diametrum sphaerae ex latere hexagoni et duobus lateribus decagoni in eodem circulo inscriptorum compositam esse. — quod erat demonstrandum.

XVII.

Dodecaedrum construere et sphaera comprehendere, sicut figuras, quas supra nominauimus, et demonstrare, latus dodecagoni irrationalem esse apotomen quae uocatur.

exponantur duo plana cubi, quem nominauimus [prop. XV] inter se perpendicularia $AB\Gamma A$, ΓBEZ , et singula latera AB , $B\Gamma$, ΓA , AA , EZ , EB , $Z\Gamma$ in binas partes aequales diuidantur in punctis H , Θ , K , A , M , N , Ξ , et ducantur HK , ΘA , $M\Theta$, $N\Xi$, et singulae NO , $O\Xi$, $\Theta\Pi$ secundum rationem extremam ac mediam in punctis P , Σ , T secantur, et maiores earum partes sint PO , $O\Sigma$, $T\Pi$, et in punctis P , Σ , T ad plana cubi perpendiculares in partes exteriores cubi erigantur PT , $\Sigma\Phi$, TX , et ponatur $PT = PO$, $\Sigma\Phi = O\Sigma$, $TX = T\Pi$, et ducantur TB , BX , $X\Gamma$, $\Gamma\Phi$, ΦT . dico, pentagonum $TBX\Gamma\Phi$ et aequilaterum esse et in uno plano positum et praeterea aequiangulum.

$\sigma\theta\omega\sigma\alpha\nu$ $\alpha\iota$ NO V. 18. $\Theta\Pi$] Π e corr. m. rec. P; $\Theta\Pi$ $\epsilon\upsilon\theta\epsilon\iota\alpha\iota$ V. 21. $\kappa\upsilon\beta\omicron\nu$] $\kappa\upsilon\kappa\lambda\omicron\nu$ comp. b. 22. $\kappa\upsilon\beta\omicron\nu$] in ras. V. PT] P eras. V. 23. $\epsilon\kappa\kappa\epsilon\iota\sigma\theta\omega\sigma\alpha\nu$ P. 24. BX , $X\Gamma$] X , $X\Gamma$ in ras. m. 2 V. $\Gamma\Phi$] mg. m. 2 V, ΓX B. $TBX\Gamma\Phi$] pro $X\Gamma$ in q X corr. ex Γ m. 1. 25. $\epsilon\pi\iota\pi\epsilon\delta\phi$] in ras. m. 2 V.

ἰσογώνιον ἐστίν. ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ PB , ΣB , ΦB .
 καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ NO ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται
 κατὰ τὸ P , καὶ τὸ μείζον τμημά ἐστίν ἡ PO , τὰ ἄρα
 ἀπὸ τῶν ON , NP τριπλάσια ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς PO .
 5 Ἰση δὲ ἡ μὲν ON τῇ NB , ἡ δὲ OP τῇ PT . τὰ ἄρα
 ἀπὸ τῶν BN , NP τριπλάσια ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς PT .
 τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν BN , NP τὸ ἀπὸ τῆς BP ἐστὶν ἴσον·
 τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς BP τριπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς PT .
 ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν BP , PT τετραπλάσια ἐστὶ τοῦ ἀπὸ
 10 τῆς PT . τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν BP , PT ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ
 τῆς BT . τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς BT τετραπλάσιόν ἐστὶ τοῦ
 ἀπὸ τῆς TP . διπλῇ ἄρα ἐστὶν ἡ BT τῆς PT . ἐστὶ
 δὲ καὶ ἡ ΦT τῆς TP διπλῇ, ἐπειδὴ περ καὶ ἡ ΣP τῆς
 OP , τουτέστι τῆς PT , ἐστὶ διπλῇ. Ἰση ἄρα ἡ BT τῇ
 15 $T\Phi$. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἐκάστη τῶν BX ,
 $X\Gamma$, $\Gamma\Phi$ ἐκατέρα τῶν BT , $T\Phi$ ἐστὶν ἴση. ἰσόπλευρον
 ἄρα ἐστὶ τὸ $BT\Phi\Gamma X$ πεντάγωνον. λέγω δὴ, ὅτι καὶ
 ἐν ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ O ἐκατέρα
 τῶν PT , $\Sigma\Phi$ παράλληλος ἐπὶ τὰ ἐκτὸς τοῦ κύβου
 20 μέρη ἡ $O\Psi$, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $\Psi\Theta$, ΘX . λέγω,
 ὅτι ἡ $\Psi\Theta X$ εὐθεῖα ἐστίν. ἐπεὶ γὰρ ἡ $\Theta\Pi$ ἄκρον καὶ
 μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ T , καὶ τὸ μείζον αὐτῆς
 τμημά ἐστίν ἡ ΠT , ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $\Theta\Pi$ πρὸς τὴν
 ΠT , οὕτως ἡ ΠT πρὸς τὴν $T\Theta$. Ἰση δὲ ἡ μὲν $\Theta\Pi$
 25 τῇ ΘO , ἡ δὲ ΠT ἐκατέρα τῶν TX , $O\Psi$. ἐστὶν ἄρα
 ὡς ἡ ΘO πρὸς τὴν $O\Psi$, οὕτως ἡ XT πρὸς τὴν $T\Theta$.
 καὶ ἐστὶ παράλληλος ἡ μὲν ΘO τῇ TX . ἐκατέρα γὰρ
 αὐτῶν τῷ $B\Delta$ ἐπιπέδῳ πρὸς ὁρθάς ἐστίν. ἡ δὲ $T\Theta$
 τῇ $O\Psi$. ἐκατέρα γὰρ αὐτῶν τῷ BZ ἐπιπέδῳ πρὸς

3. μείζον αὐτῆς V . PO] in ras. V . τὰ] τό $q.$.

4. NP] HP B . τριπλάσια] mut. in τριπλάσιον $m.$ 1 $q.$

ducantur enim PB , ΣB , ΦB . et quoniam recta NO secundum rationem extremam ac mediam diuisa est in P , et maior pars eius est PO , erunt $ON^2 + NP^2 = 3PO^2$ [prop. IV]. uerum $ON = NB$, $OP = PT$. itaque $BN^2 + NP^2 = 3PT^2$. est autem $BP^2 = BN^2 + NP^2$ [I, 47]. itaque $BP^2 = 3PT^2$. quare $BP^2 + PT^2 = 4PT^2$. uerum $BT^2 = BP^2 + PT^2$ [I, 47]. itaque $BT^2 = 4PT^2$. quare $BT = 2PT$. est autem etiam $\Phi T = 2TP$, quoniam etiam $\Sigma P = 2OP = 2PT$. itaque $BT = T\Phi$. similiter demonstrabimus, esse etiam singulas BX , $X\Gamma$, $\Gamma\Phi$ utrique BT , $T\Phi$ aequales. ergo pentagonum $BT\Phi\Gamma X$ aequilaterum est. iam dico, idem in uno plano positum esse. ab O enim utrique PT , $\Sigma\Phi$ parallela in partes exteriores cubi ducatur $O\Psi$, et ducantur $\Psi\Theta$, ΘX . dico, $\Psi\Theta X$ rectam esse. nam quoniam $\Theta\Pi$ in T secundum rationem extremam ac mediam diuisa est, et maior pars eius est ΠT , erit $\Theta\Pi : \Pi T = \Pi T : T\Theta$. uerum $\Theta\Pi = \Theta O$, $\Pi T = TX = O\Psi$. itaque $\Theta O : O\Psi = XT : T\Theta$. et ΘO rectae TX parallela est (nam utraque earum ad planum $B\Delta$ perpendicularis est) [XI, 6] et $T\Theta$ rectae $O\Psi$ (nam utraque earum ad planum BZ perpendicu-

-
- ἔστιν P. 5. PT] $P\Gamma$ q. 6. NP] P e corr. V.
 9. ἔστιν P. 10. PT] (alt.) $P\Gamma$ q. 11. ἄρα] bis P, postea
 corr. m. 1. 12. ἔστιν] om. V. ἔστιν B. 13. TP διπλῇ]
 in ras. V. ΣP] supra ras. m. 2 q. 14. PT] corr. ex
 $P\Gamma$ m. 1 q. ἔστιν B. 15. καί] om. q. $B\bar{X}$] ΦX q.
 18. ἔστιν] ἔ ins. m. 1 q. ἡ $\chi\theta\omega$] ἡ e corr. m. 1 b.
 20. μέρη τοῦ κύβου V. $\Psi\Theta$] Θ e corr. m. 1 b. 22. λό-
 γον] om. b. 23. τῇ ΠT] ΠT in ras. V, ΠT Bb.
 24. $\Theta\Pi$] $\Pi\Theta$ P.

ὀρθάς ἐστιν. ἐὰν δὲ δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν
γωνίαν, ὥς τὰ $\Psi\Theta\Theta$, $\Theta\Gamma\chi$, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς
δυσὶν ἀνάλογον ἔχοντα, ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν
πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ εὐθεῖαι ἐπ'
5 εὐθείας ἔσονται· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ $\Psi\Theta$ τῇ $\Theta\chi$.
πᾶσα δὲ εὐθεῖα ἐν ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· ἐν ἐνὶ ἄρα ἐπι-
πέδῳ ἐστὶ τὸ $\Gamma B \chi \Gamma \Phi$ πεντάγωνον.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἰσογώνιον ἐστὶν.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ NO ἄκρον καὶ μέσον
10 λόγον τέτμηται κατὰ τὸ P , καὶ τὸ μείζον τμημὰ ἐστὶν
ἡ OP [ἐστὶν ἄρα ὥς συναμφοτέρος ἡ NO , OP πρὸς
τὴν ON , οὕτως ἡ NO πρὸς τὴν OP], ἴση δὲ ἡ OP
τῇ $O\Sigma$ [ἐστὶν ἄρα ὥς ἡ ΣN πρὸς τὴν NO , οὕτως
ἡ NO πρὸς τὴν $O\Sigma$], ἡ $N\Sigma$ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον
15 λόγον τέτμηται κατὰ τὸ O , καὶ τὸ μείζον τμημὰ ἐστὶν
ἡ NO . τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $N\Sigma$, ΣO τριπλάσιά ἐστι τοῦ
ἀπὸ τῆς NO . ἴση δὲ ἡ μὲν NO τῇ NB , ἡ δὲ $O\Sigma$
τῇ $\Sigma\Phi$. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $N\Sigma$, $\Sigma\Phi$ τετραπλάσιον ἐστὶ
πλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς NB . ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν $\Phi\Sigma$,
20 ΣN , NB τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς NB . τοῖς
δὲ ἀπὸ τῶν ΣN , NB ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΣB . τὰ
ἄρα ἀπὸ τῶν $B\Sigma$, $\Sigma\Phi$, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς $B\Phi$
(ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ $\Phi\Sigma B$ γωνία), τετραπλάσιον ἐστὶ
τοῦ ἀπὸ τῆς NB . διπλῇ ἄρα ἐστὶν ἡ ΦB τῆς BN .
25 ἐστὶ δὲ καὶ ἡ $B\Gamma$ τῆς BN διπλῇ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ
 $B\Phi$ τῇ $B\Gamma$. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ $B\Gamma$, $\Gamma\Phi$ δυσὶ ταῖς $B\chi$,
 $\chi\Gamma$ ἴσαι εἰσὶν, καὶ βάσις ἡ $B\Phi$ βάσει τῇ $B\Gamma$ ἴση,

2. $\Theta\Gamma\chi$] $OT\chi B$, et b supra scr. Θ m. 1. 3. δυσὶ
(δύο q) πλευραῖς Theon (BVb q). πλευρὰς αὐτῶν q. 4. πλε-
ρὰς] om. V. καί] om. P. 5. $O\chi$ b. 6. ἄρα] γὰρ ἐστὶν
q. ἐπιπέδῳ ἄρα B. 7. ἐστὶ] om. q; ἐστὶν P. $\Gamma B \chi \Gamma \Phi$]

laris est). sin duo trianguli in uno angulo coniunguntur ut $\Psi O\Theta$, ΘTX duo latera duobus lateribus proportionalia habentes, ita ut latera correspondentia etiam parallela sint, reliqua latera in eadem recta erunt posita [VI, 32]. itaque $\Psi\Theta$, ΘX in eadem recta positae erunt. omnis autem recta in uno plano posita est [XI, 1]. ergo pentagonum $\Upsilon B X \Gamma \Phi$ in uno plano positum est.

iam dico, idem aequiangulum esse.

nam quoniam recta NO in P secundum rationem extremam ac mediam diuisa est, et maior pars eius est OP , et $OP = O\Sigma$, recta $N\Sigma$ in O secundum rationem extremam ac mediam diuisa est, et maior pars est NO [prop. V].¹⁾ itaque $N\Sigma^2 + \Sigma O^2 = 3NO^2$ [prop. IV]. uerum $NO = NB$, $O\Sigma = \Sigma\Phi$. itaque $N\Sigma^2 + \Sigma\Phi^2 = 3NB^2$. quare $\Phi\Sigma^2 + \Sigma N^2 + NB^2 = 4NB^2$. sed $\Sigma B^2 = \Sigma N^2 + NB^2$ [I, 47]. itaque $B\Sigma^2 + \Sigma\Phi^2 = 4NB^2 = B\Phi^2$ (nam $\angle \Phi\Sigma B$ rectus est) [XI def. 3]. itaque $\Phi B = 2BN$. uerum etiam $B\Gamma = 2BN$. quare $B\Phi = B\Gamma$. et quoniam duae rectae BT , $\Upsilon\Phi$ duabus BX , $X\Gamma$ aequales sunt, et

1) Forma prop. V, ad quam apertissime hic respicit Euclides, docet, uerba $\epsilon\sigma\tau\iota\nu \acute{\alpha}\rho\alpha - OP$ lin. 11—12 et $\epsilon\sigma\tau\iota\nu \acute{\alpha}\rho\alpha - O\Sigma$ lin. 13—14 superuacua et subditiua esse. nec satis est cum ed. Basil. et Gregorio pro OP lin. 12 $O\Sigma$ scribere.

T eras. V, post Φ ras.; $BX\Gamma\Phi T$ τὸ $B\Gamma X\Phi T$ q. 9. $\epsilon\upsilon\theta\epsilon\iota$, postea add. α m. 1 P. 13. $\tau\eta$] $\tau\eta\varsigma$ b. 17. ON bis V. 18. $\tau\eta$] corr. ex $\tau\eta\varsigma$ m. 1 P. 19. $\acute{\omega}\sigma\tau\epsilon$] corr. ex $\acute{\omega}\sigma\alpha$ m. 1 b; $\acute{\omega}\sigma\tau\epsilon$ καὶ V. $\tau\acute{\alpha}$] om. q. 20. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$ P. 21. ΣN] N in ras. m. 1 b. ΣB] $B\Sigma$ in ras. m. 1 P, $\tilde{B}\Sigma B$ V. 22. $B\Sigma$] ΣB b. $\tau\omicron\upsilon\tau\epsilon\iota\sigma\tau\iota\nu$ P. ΦB V. 24. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$] om. V. 25. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$ PB. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$] om. V q. 26. $B\Phi$] corr. ex ΦB V. 27. $\epsilon\lambda\omicron\iota$ V b q. ΦB V q.

- γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΤΦ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΧΓ ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΤΦΓ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΒΧΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΧΓ, ΒΤΦ, ΤΦΓ τρεῖς γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. ἐὰν δὲ πενταγώνου
 5 ἰσοπλεύρου αἱ τρεῖς γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ᾤσιν, ἰσογώνιον ἔσται τὸ πεντάγωνον· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΤΦΓΧ πεντάγωνον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τὸ ἄρα ΒΤΦΓΧ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν ἐστι καὶ ἰσογώνιον, καὶ ἐστὶν ἐπὶ μιᾷ τοῦ κύβου πλευρᾷς τῆς
 10 ΒΓ. ἐὰν ἄρα ἐφ' ἐκάστης τῶν τοῦ κύβου δώδεκα πλευρῶν τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν, συσταθήσεται τι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ δώδεκα πενταγόνων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον, ὃ καλεῖται δωδεκάεδρον.
 Δεῖ δὲ αὐτὸ καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ
 15 καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.
 Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΨΟ, καὶ ἔστω ἡ ΨΩ· συμβάλλει ἄρα ἡ ΟΩ τῇ τοῦ κύβου διαμέτρῳ, καὶ δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας· τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ παρα-
 20 τελεύτῳ θεωρήματι τοῦ ἐνδεκάτου βιβλίου. τεμνέτωσαν κατὰ τὸ Ω· τὸ Ω ἄρα κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον, καὶ ἡ ΩΟ ἡμίσεια τῆς πλευρᾷς τοῦ κύβου. ἐπεξέχθω δὲ ἡ ΤΩ. καὶ ἐπεί

2. δείχθηξομεν, sed χθη del., b. 3. ἐστὶν PB. ΒΧΓ] (prius) X in ras. m. 1 P. 5. ἰσόπλευρον q. ᾤσιν] corr. ex εἰσὶν m. 1 P. 6. ἔσται] ἐστὶ BV. 7. ΒΤΦΧΓ q. δέ] om. q. 8. τέ ἐστὶν P. 9. κύβον] κύκλου b. 13. τε] om. P. ὃ καλεῖται δωδεκάεδρον] om. Theon (BVbq). 17. ΨΩ] ΨΟ q. συμβαλλεῖ P. 18. ΟΩ] ΘΩ B, ΨΩ Vb, ΨΟ q. κύβον] κύκλου comp. b, corr. in E. 19. τεμνουσιν, corr. m. 1, P. παρατελευταίῳ q. 21. τό] (alt.) καὶ τό q. 22. ΟΩ V, ΩΘ B. Ante τῆς del. ἐστὶ m. 1 P. 23. ΓΩ q.

basis $B\Phi$ basi $B\Gamma$ aequalis, erit [I, 8] $\angle B\Gamma\Phi = B\chi\Gamma$. similiter demonstrabimus, esse etiam

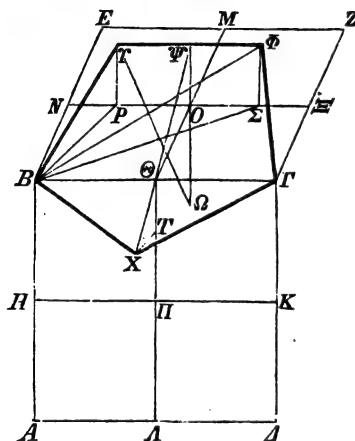
$$\angle \Gamma\Phi\Gamma = B\chi\Gamma.$$

itaque tres anguli $B\chi\Gamma$, $B\Gamma\Phi$, $\Gamma\Phi\Gamma$ inter se aequales sunt. sin pentagoni aequilateri tres anguli inter se

aequales sunt, pentagonum aequiangulum erit [prop. VII]. ergo pentagonum $B\Gamma\Phi\Gamma\chi$ aequiangulum est. demonstrauimus autem, idem aequilaterum esse. ergo pentagonum

$B\Gamma\Phi\Gamma\chi$

aequilaterum est et aequiangulum, et in uno latere cubi $B\Gamma$ constructum est. itaque si in singulis duodecim late-



ribus cubi eadem comparauerimus, figura quaedam solida construetur duodecim pentagonis aequilateris et aequiangulis comprehensa, quae uocatur dodecaedrum.

oportet igitur idem data sphaera comprehendere et demonstrare, latus dodecaedri irrationalem esse apotomen quae uocatur.

producatur enim ΨO , et fiat $\Psi\Omega$. itaque $O\Omega$ cum diametro cubi concurrit, et inter se in binas partes aequales secant; hoc enim in paenultimo theoremate undecimi libri demonstratum est [XI, 38]. secant in Ω . Ω igitur centrum est sphaerae cubum comprehendens, et ΩO dimidia lateris cubi. ducatur $T\Omega$. et

εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΝΣ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται
κατὰ τὸ Ο, καὶ τὸ μείζον αὐτῆς τμημά ἐστιν ἡ ΝΟ,
τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΝΣ, ΣΟ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ
τῆς ΝΟ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΝΣ τῇ ΨΩ, ἐπειδήπερ καὶ
5 ἡ μὲν ΝΟ τῇ ΟΩ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΨΟ τῇ ΟΣ. ἀλλὰ
μὴν καὶ ἡ ΟΣ τῇ ΨΤ, ἐπεὶ καὶ τῇ ΡΟ· τὰ ἄρα ἀπὸ
τῶν ΩΨ, ΨΤ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΟ. τοῖς
δὲ ἀπὸ τῶν ΩΨ, ΨΤ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΤΩ· τὸ
ἄρα ἀπὸ τῆς ΤΩ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΟ.
10 ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περι-
λαμβανούσης τὸν κύβον δυνάμει τριπλασίων τῆς ἡμι-
σείας τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς· προδέδεικται γὰρ κύβον
συστήσασθαι καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ
τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς
15 πλευρᾶς τοῦ κύβου. εἰ δὲ ὅλη τῆς ὅλης, καὶ [ἡ]
ἡμίσεια τῆς ἡμισείας· καὶ ἐστὶν ἡ ΝΟ ἡμίσεια τῆς
τοῦ κύβου πλευρᾶς· ἡ ἄρα ΤΩ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ
κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον.
καὶ ἐστὶ τὸ Ω κέντρον τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβα-
20 νούσης τὸν κύβον· τὸ Γ ἄρα σημεῖον πρὸς τῇ ἐπι-
φανείᾳ ἐστὶ τῆς σφαίρας. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι καὶ
ἐκάστη τῶν λοιπῶν γωνιῶν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τῇ
ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τῆς σφαίρας· περιελλήπται ἄρα τὸ δω-
δεκάεδρον τῇ δοθείσῃ σφαίρᾳ.

1. NE B, corr. m. 1. 3. ἐστὶν P. 4. NO] NE B.
9. ἄρα] om. q. τοῦ] τό q. 10. ἐστὶν PB. τῆς] (alt.)
bis b. 12. τῆς] ins. m. 1 V. δέδεικται q. 14. δυνάμει] om. P.
διπλασίων B, corr. m. rec. ἐστὶν PB.
15. εἰ] ἡ V. ἡ ὅλη Bq. ἡ] postea ins. m. 1 P,
εἰ q. 16. ἡμίσεια — NO] bis P, postea corr. m. 1.
17. ἐστὶν P. 19. ἐστὶν B. 20. σημεῖον ἄρα q.
22. τὴν ἐπιφάνειαν q, v bis supra scr. m. 1 b. 23. ἐστὶν P.

quoniam recta $N\Sigma$ in O secundum rationem extremam ac mediam diuisa est, et maior pars eius est NO , erunt

$$N\Sigma^2 + \Sigma O^2 = 3NO^2 \text{ [prop. IV].}$$

sed $N\Sigma = \Psi\Omega$, quoniam

$$NO = O\Omega, \quad \Psi O = O\Sigma.$$

et praeterea

$$O\Sigma = \Psi T,$$

quoniam $O\Sigma = PO$. itaque

$$\Omega\Psi^2 + \Psi T^2 = 3NO^2.$$

uerum

$$T\Omega^2 = \Omega\Psi^2 + \Psi T^2 \text{ [I, 47].}$$

itaque

$$T\Omega^2 = 3NO^2.$$

sed radius sphaerae cubum comprehendens et ipse potentia triplo maior est dimidio latere cubi; nam antea explicauimus, quomodo cubus construendus sit et sphaera comprehendendus, et quo modo demonstrandum sit, diametrum sphaerae potentia triplo maiorem esse latere cubi [prop. XV]. sin tota triplo maior est tota, etiam dimidia triplo maior est dimidia; et NO dimidia est lateris cubi. itaque $T\Omega$ radio sphaerae cubum comprehendens aequalis est. et Ω centrum est sphaerae cubum comprehendens. quare punctum T ad superficiem sphaerae positum est. iam similiter demonstrabimus, etiam reliquos angulos dodecaedri singulos ad superficiem sphaerae positos esse. ergo dodecaedrum data sphaera comprehensum est.

Λέγω δὴ, ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἢ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐπεὶ γὰρ τῆς ΝΟ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μείζον τμημά ἐστιν ἢ ΡΟ, τῆς δὲ ΟΞ ἄκρον
 5 καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μείζον τμημά ἐστιν ἢ ΟΣ, ὅλης ἄρα τῆς ΝΞ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μείζον τμημά ἐστιν ἢ ΡΣ. οἷον ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἢ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΡ, ἢ ΟΡ πρὸς τὴν ΡΝ, καὶ τὰ διπλάσια· τὰ γὰρ μέρη τοῖς ἰσάκεις πολλαπλασίοις
 10 τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ὡς ἄρα ἢ ΝΞ πρὸς τὴν ΡΣ, οὕτως ἢ ΡΣ πρὸς συναμφοτέρου τὴν ΝΡ, ΣΞ. μείζων δὲ ἢ ΝΞ τῆς ΡΣ· μείζων ἄρα καὶ ἢ ΡΣ συναμφοτέρου τῆς ΝΡ, ΣΞ· ἢ ΝΞ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μείζον αὐτῆς τμημά ἐστιν ἢ
 15 ΡΣ. ἴση δὲ ἢ ΡΣ τῇ ΤΦ· τῆς ἄρα ΝΞ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μείζον τμημά ἐστιν ἢ ΤΦ. καὶ ἐπεὶ ῥητὴ ἐστὶν ἢ τῆς σφαίρας διάμετρος καὶ ἐστὶ δυνάμει τριπλασίων τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς, ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἢ ΝΞ πλευρὰ οὕσα τοῦ κύβου. ἐὰν δὲ ῥητὴ
 20 γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἐκάτερον τῶν τμημάτων ἄλογός ἐστιν ἀποτομή.

Ἡ ΤΦ ἄρα πλευρὰ οὕσα τοῦ δωδεκαέδρου ἄλογός ἐστιν ἀποτομή.

1. ἢ] om. q. 3. Post τῆς ins. μέν m. rec. P. τεμνο-
 μένης P; item lin. 5. 6. τετμημένης bq. 8. ΝΟ] ΟΝ B.
 ΟΡ] (prius) e corr. V; dein del. καὶ τὰ διπλάσια.
 9. ἰσάκεις] ὡσάντως B. 10. ὡς] καὶ ὡς b. 15. ΝΞ ἄρα q.
 16. τετμημένης bq. ΦΤΡ. 17. ἐστὶν PB. De scholio
 quodam in P hic adscripto u. app. 20. γραμμῇ] ᾧ μὴ b,
 corr. m. 1; εὐθεῖα γραμμὴ q. τέτμηται q. ἐκάτερα q.
 21. ἐστὶν ἢ καλουμένη V bq, e corr. m. 2 B. 23. ἐστὶν ἢ
 καλουμένη V bq.

iam dico, latus dodecaedri irrationalem esse apotomen quae uocatur. nam quoniam PO maior pars est rectae NO secundum rationem extremam ac mediam diuisae, et $O\Sigma$ maior pars est rectae $O\Xi$ secundum rationem extremam ac mediam diuisae, $P\Sigma$ maior pars est totius rectae $N\Xi$ secundum rationem extremam ac mediam diuisae. quoniam enim¹⁾ $NO : OP = OP : PN$, etiam dupla eandem rationem habebunt; nam partes eandem rationem habent quam aequae multiplicia [V, 15]. itaque $N\Xi : P\Sigma = P\Sigma : NP + \Sigma\Xi$. sed $N\Xi > P\Sigma$. itaque etiam $P\Sigma > NP + \Sigma\Xi$ [V, 14]. ergo $N\Xi$ secundum rationem extremam ac mediam diuisa est, et maior pars eius est $P\Sigma$. sed $P\Sigma = T\Phi$. itaque $T\Phi$ maior pars est rectae $N\Xi$ secundum rationem extremam ac mediam diuisae. et quoniam diametrus sphaerae rationalis est et latere cubi triplo maior est potentia, etiam $N\Xi$, quae latus est cubi, rationalis est. sin recta rationalis secundum rationem extremam ac mediam diuiditur, utraque pars irrationalis est apotome [prop. VI]. ergo $T\Phi$, quae latus est dodecaedri, irrationalis est apotome.

1) Uocabulo *ολον* lin. 7 uidetur significari, rectam $N\Xi$ non proprie secundum rationem extremam ac mediam diuisam esse, quia pars minor ex NP , $\Sigma\Xi$ diiunctis composita est. quod hic parum refert, quia maiore parte sola utimur. sed fortasse totus locus *ολον* lin. 7 — *ἐστιν ἡ* $P\Sigma$ lin. 14 subditius est.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μείζον τμημά ἐστιν ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρά. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5

ιη'.

Τὰς πλευρὰς τῶν πέντε σχημάτων ἐκθέσθαι καὶ συγκρίναι πρὸς ἀλλήλας.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ AB , καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ ὥστε ἴσην εἶναι τὴν
 10 $A\Gamma$ τῇ ΓB , κατὰ δὲ τὸ Δ ὥστε διπλασίονα εἶναι τὴν $A\Delta$ τῆς ΔB , καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ AEB , καὶ ἀπὸ τῶν Γ , Δ τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ΓE , ΔZ , καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ AZ , ZB , EB . καὶ ἐπεὶ διπλῇ ἐστιν ἡ $A\Delta$ τῆς ΔB ,
 15 τριπλῇ ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῆς $B\Delta$. ἀναστρέψαντι ἡμιολία ἄρα ἐστὶν ἡ BA τῆς $A\Delta$. ὥς δὲ ἡ BA πρὸς τὴν $A\Delta$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς BA πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AZ · ἰσογώνιον γάρ ἐστι τὸ AZB τρίγωνον τῷ $AZ\Delta$ τριγώνῳ· ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς BA τοῦ ἀπὸ
 20 τῆς AZ . ἐστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος. καὶ ἐστὶν ἡ AB ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος· ἡ AZ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ πλευρᾷ τῆς πυραμίδος.

Πάλιν, ἐπεὶ διπλασίων ἐστὶν ἡ $A\Delta$ τῆς ΔB , τριπλῇ
 25 ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῆς $B\Delta$. ὥς δὲ ἡ AB πρὸς τὴν $B\Delta$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BZ · τριπλά-

1. πόρισμα] comp. mg. m 1 PBVq, om. b. 3. τετμη-
 μένης bq. 4. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. Vq, o) — b. 5. ιη']
 om. Bbq. 9. κατὰ μὲν BV. 10. τῇ] corr. ex τῆς B.

Corollarium.

Hinc manifestum est, latus dodecaedri maiorem esse partem lateris cubi secundum rationem extremam ac mediam diuisi. — quod erat demonstrandum.

XVIII.

Latera quinque figurarum exponere et inter se comparare.

Exponatur diametrus datae sphaerae AB et in Γ ita secetur, ut sit $A\Gamma = \Gamma B$, in Δ autem ita, ut sit $A\Delta = 2\Delta B$, et in AB semicirculus describatur AEB , et in Γ, Δ ad AB perpendiculares ducantur $\Gamma E, \Delta Z$, et ducantur AZ, ZB, EB . et quoniam est $A\Delta = 2\Delta B$, erit $AB = 3\Delta B$. itaque conuertendo $BA = \frac{3}{2}A\Delta$. sed $BA:A\Delta = BA^2:AZ^2$ [V def. 9]; nam $AZB \sim AZ\Delta$ [VI, 8].

itaque $BA^2 = \frac{3}{2}AZ^2$. uerum etiam diametrus sphaerae potentia lateris pyramidis sesquialtera est [prop. XIII]. et AB diametrus sphaerae est. ergo AZ lateri pyramidis aequalis est.

rursus quoniam $A\Delta = 2\Delta B$, erit $AB = 3\Delta B$. sed $AB:\Delta B = AB^2:BZ^2$ [VI, 8. V def. 9]. itaque

ΓB] Γ corr. ex Δ V. $\delta\iota\pi\lambda\alpha\sigma\iota\omicron\nu$ P, α supra scr. m. 1.
 12. Δ] e corr. m. 1 b. 14. Ante AZ del. $\Gamma E, \Delta Z$ m. 1 P.
 AZ, ZE, EB B; ZB, EB, AZ q. 15. $\tau\epsilon\iota\pi\lambda\alpha\sigma\iota\alpha$ q, mg.
 m. 1 $\tau\epsilon\iota\pi\lambda\alpha\sigma\iota\alpha$ γφ. b. $B\Delta$] ΔB B. 18. ABZ b.
 20. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ PB. 22. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ P. 23. $\tau\eta\varsigma$] om. Vq. 24. $\tau\epsilon\iota\pi\lambda\eta$] $\tau\epsilon\iota\pi\lambda\alpha\sigma\iota\omega\nu$ P. 26. ZB Bbq.

σιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς BZ . ἐστὶ δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίον τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς. καὶ ἐστὶν ἡ AB ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος· ἡ BZ ἄρα τοῦ κύβου ἐστὶ πλευρά.

- 5 Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΑΓ$ τῇ $ΓΒ$, διπλῇ ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῆς $ΒΓ$. ὥς δὲ ἡ AB πρὸς τὴν $ΒΓ$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BE · διπλασίον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς BE . ἐστὶ δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίον τῆς τοῦ
10 ὀκταέδρου πλευρᾶς. καὶ ἐστὶν ἡ AB ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· ἡ BE ἄρα τοῦ ὀκταέδρου ἐστὶ πλευρά.

- Ἦχθω δὲ ἀπὸ τοῦ A σημείου τῇ AB εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ AH , καὶ κείσθω ἡ AH ἴση τῇ AB , καὶ
15 ἐπεζεύχθω ἡ $HΓ$, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὴν AB κάθετος ἦχθω ἡ ΘK . καὶ ἐπεὶ διπλῇ ἐστὶν ἡ HA τῆς $ΑΓ$ · ἴση γὰρ ἡ HA τῇ AB · ὥς δὲ ἡ HA πρὸς τὴν $ΑΓ$, οὕτως ἡ ΘK πρὸς τὴν $KΓ$, διπλῇ ἄρα καὶ ἡ ΘK τῆς $KΓ$. τετραπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘK τοῦ ἀπὸ
20 τῆς $KΓ$ · τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΘK , $KΓ$, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $\Theta Γ$, πενταπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς $KΓ$. ἴση δὲ ἡ $\Theta Γ$ τῇ $ΓΒ$ · πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΓ$ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΓΚ$. καὶ ἐπεὶ διπλῇ ἐστὶν ἡ AB τῆς $ΓΒ$, ὥν ἡ $ΑΔ$ τῆς $ΔΒ$ ἐστὶ διπλῇ, λοιπὴ ἄρα ἡ $ΒΔ$
25 λοιπῆς τῆς $ΔΓ$ ἐστὶ διπλῇ. τριπλῇ ἄρα ἡ $ΒΓ$ τῆς $ΓΔ$ · ἐνναπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΓ$ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΓΔ$. πενταπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΓ$ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΓΚ$ · μείζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $ΓΚ$ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΓΔ$.

1. ἐστὶν P. ZB B. ἔστιν PB. 3. κύκλου P, corr. m. rec. 8. ἐστὶ] ἐστὶν P, om. V. τοῦ] πρὸς τό q.

$AB^2 = 3BZ^2$. uerum etiam diametrus sphaerae latere cubi potentia triplo maior est [prop. XV]. et AB diametrus sphaerae est. ergo BZ latus cubi est.

et quoniam $AG = GB$, erit $AB = 2BG$. sed $AB : BG = AB^2 : BE^2$ [VI, 8. V def. 9]. itaque $AB^2 = 2BE^2$. uerum etiam diametrus sphaerae latere octaedri potentia duplo maior est [prop. XIV]. et AB diametrus est datae sphaerae. ergo BE latus octaedri est.

iam ab A puncto ad rectam AB perpendicularis ducatur AH , et ponatur $AH = AB$, et ducatur HG , et a Θ ad AB perpendicularis ducatur ΘK . et quoniam $HA = 2AG$ (nam $HA = AB$), et $HA : AG = \Theta K : KG$ [VI, 4], erit etiam $\Theta K = 2KG$. itaque $\Theta K^2 = 4KG^2$. quare $\Theta K^2 + KG^2 = 5KG^2 = \Theta G^2$ [I, 47]. uerum $\Theta G = GB$. itaque $BG^2 = 5GK^2$. et quoniam $AB = 2GB$, quarum $AA = 2AB$, erit $BA = 2AG$. itaque $BG = 3GA$. quare $BG^2 = 9GA^2$. sed $BG^2 = 5GK^2$. itaque $GK^2 > GA^2$. quare etiam

ἔστιν PB. 9. τριπλασίον b. 11. BE] E corr. ex Θ m.
 rec. P. πλευρά ἐστι q. 14. τῇ AB ἴση ἢ AH V.
 16. AH V. 17. HA] AH q. τῇ] τῆς P. 18. καί] om.
 q. 19. ἐστίν P. 20. ἐστίν P. 21. ἐστίν PB. 24. GB]
 BG V. ἐστίν PB. BA] supra scr. A b. 25. AG] GA
 P. 26. GA] in hoc vocab. des. b,λείπει φύλλα ἰς mg.

μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ $\Gamma\text{Κ}$ τῆς $\Gamma\Delta$. κείσθω τῇ $\Gamma\text{Κ}$ ἴση ἡ $\Gamma\Lambda$, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ $\Lambda\text{Μ}$, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ MB . καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς $B\Gamma$ τοῦ ἀπὸ τῆς $\Gamma\text{Κ}$, καὶ ἐστι τῆς
 5 μὲν $B\Gamma$ διπλῇ ἡ AB , τῆς δὲ $\Gamma\text{Κ}$ διπλῇ ἡ $Κ\Lambda$, πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς $Κ\Lambda$. ἐστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλασίων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἅφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται. καὶ ἐστὶν ἡ AB ἡ τῆς
 10 σφαίρας διάμετρος· ἡ $Κ\Lambda$ ἄρα ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶ τοῦ κύκλου, ἅφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται· ἡ $Κ\Lambda$ ἄρα ἑξαγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ εἰρημένου κύκλου. καὶ ἐπεὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος σύγκειται ἐκ τε τῆς τοῦ ἑξαγώνου καὶ δύο τῶν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς
 15 τὸν εἰρημένον κύκλον ἐγγραφομένων, καὶ ἐστὶν ἡ μὲν AB ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, ἡ δὲ $Κ\Lambda$ ἑξαγώνου πλευρά, καὶ ἴση ἡ AK τῇ AB , ἑκάτερα ἄρα τῶν AK , AB δεκαγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ ἐγγραφομένου εἰς τὸν κύκλον, ἅφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται. καὶ
 20 ἐπεὶ δεκαγώνου μὲν ἡ AB , ἑξαγώνου δὲ ἡ $Μ\Lambda$ · ἴση γάρ ἐστι τῇ $Κ\Lambda$, ἐπεὶ καὶ τῇ $\Theta\text{Κ}$ · ἴσον γὰρ ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου· καὶ ἐστὶν ἑκάτερα τῶν $\Theta\text{Κ}$, $Κ\Lambda$ διπλασίων τῆς $Κ\Gamma$ · πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ MB . ἡ δὲ τοῦ πενταγώνου ἐστὶν ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου· εἰκο-
 25 σαέδρου ἄρα ἐστὶν ἡ MB .

Καὶ ἐπεὶ ἡ ZB κύβου ἐστὶ πλευρά, τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ N , καὶ ἔστω μείζων τμήμα τὸ NB · ἡ NB ἄρα δωδεκαέδρου ἐστὶ πλευρά.

1. μείζων V. ἐστὶν ἄρα q. $\Gamma\text{Κ}$] $Κ\Gamma$ V. $\Gamma\text{Κ}$] corr.
 ex $Κ\Gamma$ V. 4. ἐστὶν P. $Κ\Gamma$ V. ἐστὶν P. 7. ἐστὶν

$\Gamma K > \Gamma A$. ponatur $\Gamma A = \Gamma K$, et ab A ad AB perpendicularis ducatur AM , et ducatur MB . et quoniam $B\Gamma^2 = 5\Gamma K^2$, et $AB = 2B\Gamma$, $KA = 2\Gamma K$, erit $AB^2 = 5KA^2$. uerum etiam diameter sphaerae potentia quintuplo maior est radio circuli, in quo icosaedrum constructum est [prop. XVI coroll.]. et AB diameter sphaerae est. ergo KA radius est circuli, in quo icosaedrum constructum est. KA igitur latus est hexagoni in circulo illo inscripti [IV, 15 coroll.]. et quoniam diameter sphaerae ex latere hexagoni et duobus lateribus decagoni in circulo illo inscriptorum composita est [prop. XVI coroll.], et AB diameter est sphaerae, KA autem latus hexagoni, et $AK = AB$, utraque AK , AB latus est decagoni in circulo inscripti, in quo icosaedrum constructum est. et quoniam AB latus est decagoni, hexagoni autem MA (nam $MA = KA$, quia $MA = \Theta K$; aequali enim spatia a centro distant; et $\Theta K = KA = 2K\Gamma$), pentagoni est MB [prop. X. I, 47]. uerum latus pentagoni est icosaedri [prop. XVI]. ergo MB latus est icosaedri.

et quoniam ZB latus cubi est, secundum rationem extremam ac mediam diuidatur in N , et maior pars sit NB . ergo NB latus est dodecaedri [prop. XVII coroll.].

PB. 9. $AB \eta]$ AB P. 10. $\epsilon\kappa]$ $\eta \epsilon\kappa$ q. $\epsilon\sigma\tau\iota\nu$ P.
 12. $\epsilon\lambda\eta\mu\acute{\epsilon}\nu\omicron\nu \kappa\upsilon\kappa\lambda\omicron\nu]$ $\acute{\epsilon}\nu \tau\tilde{\omega} \epsilon\lambda\eta\mu\acute{\epsilon}\nu\omega \kappa\upsilon\kappa\lambda\omega$ m. 2 V.
 13. $\tau\eta\varsigma \sigma\phi\alpha\iota\tau\alpha\varsigma \eta$ V. 15. $\acute{\alpha}\nu\alpha\gamma\gamma\alpha\phi\omicron\mu\acute{\epsilon}\nu\omega\nu$ q. 21. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$
 P. $\Theta K]$ $K\Theta$ q. 23. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu]$ om. V. 24. $\eta \tau\omicron\upsilon \epsilon\lambda\kappa\omicron\sigma\alpha\acute{\epsilon}\delta\rho\omicron\nu]$ mg. m. 2 B, in text. del. $\eta \tau\omicron\upsilon$. 26. BZ q.
 $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$ P.

Καὶ ἐπεὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἐδείχθη τῆς μὲν
 ΑΖ πλευρᾶς τῆς πυραμίδος δυνάμει ἡμιολία, τῆς δὲ
 τοῦ ὀκταέδρου τῆς ΒΕ δυνάμει διπλασίων, τῆς δὲ τοῦ
 κύβου τῆς ΖΒ δυνάμει τριπλασίων, οἷων ἄρα ἡ τῆς
 5 σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἕξ, τοιούτων ἡ μὲν τῆς
 πυραμίδος τεσσάρων, ἡ δὲ τοῦ ὀκταέδρου τριῶν, ἡ δὲ
 τοῦ κύβου δύο. ἡ μὲν ἄρα τῆς πυραμίδος πλευρὰ
 τῆς μὲν τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς δυνάμει ἐστὶν ἐπί-
 τριτος, τῆς δὲ τοῦ κύβου δυνάμει διπλῇ, ἡ δὲ τοῦ
 10 ὀκταέδρου τῆς τοῦ κύβου δυνάμει ἡμιολία. αἱ μὲν οὖν
 εἰρημέναι τῶν τριῶν σχημάτων πλευραί, λέγω δὴ πυρα-
 μίδος καὶ ὀκταέδρου καὶ κύβου, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν
 ἐν λόγοις ῥητοῖς. αἱ δὲ λοιπαὶ δύο, λέγω δὴ ἡ τε
 τοῦ εἰκοσαέδρου καὶ ἡ τοῦ δωδεκαέδρου, οὔτε πρὸς
 15 ἀλλήλας οὔτε πρὸς τὰς προειρημένας εἰσὶν ἐν λόγοις
 ῥητοῖς· ἄλλοι γάρ εἰσιν, ἡ μὲν ἐλάττων, ἡ δὲ ἀποτομή.

Ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἡ ΜΒ
 τῆς τοῦ δωδεκαέδρου τῆς ΝΒ, δεῖξομεν οὕτως.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ ΖΔΒ τριγώνον τῷ
 20 ΖΑΒ τριγώνῳ, ἀνάλογόν ἐστιν ὥς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν
 ΒΖ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΒΑ. καὶ ἐπεὶ τρεῖς εὐθεῖαι
 ἀνάλογόν εἰσιν, ἐστὶν ὥς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην,
 οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας·
 ἐστὶν ἄρα ὥς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς
 25 ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ· ἀνάπαλιν ἄρα ὥς ἡ ΑΒ
 πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ πρὸς τὸ ἀπὸ

1. Ante ἐδείχθη del. ε P. 4. ἡ] om. P. 6. τεσσάρων
 τῶν q. 7. μέν] corr. ex με m. 1 P. 9. τῆς] τῇ q.
 10. τῆς] om. q. 11. πλευραί] om. q. 13. τε] om. P.
 14. ἡ] om. q. 15. τὰς προ-] om. q. 16. ἄλλοι γάρ εἰσιν]
 om. V. 17. ὅτι δέ ΒV. ΜΒ] M e corr. V. 18. ΝΒ]

et quoniam demonstrauiamus, diametrum sphaerae AZ lateris pyramidis potentia sesquialteram esse, BE autem latere octaedri potentia duplo maiorem, ZB autem latere cubi potentia triplo maiorem, quarum magnitudinum sex aequalis est potentia diametrus sphaerae, earum quattuor aequale est latus pyramidis, tribus octaedri, duabus cubi. itaque latus pyramidis potentia supersesquitercium est lateris octaedri, latere autem cubi potentia duplo maius, latus autem octaedri lateris cubi potentia sesquialterum est. ergo latera, quae nominauiamus, trium illarum figurarum, scilicet pyramidis, octaedri, cubi, inter se rationes habent rationales. reliqua uero duo, scilicet icosaedri et dodecaedri, neque inter se neque ad ea, quae supra nominauiamus, rationes rationales habent; nam irrationales sunt, alterum minor [prop. XVI], alterum apotome [prop. XVII].

Latus icosaedri MB maius esse latere dodecaedri NB , sic demonstrabimus.

quoniam enim trianguli ZAB et ZAB aequianguli sunt [VI, 8], erit $AB : BZ = BZ : BA$ [VI, 4]. et quoniam tres rectae proportionales sunt, erit ut prima ad tertiam, ita quadratum primae ad quadratum tertiae [V def. 9].¹⁾ itaque $AB : BA = AB^2 : BZ^2$. e con-

1) Miramur, cur haec definitio hoc loco omnibus uerbis citetur, praesertim forma parum Euclidea, cum tamen antea in hac ipsa propositione toties tacite sit usurpata. itaque puto, uerba καὶ ἐπεὶ lin. 21 — δευτέρως lin. 23 subditiua esse.

N e corr. V. 19. ἐπεὶ] in ras. m. 1 P. ἐστὶν P.
 $\angle ZB B$, $ZB \angle$ q. 21. BZ] (prius) supra scr. BA m. 1 B.
 BZ] ZB P. 26. ZB] BZ q.

τῆς $B\Delta$. *τριπλῆ δὲ ἡ AB τῆς $B\Delta$ · τριπλάσιον ἄρα*
τὸ ἀπὸ τῆς ZB τοῦ ἀπὸ τῆς $B\Delta$. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ
τῆς $A\Delta$ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔB τετραπλάσιον· διπλῆ γὰρ ἡ
 $A\Delta$ τῆς ΔB · μείζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $A\Delta$ τοῦ ἀπὸ τῆς
 5 *ZB · μείζων ἄρα ἡ $A\Delta$ τῆς ZB · πολλῶ ἄρα ἡ $A\Delta$*
τῆς ZB μείζων ἐστίν. καὶ τῆς μὲν AA ἄκρον καὶ
μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μείζον τμημά ἐστιν ἡ KA ,
ἐπειδήπερ ἡ μὲν AK ἐξαγώνου ἐστίν, ἡ δὲ KA δεκα-
γώνου· τῆς δὲ ZB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης
 10 *τὸ μείζον τμημά ἐστιν ἡ NB · μείζων ἄρα ἡ KA τῆς*
 NB . ἴση δὲ ἡ KA τῇ AM · μείζων ἄρα ἡ AM τῆς
 NB [τῆς δὲ AM μείζων ἐστίν ἡ MB]. πολλῶ ἄρα
ἡ MB πλευρὰ οὕσα τοῦ εἰκοσαέδρου μείζων ἐστὶ τῆς
 NB πλευρᾶς οὕσης τοῦ δωδεκαέδρου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15 *Λέγω δὴ, ὅτι παρὰ τὰ εἰρημένα πέντε σχή-*
ματα οὐ συσταθήσεται ἕτερον σχῆμα περιεχό-
μενον ὑπὸ ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων ἴσων
ἀλλήλοις.

Ἐπὶ μὲν γὰρ δύο τριγώνων ἢ ὅλως ἐπιπέδων
 20 *στερεὰ γωνία οὐ συνίσταται. ὑπὸ δὲ τριῶν τριγώνων*
ἢ τῆς πυραμίδος, ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἢ τοῦ ὀκταέδρου,
ὑπὸ δὲ πέντε ἢ τοῦ εἰκοσαέδρου· ὑπὸ δὲ ἕξ τριγώνων
ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων πρὸς ἐνὶ σημείῳ συν-
ισταμένων οὐκ ἔσται στερεὰ γωνία· οὕσης γὰρ τῆς
 25 *τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου γωνίας διμοίρου ὀρθῆς*
ἔσονται αἱ ἕξ τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι· ὅπερ ἀδύνατον·

2. ἔστιν PB. 5. καὶ μείζων B. ἄρα καὶ V. τῆς
 ZB] (alt.) om. P. 6. ἐστὶ Vq. 7. τετμημένης V.
 11. AM τῆς NB] in ras. m. 1 P. 12. τῆς δὲ — MB] post-
 ea add. in mg. m. 1 P. 13. μείζω, ν add. m. 2 V. 14. Se-

trario igitur $AB:BA = ZB^2:BA^2$. uerum $AB = 3BA$. itaque etiam $ZB^2 = 3BA^2$. uerum etiam $AA^2 = 4AB^2$; nam $AA = 2AB$. itaque $AA^2 > ZB^2$. quare $AA > ZB$. itaque multo magis $AA > ZB$. et rectae AA secundum rationem extremam ac mediam diuisae maior pars est KA , quoniam AK hexagoni est, KA autem decagoni [prop. IX]; rectae autem ZB secundum rationem extremam ac mediam diuisae maior pars est NB . itaque $KA > NB$. est autem $KA = AM$. quare $AM > NB$. ergo multo magis MB latus icosaedri NB latere dodecaedri maius est; quod erat demonstrandum.

Iam dico, praeter quinque figuras, quas nominauimus, nullam aliam construi posse polygonis et aequilateris et aequiangulis inter se aequalibus comprehensam.

Nam ex duobus triangulis aut omnino figuris planis angulus solidus construi nequit [XI def. 11]. ex tribus uero triangulis angulus pyramidis construitur, ex quattuor octaedri, ex quinque icosaedri. ex sex autem triangulis aequilateris et aequiangulis ad idem punctum coniunctis angulus solidus non orietur; nam cum angulus trianguli aequilateri duae partes sint recti, sex anguli quattuor rectis aequales erunt; quod fieri non

Cum epimetro lin. 15 sq. cfr. Psellus p. 51 sq.

quitur alia demonstratio extremae partis, u. app. 16. *συνσταθίζεται* P. 19. *ἡ ὅλως*] scripsi; ras. 2 uel 3 litt. P, supra scr. *ἀλλ' οὐδὲ ἐπὶ δύο* m. rec.; *ἀλλ' οὐδὲ ἀλλων δύο* Theon (BVq). 20. *οὐ*] om. Pq. 26. *αί*] om. q.

ἅπαντα γὰρ στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων ἢ τεσσάρων
 ὀρθῶν περιέχεται. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ οὐδὲ ὑπὸ πλειόνων
 ἢ ἑξ γωνιῶν ἐπιπέδων στερεὰ γωνία συνίσταται. ὑπὸ
 δὲ τετραγώνων τριῶν ἢ τοῦ κύβου γωνία περιέχεται·
 5 ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἀδύνατον· ἔσονται γὰρ πάλιν τέσ-
 σαρες ὀρθαί. ὑπὸ δὲ πενταγώνων ἰσοπλεύρων καὶ
 ἰσογωνίων, ὑπὸ μὲν τριῶν ἢ τοῦ δωδεκαέδρου· ἐπὶ
 δὲ τεσσάρων ἀδύνατον· οὔσης γὰρ τῆς τοῦ πενταγώνου
 ἰσοπλεύρου γωνίας ὀρθῆς καὶ πέμπτου, ἔσονται αἱ
 10 τέσσαρες γωνίαι τεσσάρων ὀρθῶν μείζους· ὅπερ ἀδύ-
 νατον. οὐδὲ μὴν ὑπὸ πολυγώνων ἐτέρων σχημάτων
 περισχεθήσεται στερεὰ γωνία διὰ τὸ αὐτὸ ἄτοπον.

Οὐκ ἄρα παρὰ τὰ εἰρημένα πέντε σχήματα ἕτερον
 σχῆμα στερεὸν συσταθήσεται ἐπὶ ἰσοπλεύρων τε καὶ
 15 ἰσογωνίων περιεχόμενον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λήμμα.

Ὅτι δὲ ἡ τοῦ ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου
 πενταγώνου γωνία ὀρθή ἐστι καὶ πέμπτου,
 οὕτω δεικτέον.

20 Ἐστω γὰρ πεντάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον
 τὸ $ABΓΔΕ$, καὶ περιγεγράφθω περὶ αὐτὸ κύκλος ὁ
 $ABΓΔΕ$, καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέντρον τὸ Z , καὶ
 ἐπεξεύχθωσαν αἱ ZA , ZB , $ZΓ$, $ZΔ$, ZE . δῖχα ἄρα
 τέμνουσι τὰς πρὸς τοῖς A , B , $Γ$, $Δ$, E τοῦ πεντα-

2. ὀρθῶν γωνιῶν q. οὐδέ] om. q, οὐδ' P. 3. ἡ] om.
 P, supra scr. m. 1 B. γωνιῶν] τριγώνων q. 5. τέσσαρες
 P. 8. δέ] om. q. ἰσοπλεύρου πενταγώνου V. 9. αἱ]
 supra m. rec. P. 10. τέσσαρες] -ες in ras. m. 1 P. In mg.
 m. 1 pro scholio: ὡς δείξει ὑποκάτω P. 11. πολυγωνίων π
 (non P). ἐτέρων] στερεῶν q. 12. αὐτό] om. BV.

potest; nam omnis angulus solidus minus quattuor rectis comprehenditur [XI, 21]. eadem de causa ne ex pluribus quidem quam sex angulis planis solidus angulus construitur. tribus autem quadratis angulus cubi comprehenditur. quattuor autem nullus; nam rursus quattuor recti erunt. pentagonis autem aequilateris et aequiangulis tribus angulus dodecaedri comprehenditur, quattuor autem nullus; nam cum angulus pentagoni aequilateri aequalis sit recto angulo cum quinta parte recti, quattuor anguli quattuor rectis maiores erunt; quod fieri non potest. eadem de causa ne aliis quidem figuris polygonis angulus solidus comprehendetur.

ergo praeter quinque figuras, quas nominauimus, nulla alia figura solida construatur figuris aequilateris et aequiangulis comprehensa; quod erat demonstrandum.

Lemma.

Angulum autem pentagoni aequilateri et aequianguli aequalem esse angulo recto et quintae parti recti, sic demonstrandum.

sit enim pentagonum aequilaterum et aequiangulum $ABΓΔE$, et circum id circulus circumscribatur $ABΓΔE$ [IV, 14], et sumatur centrum eius Z [III, 1], et ducantur $ZA, ZB, ZΓ, ZΔ, ZE$. itaque angulos pentagoni ad $A, B, Γ, Δ, E$ positos in binas partes aequales secant [I, 4]. et quoniam quinque anguli ad

14. *συνσταθήσεται* P, corr. m. rec. 16. *λήμμα*] om. codd.

17. *ὅτε* q. *τε καὶ* V. Post *ισογωνίου* add. *καὶ* q.

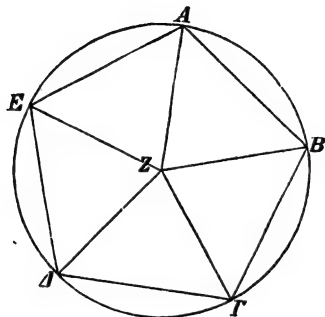
18. *ἔστιν* PB. *πέμπτον* q. 20. *τε καὶ* V. 22. *τό*] (prius)
om. q. 24. *τέμνουσιν* PB.

γώνου γωνίας. καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς τῷ Z πέντε γωνίαι
 τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ καὶ εἰσιν ἴσαι, μία ἄρα
 αὐτῶν, ὥς ἡ ὑπὸ AZB , μιᾶς ὀρθῆς ἐστὶ παρὰ
 πέμπτου· λοιπὰ ἄρα αἱ ὑπὸ ZAB , ABZ μιᾶς εἰσιν
 5 ὀρθῆς καὶ πέμπτου. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ZAB τῇ ὑπὸ $ZBΓ$
 καὶ ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ $ABΓ$ τοῦ πενταγώνου γωνία μιᾶς
 ἐστὶν ὀρθῆς καὶ πέμπτου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

2. εἰσὶ] εἰσὶν PBV. 5. ZBA q. 7. ὀρθῆς ἐστὶ V.
 πέμπτου q. In fine: Εὐκλείδου στοιχείων ιγ' P, Εὐκλείδου
 στοιχείων τῆς Θέωνος ἐκδόσεως ιγ' Bq.

31 I 17

Z positi quattuor rectis aequales sunt et inter se aequales, unus eorum, uelut AZB , recto angulo aequalis est deficiente quinta parte. itaque $ZAB + ABZ$



recto et quintae parti recti aequales sunt [I, 32]. et $ZAB = ZB\Gamma$. quare $AB\Gamma$ totus angulus pentagoni recto et quintae parti recti aequalis est; quod erat demonstrandum.



APPENDIX I.

Demonstrationes alterae.

1.

Ad libr. XI prop. 22.

Ἄλλως.

- Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ
 ὑπὸ $AB\Gamma$, ΔEZ , $H\Theta K$, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μεί-
 ζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, περιεχέτωσαν
 5 δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι αἱ AB , $B\Gamma$, ΔE , EZ , $H\Theta$,
 ΘK , καὶ ἐπεζεύχτωσαν αἱ $A\Gamma$, ΔZ , HK . λέγω, ὅτι
 δυνατὸν ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς $A\Gamma$, ΔZ , HK τρί-
 γωνον συστήσασθαι, τουτέστι πάλιν ὅτι αἱ δύο τῆς
 λοιπῆς μείζονες εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.
- 10 εἰ μὲν οὖν πάλιν αἱ πρὸς τοῖς B , E , Θ σημείοις
 γωνίαι ἴσαι εἰσὶν, ἴσαι ἔσονται καὶ αἱ $A\Gamma$, ΔZ , HK ,
 καὶ ἔσονται αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες. εἰ δὲ οὐ,
 ἔστωσαν ἄνισοι αἱ πρὸς τοῖς B , E , Θ σημείοις γωνίαι,
 καὶ μείζων ἢ πρὸς τῷ B ἑκατέρως τῶν πρὸς τοῖς E ,
 15 Θ · μείζων ἄρα ἔσται καὶ ἡ $A\Gamma$ εὐθεῖα ἑκατέρως τῶν
 ΔZ , HK . καὶ φανερόν, ὅτι ἡ $A\Gamma$ μετὰ ἑκατέρως

XI, 22 post δεῖξαι p. 60, 18 add. PBFVb.

-
3. ὑπό] om. F, supra m. 2 B. 5. BΓ] BΓ, ΓΔ b.
 6. ΔZ] Δ corr. ex Γ m. 1 F. 8. τουτέστιν B. 11. ἴσαι
 εἰσὶν] εἰσιν ἴσαι BV. ἴσαι] om. BV. HK] HK ἴσαι BV.

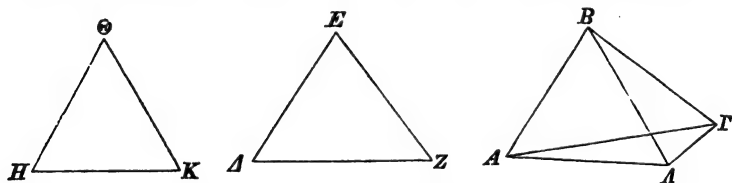
1.

Ad libr. XI prop. 22.

Aliter.

Sint dati tres anguli plani $AB\Gamma$, ΔEZ , $H\Theta K$, quorum duo reliquo maiores sint quolibet modo coniuncti, et eos comprehendant rectae aequales AB , $B\Gamma$, ΔE , EZ , $H\Theta$, ΘK , et ducantur $A\Gamma$, ΔZ , HK . dico, fieri posse, ut ex rectis aequalibus rectis $A\Gamma$, ΔZ , HK triangulus construatur, hoc est rursus duas reliqua maiores esse quolibet modo coniunctas.

iam si rursus anguli ad puncta B , E , Θ positi aequales sunt, etiam $A\Gamma$, ΔZ , HK aequales erunt,



et duae reliqua maiores. sin minus, anguli ad puncta B , E , Θ positi inaequales sint, et angulus ad B positus utroque angulorum ad E , Θ positorum maior sit. itaque etiam $A\Gamma > \Delta Z$, $A\Gamma > HK$ [I, 24]. et

13. ἀνισοί] corr. ex ἴσοι m. rec. P. 14. Ante καὶ ras.
1 litt. F. 15. ἐστὶ BFb. ἡ $A\Gamma$] in ras. V. ἐνθ' ὅτι α]
om. V.

τῶν ΔZ , HK τῆς λοιπῆς μεζονές εἰσι. λέγω, ὅτι
 καὶ αἱ ΔZ , HK τῆς AG μεζονές εἰσι. συνεστάτω
 πρὸς τῇ AB εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ B
 τῇ ὑπὸ $H\Theta K$ γωνίᾳ ἴση ἢ ὑπὸ ABA , καὶ κλείσθω
 5 μιᾷ τῶν AB , $B\Gamma$, ΔE , EZ , $H\Theta$, ΘK ἴση ἢ BA ,
 καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ AA , AG . καὶ ἐπεὶ δύο αἱ AB ,
 BA δυοὶ ταῖς $H\Theta$, ΘK ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ,
 καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ AA βάσει
 τῇ HK ἴση ἐστίν. καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς τοῖς E , Θ ση-
 10 μείοις γωνίαι τῆς ὑπὸ $AB\Gamma$ μεζονές εἰσιν, ὧν ἡ ὑπὸ
 $H\Theta K$ τῇ ὑπὸ ABA ἐστὶν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ
 E γωνία τῆς ὑπὸ $AB\Gamma$ μεζων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ δύο
 αἱ AB , $B\Gamma$ δυοὶ ταῖς ΔE , EZ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα
 ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔEZ γωνίας τῆς ὑπὸ $AB\Gamma$
 15 μεζων, βάσις ἄρα ἡ ΔZ βάσεως τῆς AG μεζων
 ἐστίν. ἴση δὲ ἐδείχθη ἡ HK τῇ AA . αἱ ἄρα ΔZ ,
 HK τῶν AA , AG μεζονές εἰσιν· ἀλλὰ αἱ AA , AG
 τῆς AG μεζονές εἰσι· πολλῷ ἄρα αἱ ΔZ , HK τῆς
 AG μεζονές εἰσιν. τῶν AG , ΔZ , HK ἄρα εὐθειῶν
 20 αἱ δύο τῆς λοιπῆς μεζονές εἰσι πάντη μεταλαμβανό-
 μεναι· δυνατόν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς AG , ΔZ ,
 HK τρίγωνον συστήσασθαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

1. μεζονές εἰσι] Pb, γρ. μεζων ἐστὶ mg. b; μεζων ἐστὶ BFV.
 2. ΔZ] corr. ex AZ m. 2 P. 3. B] e corr. F. 4. ABA] BHA b, corr. mg. m. 1. 5. BA] corr. ex AA m. 1 F. 6. περι-
 έχουσι PBVb. AA] A in ras. V. βάσει] supra m. 2 B.
 7. ἐστὶν ἴση V. ἐστὶ B, comp. Fb. 8. τῆς] τοῖς F.
 εἰσι V. 9. $AB\Gamma$ bφ (non F). ἐστὶ PV, comp. b.
 δύο αἱ] αἱ δύο F. 10. AB] F, AB bφ. 11. -τέρᾳ καὶ γω-
 in mg. trans. m. 1 F. ἡ ὑπό] om. b. 12. AG b.
 13. ἐστίν] om. P. AA] corr. ex AA B. 14. ἀλλ' Fb.
 15. πολλῷ — 16. εἰσιν] postea add. m. 1 P. 17. εἰσι BVb,
 comp. F. 18. ἐστίν] om. V. ΔZ] AZ F. 19. συστή-
 σασθαι P, corr. m. 2.

adparet, esse $AG + AZ > HK$, $AG + HK > AZ$. dico, esse etiam $AZ + HK > AG$. nam ad rectam AB et punctum eius B construatur $\angle ABA = H\Theta K$ [I, 23], et ponatur $BA = AB = B\Gamma = AE = EZ = H\Theta = \Theta K$, et ducantur AA , AG . et quoniam duae AB , BA duabus $H\Theta$, ΘK singulae singulis aequales sunt et angulos aequales comprehendunt, erit $AA = HK$ [I, 4]. et quoniam anguli ad puncta E , Θ positi angulo $AB\Gamma$ maiores sunt, quorum $\angle H\Theta K = ABA$, angulus ad E positus angulo $AB\Gamma$ maior erit. et quoniam duae AB , $B\Gamma$ duabus AE , EZ aequales sunt, et $\angle AEZ > AB\Gamma$, erit etiam $AZ > AG$ [I, 24]. demonstrauius autem, esse $HK = AA$. itaque erit

$$AZ + HK > AA + AG.$$

uerum $AA + AG > AG$. multo igitur magis erit

$$AZ + HK > AG.$$

ergo rectarum AG , AZ , HK duae reliqua maiores sunt quolibet modo coniunctae. fieri igitur potest, ut ex rectis aequalibus rectis AG , AZ , HK triangulus construatur; quod erat demonstrandum.

2.

Ad libr. XI prop. 23.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐπὶ μιᾷ
 τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου τῆς MN , καὶ ἔστω τὸ Ξ ,
 καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΞA . λέγω πάλιν, ὅτι μείζων ἐστὶν
 ἢ AB τῆς $A\Xi$. εἰ γὰρ μή, ἦτοι ἴση ἐστὶν ἢ AB τῇ
 5 $A\Xi$ ἢ ἐλάττω. ἔστω πρότερον ἴση. δύο δὴ αἱ AB ,
 $B\Gamma$, τουτέστιν αἱ ΔE , EZ , δύο ταῖς $M\Xi$, ΞA , τουτ-
 ἐστι τῇ MN , ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ ἡ MN τῇ ΔZ κείται
 ἴση. καὶ αἱ ΔE , EZ ἄρα τῇ ΔZ ἴσαι εἰσίν· ὅπερ
 ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ AB ἴση ἐστὶ τῇ $A\Xi$.
 10 ὁμοίως δὴ οὐδὲ ἐλάττων· πολλῶ γὰρ τὸ ἀδύνατον
 μείζων. ἡ ἄρα AB μείζων ἐστὶ τῆς $A\Xi$. καὶ ἐὰν
 ὁμοίως, ὃ μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς
 $A\Xi$, ἐκείνῳ ἴσον πρὸς ὀρθὰς τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ
 ἀναστήσωμεν ὥς τὸ ἀπὸ τῆς ΞP , συσταθήσεται τὸ
 15 πρόβλημα.

ἀλλὰ δὴ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐκτὸς τοῦ
 ΔMN τριγώνου καὶ ἔστω τὸ Ξ , καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ
 $A\Xi$, $M\Xi$. λέγω δὴ καὶ οὕτως, ὅτι μείζων ἐστὶν ἢ
 AB τῆς $A\Xi$. εἰ γὰρ μή, ἦτοι ἴση ἐστὶν ἢ ἐλάττω.
 20 ἔστω πρότερον ἴση. δύο οὖν αἱ AB , $B\Gamma$ δύο ταῖς

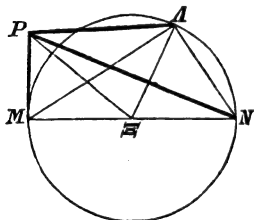
XI, 23 in textu post ποιῆσαι p. 68, 17 add. PBFVb.

1. τό] om. P. 2. τῆς MN] ras. 3 litt. V, γωνίας τῆς
 MN φ. ἔστω τὸ Ξ] in ras. m. 1 b. 3. ὅτι πάλιν b.
 μείζων φ. 4. ἡ] corr. ex αἱ V. εἰ γὰρ — 11. τῆς $A\Xi$]
 mg. m. 1, add. γρ. b, in textu: ἐπεὶ γὰρ αἱ ΔE , EZ τῆς ΔZ ,
 τουτέστι τῆς MN , μείζους εἰσὶ, καὶ ἡμίσειαι· ἡ $E\Delta$ ἄρα τουτ-
 ἐστὶν τῆς $M\Xi$ ἢ AB τῆς $A\Xi$ μείζων ἐστίν. 6. αἱ] in ras.
 m. 2 P. ΔE , EZ δυσὶ in spatio uacuo tertiae partis lineae
 m. 2 P. δυσὶ b. τουτέστιν B. 7. ἀλλὰ ἡ MN]

2.

Ad libr. XI prop. 23.¹⁾

Uerum centrum circuli in aliquo latere trianguli sit, uelut MN , et sit Ξ , et ducatur ΞA . dico rursus, esse $AB > A\Xi$. nam si minus, erit aut $AB = A\Xi$ aut $AB < A\Xi$. prius sit $AB = A\Xi$. itaque duae rectae AB , $B\Gamma$, hoc est AE , EZ , duabus rectis $M\Xi$, ΞA , hoc est MN , aequales sunt. supposuimus autem, esse $MN = AZ$. quare $AE + EZ = AZ$. quod fieri non potest. itaque non est $AB = A\Xi$. iam similiter demonstrabimus, ne minorem quidem esse AB



recta $A\Xi$; nam hoc multo minus fieri potest. ergo $AB > A\Xi$. et si similiter ΞP ad planum circuli perpendicularem erexerimus, ita ut sit $\Xi P^2 = AB^2 \div A\Xi^2$ problema componetur.

Uerum centrum circuli extra triangulum AMN positum sit et sit Ξ , et ducantur $A\Xi$, $M\Xi$. dico sic quoque, esse $AB > A\Xi$. nam si minus, erit aut $AB = A\Xi$ aut $AB < A\Xi$. prius sit

1) De figuris cfr. p. 62.

m. 2 P. $\kappa\epsilon\iota\tau\alpha\iota$] $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$ supra scr. $\kappa\epsilon\iota\tau\alpha\iota$ m. 2 B. 8. $\kappa\alpha\iota$ — $\acute{\alpha}\rho\alpha$] om. F; uidentur fuisse in mg. a m. 2. $\iota\sigma\alpha\iota$ $\epsilon\lambda\acute{\iota}\sigma\iota\nu$] m. 2 P. 9. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}\nu$] om. BV, supra m. 1 F. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\acute{\iota}$] om. V, $\acute{\alpha}\rho\alpha$ φ (non F). $\tau\eta$] bis φ . 13. $\acute{\epsilon}\kappa\epsilon\lambda\acute{\iota}\nu\varphi$ — 14. ΞP] mg. m. 1 b, add. $\gamma\rho.$, in textu: $\acute{\epsilon}\kappa\epsilon\lambda\acute{\iota}\nu\omega\iota$ $\lambda\omicron\gamma\eta\nu$ $\pi\rho\acute{o}\varsigma$ $\tau\omega$ $\tau\omicron\upsilon$ $\kappa\acute{\upsilon}\kappa\lambda\omicron\nu$ $\acute{\epsilon}\pi\iota\pi\acute{\epsilon}\delta\varphi$ $\acute{\alpha}\nu\alpha\sigma\tau\acute{\eta}\sigma\omicron\mu\epsilon\nu$ $\tau\eta\nu$ ΞP (in ras.). 13. $\acute{\epsilon}\kappa\epsilon\lambda\acute{\iota}\nu\omicron$ b. 14. $\acute{\alpha}\nu\alpha\sigma\tau\acute{\eta}\sigma\omicron\mu\epsilon\nu$ b. 16. $\acute{\epsilon}\nu\tau\acute{o}\varsigma$ V, sed corr. 18. $A\Xi$, $M\Xi$] $\alpha\acute{\iota}$ $A\Xi$ φ , ΞA , ZM , ΞN b, $A\Xi$, $M\Xi$, $N\Xi$ V et B ($N\Xi$ m. 2). $\kappa\alpha\iota$] om. V, $\acute{o}\tau\iota$ $\kappa\alpha\iota$ b. $\acute{o}\tau\iota$] om. b. 20. $\omicron\upsilon\nu$] $\delta\eta$ V, $\delta\epsilon\iota$ φ . $\delta\upsilon\omicron$] $\delta\upsilon\sigma\acute{\iota}$ b.

$MΞ$, $ΞΑ$ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ βάσις ἡ
 $ΑΓ$ βάσει τῇ $ΜΑ$ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $ΑΒΓ$ γωνία
 τῇ ὑπὸ $ΜΞΑ$ ἴση ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ
 $ΗΘΚ$ τῇ ὑπὸ $ΑΞΝ$ ἐστὶν ἴση. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ $ΜΞΝ$
 5 δύο ταῖς $ΑΒΓ$, $ΗΘΚ$ ἐστὶν ἴση. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ $ΑΒΓ$,
 $ΗΘΚ$ τῆς ὑπὸ $ΔΕΖ$ μείζονές εἰσιν. καὶ ἡ ὑπὸ $ΜΞΝ$
 ἄρα τῆς ὑπὸ $ΔΕΖ$ μείζων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ
 $ΔΕ$, $ΕΖ$ δύο ταῖς $ΜΞ$, $ΞΝ$ ἴσαι εἰσίν, καὶ βάσις ἡ
 $ΔΖ$ βάσει τῇ $ΜΝ$ ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $ΜΞΝ$ γω-
 10 νία τῇ ὑπὸ $ΔΕΖ$ ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ μείζων
 ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ $ΑΒ$ τῇ $ΑΞ$. ἐξῆς
 δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων. μείζων ἄρα. καὶ ἐὰν
 πρὸς ὁρθὰς τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πάλιν ἀναστήσωμεν
 τὴν $ΞΡ$ καὶ ἴσην αὐτὴν ἀποθώμεθα, ὃ μείζων δύνатаι
 15 τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΑΞ$, συσταθήσεται τὸ
 πρόβλημα.

λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶν ἡ $ΑΒ$ τῆς $ΑΞ$.
 εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω. καὶ κείσθω τῇ μὲν $ΑΒ$ ἴση ἡ
 $ΞΟ$, τῇ δὲ $ΒΓ$ ἴση ἡ $ΞΠ$, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ $ΟΠ$. καὶ
 20 ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΑΒ$ τῇ $ΒΓ$, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ $ΞΟ$ τῇ
 $ΞΠ$. ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ $ΟΑ$ λοιπὴ τῇ $ΠΜ$ ἐστὶν ἴση.
 παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ $ΑΜ$ τῇ $ΠΟ$, καὶ ἰσογώνιον
 τὸ $ΑΜΞ$ τριγώνον τῷ $ΠΞΟ$ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς
 ἡ $ΞΑ$ πρὸς τὴν $ΑΜ$, ἡ $ΞΟ$ πρὸς τὴν $ΟΠ$, καὶ ἐναλ-

1. ἑκατέρα] ἑκατέρας P, s del. m. 1. 2. $ΜΑ$] M in ras.
 V. ἐστὶν ἴση F. 3. ἴση ἐστίν] ἐστὶν ἴση b, ἴση ἐστὶ V.
 4. καὶ ὅλη b. 5. δύο] PBV, F m. 1, δυό b, F m. 2.
 ταῖς] ταῖς ὑπό Fb; ὑπό supra scr. m. 2 BV. ἀλλ' P.
 αἱ] ἡ b. 6. εἰσι BV, comp. Fb $ΜΞΝ$] corr. ex $ΞΜΝ$
 m. 2 P, $ΜΞ$ in ras. m. 2 B. 7. ἐστὶ PBV, comp. Fb.
 8. δύο] δυό b et m. 2 F. εἰσί PBV, comp. Fb. 9. γω-
 νία] om. b. 10. ἴση ἐστίν b. 11. ἐστίν] om. V. ἐξῆς
 δέ] ὁμοίως δὴ τοῖς ἔμφοσθεν Fb, mg. m. 1: γρ. ἐξῆς δέ b.

λὰξ ὡς ἡ $ΑΞ$ πρὸς τὴν $ΞΟ$, οὕτως ἡ $ΑΜ$ πρὸς τὴν
 $ΟΠ$. μελίων δὲ ἡ $ΑΞ$ τῆς $ΞΟ$ · μελίων ἄρα καὶ ἡ
 $ΑΜ$ τῆς $ΟΠ$. ἀλλὰ ἡ $ΑΜ$ τῇ $ΑΓ$ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ
 $ΑΓ$ ἄρα τῆς $ΟΠ$ ἐστὶ μελίων. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ $ΑΒ$,
 5 $ΒΓ$ δύο ταῖς $ΟΞ$, $ΞΠ$ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρω ἑκατέρω,
 καὶ βάσις ἡ $ΑΓ$ βάσεως τῆς $ΟΠ$ μελίων ἐστίν, γωνία
 ἄρα ἡ ὑπὸ $ΑΒΓ$ γωνίας τῆς ὑπὸ $ΟΞΠ$ μελίων ἐστίν.
 ὁμοίως δὲ καὶ τὴν $ΞΡ$ ἴσην ἑκατέρω τῶν $ΞΟ$, $ΞΠ$
 ἀπολάβωμεν καὶ ἐπιζεύξωμεν τὴν $ΟΡ$, δείξομεν, ὅτι
 0 καὶ ἡ ὑπὸ $ΗΘΚ$ γωνία τῆς ὑπὸ $ΟΞΡ$ μελίων ἐστίν.
 συνεστατάω δὲ πρὸς τῇ $ΑΞ$ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ
 σημείω τῷ $Ξ$ τῇ μὲν ὑπὸ $ΑΒΓ$ γωνία ἴση ἡ ὑπὸ
 $ΑΞΣ$, τῇ δὲ ὑπὸ $ΗΘΚ$ ἴση ἡ ὑπὸ $ΑΞΤ$, καὶ κείσθω
 ἑκατέρω τῶν $ΞΣ$, $ΞΤ$ τῇ $ΟΞ$ ἴση, καὶ ἐπεξεύχθωσαν
 5 αἱ $ΟΣ$, $ΟΤ$, $ΣΤ$. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ $ΑΒ$, $ΒΓ$ δύο
 ταῖς $ΟΞ$, $ΞΣ$ ἴσαι εἰσὶν, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΑΒΓ$ γω-
 νία τῇ ὑπὸ $ΟΞΣ$ ἴση, βάσις ἄρα ἡ $ΑΓ$, τουτέστιν ἡ
 $ΑΜ$, βάσει τῇ $ΟΣ$ ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ
 ἡ $ΑΝ$ τῇ $ΟΤ$ ἴση ἐστίν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ $ΜΑ$, $ΑΝ$
 0 δύο ταῖς $ΣΟ$, $ΟΤ$ ἴσαι εἰσὶν, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΜΑΝ$
 γωνίας τῆς ὑπὸ $ΣΟΤ$ μελίων ἐστίν, βάσις ἄρα ἡ $ΜΝ$
 βάσεως τῆς $ΣΤ$ μελίων ἐστίν. ἀλλὰ ἡ $ΜΝ$ τῇ $ΑΖ$
 ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ $ΑΖ$ ἄρα τῆς $ΣΤ$ μελίων ἐστίν. ἐπεὶ
 οὖν δύο αἱ $ΑΕ$, $ΕΖ$ δύο ταῖς $ΣΞ$, $ΞΤ$ ἴσαι εἰσὶν,
 5 καὶ βάσις ἡ $ΑΖ$ βάσεως τῆς $ΣΤ$ μελίων, γωνία ἄρα
 ἡ ὑπὸ $ΑΕΖ$ γωνίας τῆς ὑπὸ $ΣΞΤ$ μελίων ἐστίν. ἴση
 δὲ ἡ ὑπὸ $ΣΞΤ$ ταῖς ὑπὸ $ΑΒΓ$, $ΗΘΚ$. ἡ ἄρα ὑπὸ
 $ΑΕΖ$ τῶν ὑπὸ $ΑΒΓ$, $ΗΘΚ$ μελίων ἐστίν. ἀλλὰ καὶ
 ἐλάττων· ὅπερ ἀδύνατον.

1. τὴν $ΞΟ$] $ΞΟ$ V. 3. τῇ $ΑΓ$] om. φ. 4. $ΑΓ$]
 ΓΑ Ρ. μελίων ἐστίν, sed ἐστὶ supra scr., F. 6. μελίων]

erit $A\Xi : \Xi O = AM : OP$. uerum $A\Xi > \Xi O$. itaque etiam $AM > OP$ [V, 14]. sed $AM = AG$. itaque etiam $AG > OP$. iam quoniam duae rectae AB, BG duabus rectis $O\Xi, \Xi\Pi$ singulae singulis aequales sunt, et $AG > OP$, erit $\angle ABG > O\Xi\Pi$ [I, 25]. similiter si posuerimus $\Xi P = \Xi O = \Xi\Pi$ et duxerimus OP , demonstrabimus, esse etiam $\angle HOK > O\Xi P$. iam ad rectam $A\Xi$ et punctum eius Ξ angulo ABG aequalis construatur $\angle A\Xi\Sigma$ [I, 23], et ponatur $\Xi\Sigma = \Xi T = O\Xi$, et ducantur $OS, OT, \Sigma T$. et quoniam duae rectae AB, BG duabus $O\Xi, \Xi\Sigma$ aequales sunt, et $\angle ABG = O\Xi\Sigma$, erit $AG = OS$ [I, 4], h. e. $AM = OS$. eadem de causa etiam $AN = OT$. et quoniam duae rectae MA, AN duabus SO, OT aequales sunt, et $\angle MAN > \Sigma OT$, erit $MN > \Sigma T$ [I, 24]. sed $MN = AZ$. itaque etiam $AZ > \Sigma T$. iam quoniam duae rectae AE, EZ duabus $\Sigma\Xi, \Xi T$ aequales sunt, et $AZ > \Sigma T$, erit $\angle AEZ > \Sigma\Xi T$ [I, 25]. est autem $\angle \Sigma\Xi T = ABG + HOK$. ergo $\angle AEZ > ABG + HOK$. uerum idem minor est. quod fieri non potest.

comp. F, ἀρα comp. φ. ἐστὶ PBV, comp. Fb. 7. ἀρα] comp. supra scr. m. 2 F. 8. καὶ] P, καὶ π. 10. OΞP γωνίας F. ἐστὶ P, comp. b. 11. τὴν AΞ εὐθεῖαν π, et B, sed corr. Post AΞ ras. 1 litt. V. 12. ἴσην P, sed corr. ἡ] postea ins. m. 1 P. 13. ΘHK B. AΞT] T e corr. m. 2 P. 14. ἐπεξεύχθω V, σαν add. m. rec. 15. αὖ AB, BG δύο] mg. V. 16. ἐστὶ PV, comp. Fb. 17. τῇ] ἡ F, corr. m. 2. 18. βᾶσει] εἰ eras. V. 19. ἐστὶν ἴση Vb. AN] A ins. m. 1 V. 20. ΣO] corr. ex OΣ V, OΣ B. ἐστὶ PV, comp. Fb. 21. ΣT F. ἐστὶ PV, comp. Fb. 22. ἀλλ' Fb. 23. ἐστὶ V. 24. οὖν] om. B. ΣΞ] corr. ex EZ m. 2 P. ἐστὶ PV, comp. Fb. 25. μετρίων ἐστὶ FV; seq. ras. tertiae partis lineae F. 27. ἡ] (prius) καὶ ἡ b. 29. ἀδύνατον] ἄτοπον F, corr. mg. m. 2.

3.

Uulgo XI prop. 38.

Ἐὰν ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθὸν ᾗ, καὶ ἀπὸ τινος σημείου τῶν ἐν ἐνὶ τῶν ἐπιπέδων ἐπὶ τὸ ἕτερον ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς πεσεῖται τῶν ἐπιπέδων ἡ ἀγομένη κάθετος.

- 5 ἐπίπεδον γὰρ τὸ $\Gamma\Delta$ ἐπιπέδῳ τῷ AB πρὸς ὀρθὰς ἔστω, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ ΔA , καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τοῦ $\Gamma\Delta$ ἐπιπέδου τυχὸν σημεῖον τὸ E . λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ E ἐπὶ τὸ AB ἐπίπεδον κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τῆς ΔA πεσεῖται.
- 10 μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πιπτεύω ἐκτὸς ὥς ἡ EZ , καὶ συμβαλλέτω τῷ AB ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Z σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Z ἐπὶ τὴν ΔA ἐν τῷ AB ἐπιπέδῳ κάθετος ἔστω ἡ ZH , ἣτις καὶ τῷ $\Gamma\Delta$ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστιν, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ EH . ἐπεὶ οὖν ἡ ZH
- 15 τῷ $\Gamma\Delta$ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστιν, ἄπτεται δὲ αὐτῆς ἡ EH οὕσα ἐν τῷ $\Gamma\Delta$ ἐπιπέδῳ, ὀρθὴ ἄρα ἔστιν ἡ ὑπὸ ZHE γωνία. ἀλλὰ καὶ ἡ EZ τῷ AB ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστιν· ἡ ἄρα ὑπὸ EZH ὀρθὴ ἔστιν. τριγώνου δὲ τοῦ EZH αἱ δύο γωνίαι ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν·
- 20 ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ E ἐπὶ τὸ AB ἐπίπεδον κάθετος ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τῆς ΔA . ἐπὶ τὴν ΔA ἄρα πεσεῖται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XI, 38 post XI, 37 habent PBFV, om. b; ἐν τισι τῶν ἀντιγράφων οὐ φέρεται τὸ λη P mg. m. 1.

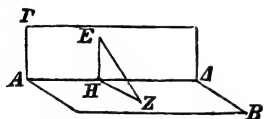
λη' PBV, in ras. m. 2 F. 2. τῶν] (alt.) m. 2 F. ἕτερον] post q del. s P. 3. ἀχθεῖ P; corr. m. 2. 5. $\Gamma\Delta$] Γ eras. V. 6. ΔA] corr. ex $\Delta\Delta$ V, $\Delta\Delta$ F. 9. ΔA] $\Delta\Delta$ FV. 11. συμβαλλέτω PV. 13. ἔστω] ἦχθω B F V. 14. ἔστι BV,

3.

Uulgo XI prop. 38.

Si planum ad planum perpendiculare est, et a puncto aliquo alterius plani ad alterum planum perpendicularis ducitur, perpendicularis ducta in communem planorum sectionem cadet.

Nam planum ΓA ad planum AB perpendiculare sit, et communis eorum sectio sit AA , et in ΓA plano punctum aliquod sumatur E . dico, perpendicularem ab E ad planum AB ductam in AA cadere.



ne cadat enim, sed si fieri potest, extra cadat ut EZ et cum plano AB concurrat in puncto Z , et a Z ad AA in plano AB perpendicularis sit ZH , quae eadem ad planum ΓA perpendicularis est [XI def. 4], et ducatur EH . iam quoniam ZH ad planum ΓA perpendicularis est, et eam tangit EH in plano ΓA posita, $\angle ZHE$ rectus erit [XI def. 3]. uerum etiam EZ ad planum AB perpendicularis est. itaque $\angle EZH$ rectus est. ergo trianguli EZH duo anguli rectis aequales sunt; quod fieri non potest [I, 17]. itaque perpendicularis ab E ad planum AB ducta extra AA non cadet. ergo cadet in AA ; quod erat demonstrandum.

comp. F. EH] H eras. V. 18. $\xi\sigma\iota\nu$] (alt.) $\xi\sigma\iota$ BV,
 comp. F. 19. $\acute{o}\rho\theta\alpha\iota\varsigma$] $\delta\acute{\upsilon}\omicron$ $\acute{o}\rho\theta\alpha\iota\varsigma$ FV, $\delta\acute{\upsilon}\omicron$ add. m. 2 B.
 $\epsilon\iota\sigma\iota\nu$] om. FV. 22. $\tau\acute{\eta}\nu$] corr. ex $\tau\acute{\eta}\varsigma$ m. 2 V. AA FV.
 $\acute{o}\pi\epsilon\rho$ $\xi\delta\epsilon\iota$ $\delta\epsilon\iota\chi\alpha\iota$] om. FV.

4.

Ad libr. XII prop. 4.

Καὶ ἐπεὶ τὰ ἐν τῇ $ABΓH$ πυραμίδι δύο πρίσματα
 ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις, ἀλλὰ μὴν καὶ τὰ ἐν τῇ $ΔΕΖΘ$
 πυραμίδι δύο πρίσματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν, ἔστιν
 ἄρα ὡς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις τὸ $BKΛΞ$ παραλληλό-
 5 γραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ $ΜΟ$ εὐθεῖα, πρὸς τὸ πρίσμα,
 οὗ βάσις μὲν τὸ $ΛΞΓ$ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ
 $ΟΜΝ$, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις τὸ $ΠΕΡΦ$, ἀπεν-
 αντίον δὲ ἡ $ΣΤ$, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ
 $ΡΦΖ$ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ $ΣΤΤ$. συνθέντι
 10 ἐστὶν ἄρα ὡς τὰ $ΚΒΞΛΜΟ$, $ΛΞΓΜΝΟ$ πρίσματα
 πρὸς τὸ $ΛΞΓΜΝΟ$ πρίσμα, οὕτως τὰ $ΠΕΦΡΣΤ$,
 $ΡΦΖΣΤΤ$ πρίσματα πρὸς τὸ $ΡΦΖΣΤΤ$ πρίσμα.
 ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὰ $ΚΒΞΛΜΟ$, $ΛΞΓΜΝΟ$
 πρὸς τὰ $ΠΕΦΡΣΤ$, $ΡΦΖΣΤΤ$ πρίσματα, οὕτως τὸ
 15 $ΛΞΓΜΝΟ$ πρίσμα πρὸς τὸ $ΡΦΖΣΤΤ$ πρίσμα. ὡς
 δὲ τὸ $ΛΞΓΜΝΟ$ πρίσμα πρὸς τὸ $ΡΦΖΣΤΤ$ πρίσμα,
 οὕτως ἐδείχθη ἡ $ΛΞΓ$ βάσις πρὸς τὴν $ΡΦΖ$, καὶ ἡ
 $ΑΒΓ$ βάσις πρὸς τὴν $ΔΕΖ$ βάσιν. καὶ ὡς ἄρα τὸ
 $ΑΒΓ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΔΕΖ$ τρίγωνον, οὕτως τὰ ἐν
 20 τῇ $ΑΒΓΗ$ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ
 $ΔΕΖΘ$ πυραμίδι δύο πρίσματα. ὁμοίως δὲ καὶ τὰς
 ὑπολειπομένας πυραμίδας διέλωμεν τὸν αὐτὸν τρόπον
 οἶον ὡς τὰς $ΜΝΟΗ$, $ΣΤΤΘ$, ἐστὶν ὡς ἡ $ΜΝΟ$

XII, 4. Pro uerbis ὡς δέ p. 160, 13 — δεῖξαι p. 162, 14
 Theon (BVq). de figura u. p. 159.

2. ἐστὶν ἴσα B. 4. $BKΛΞ$] in ras. V. 5. $ΜΟ$] $Με$
 corr. V. 6. μὲν] om. V. 7. οὕτω B. 9. καὶ συνθέντι

4.

Ad libr. XII prop. 4.

Et quoniam duo prismata pyramidis $AB\Gamma H$ inter se aequalia sunt, uerum etiam duo prismata pyramidis $\Delta EZ\Theta$ inter se aequalia sunt, erit ut prisma, cuius basis est parallelogrammum $BK\Lambda\Xi$, ei autem opposita recta MO , ad prisma, cuius basis est triangulus $\Lambda\Xi\Gamma$, ei autem oppositus OMN , ita prisma, cuius basis est $\Pi\epsilon\Phi$, ei autem opposita ΣT , ad prisma, cuius basis est triangulus $P\Phi Z$, ei autem oppositus $\Sigma T\tau$. componendo igitur est $KB\Xi\Lambda MO + \Lambda\Xi\Gamma MN O : \Lambda\Xi\Gamma MN O = \Pi\epsilon\Phi P\Sigma T + P\Phi Z\Sigma T\tau : P\Phi Z\Sigma T\tau$. itaque permutando erit

$$KB\Xi\Lambda MO + \Lambda\Xi\Gamma MN O : \Pi\epsilon\Phi P\Sigma T + P\Phi Z\Sigma T\tau = \Lambda\Xi\Gamma MN O : P\Phi Z\Sigma T\tau.$$

demonstrauimus autem, esse $\Lambda\Xi\Gamma MN O : P\Phi Z\Sigma T\tau = \Lambda\Xi\Gamma : P\Phi Z = AB\Gamma : \Delta EZ$. itaque etiam ut $AB\Gamma : \Delta EZ$, ita duo prismata pyramidis $AB\Gamma H$ ad duo prismata pyramidis $\Delta EZ\Theta$. similiter si reliquas pyramides, uelut $MNOH$, $\Sigma T\tau\Theta$, eadem ratione diui-

q. 10. ἄρα ἐστίν V. 11. οὕτω B. $\Pi\epsilon\Phi\Sigma T$, post Φ ras., V. 12. $P\Phi Z\Sigma T\tau$] P inter duas ras. V. $E\Phi Z\Sigma T\tau$ V. $\pi\rho\acute{\iota}\sigma\mu\alpha\tau\alpha$ q. 13. $KB\Lambda\Xi MO$ B. $\Xi\Lambda\Gamma MN O$ B, $\Lambda\Xi\Gamma MN O$ q et ON in ras. V; seq. $\pi\rho\acute{\iota}\sigma\mu\alpha\tau\alpha$ V. 14. $\Pi\epsilon\Phi P\Sigma T$] ΦP in ras. V. οὕτω B. 15. ὥς δέ — 16. $P\Phi Z\Sigma T\tau$ $\pi\rho\acute{\iota}\sigma\mu\alpha$] om. q. 18. βάσιν] om. V. 19. οὕτω q. 22. ὑπολειπομένης] mg. m. 2 B, in textu γενομένης. 23. ὥς] (prius) bis V.

βάσις πρὸς τὴν $\Sigma\Gamma\Gamma$ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ $\dot{M}NOH$ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ $\Sigma\Gamma\Gamma\Theta$ πυραμίδι δύο πρίσματα. ἀλλ' ὥς ἡ MNO βάσις πρὸς τὴν $\Sigma\Gamma\Gamma$ βάσιν, οὕτως ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν ΔEZ
 5 βάσιν. καὶ ὥς ἄρα ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν ΔEZ βάσιν, οὕτως καὶ τὰ ἐν τῇ $AB\Gamma H$ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδι δύο πρίσματα, καὶ τὰ ἐν τῇ $\dot{M}NOH$ δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ $\Sigma\Gamma\Gamma\Theta$ πυραμίδι δύο πρίσματα, καὶ τὰ τέσσαρα πρὸς
 10 τὰ τέσσαρα. τὰ αὐτὰ δὲ δειχθήσεται καὶ ἐκ τῶν γενομένων πρισμάτων ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν $AK\Lambda O$ καὶ $\Delta\Pi\P\Sigma$ πυραμίδων καὶ πάντων ἀπλῶς τῶν ἰσοπληθῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5.

Ad libr. XII prop. 17.

Δεικτέον δὴ καὶ ἐτέρως προχειρότερον, ὅτι μείζων
 15 ἐστὶν ἡ $A\Psi$ τῆς AH . ἤχθω ἀπὸ τοῦ H τῇ AH πρὸς ὀρθὰς ἡ HA' , καὶ ἐπεξεύχθω ἡ AA' . τέμνουντες δὴ τὴν EB περιφέρειαν δίχα καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομεν τινὰ περιφέρειαν, ἣ ἐστὶν ἐλάσσων τῆς ὑποτετινομένης τοῦ
 20 $B\Gamma\Delta E$ κύκλου περιφερείας ὑπὸ τῆς ἴσης τῇ HA' . λελεῖφθω καὶ ἔστω ἡ KB περιφέρεια. ἐλάσσων ἄρα καὶ ἡ KB εὐθεία τῆς HA' . καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ ἐστὶ

XII, 17 inter ἐπιφάνειαν et δύο p. 240, 5—6 PBVq. De figura u. p. 231. pro A' in P scribitur α ; litteram hanc in fig. om. B.

6. οὕτω Bq. δύο] om. V. 7. πρὸς τὰ — πρίσματα] om. q. πυραμίδι δύο πρίσματα] om. V. 8. καί] καὶ ἔτι

serimus, erunt ut $MNO : \Sigma TT$, ita duo prismata pyramidis $MNOH$ ad duo prismata pyramidis $\Sigma TT\Theta$.
 uerum $MNO : \Sigma TT = AB\Gamma : \Delta EZ$. quare etiam ut $AB\Gamma : \Delta EZ$, ita duo prismata pyramidis $AB\Gamma H$ ad duo prismata pyramidis $\Delta EZ\Theta$ et duo prismata pyramidis $MNOH$ ad duo prismata pyramidis $\Sigma TT\Theta$,
 et quattuor ad quattuor. eadem autem etiam in prismatis ex diuisione pyramidum $AKAO$, $\Delta PP\Sigma$ ortis demonstrabuntur, et omnino in omnibus prismatis numero aequalibus; quod erat demonstrandum.

5.

Ad libr. XII prop. 17.

Iam aliter quoque promptius demonstrandum est, esse $A\Psi > AH$. ducatur ab H ad AH perpendicularis HA' , et ducatur AA' . iam arcum EB in duas partes aequales secantes et dimidiam partem eius in duas partes aequales et hoc semper facientes arcum quendam relinquemus minorem arcu circuli $B\Gamma\Delta E$, sub quo recta aequalis rectae HA' subtendit. relinquatur et sit arcus KB . itaque erit $KB < HA'$. et

-
- V. δύο] e corr. V. 9. τά] om. B. τέσσαρα B, corr. m. 2. 10. τά] om. q. τέσσαρα B, corr. m. 2. γινόμενων q. 11. τῶν] corr. ex τῷ m. 2 B. ΑΛΚΟ V. 12. ἰσοπληθῶν] εἰς τὸ πλῆθος q. 13. ὅπερ εἶδει δεῖξαι] om. BVφ; in V del. τι δὲ ἐστὶν ὡς τὸ Α. 15. ΑΗ] (prius) Η e corr. V, ΑΚ q. 16. ΗΑ'] ΗΑ Vq, Η Β. ΑΑ'] ΑΑ Vq, Α Β; mg. ἡ ΗΑ καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΑΑ m. 2 B. 18. τοῦτο] τὸ αὐτό q. 19. ἐστὶν] ἔσται q. 20. τῇ] τῆς B. ΗΑ'] ΗΑ V (Α e corr.) et Β (supra scr. Α m. 2), ΗΑ q. 21. ἐλήφθω q. 22. ΗΑ'] ΗΑ V, ΗΑ q, Η Β (supra scr. ΗΑ m. 2). ἔστιν P.

τὸ $BKΣO$ τετράπλευρον, καὶ εἰσιν ἴσαι αἱ OB , BK ,
 $KΣ$, καὶ ἐλάττων ἡ $OΣ$, ἀμβλεία ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ
 $BΨK$ γωνία. μείζων ἄρα ἡ KB τῆς $BΨ$. ἀλλὰ τῆς
 KB μείζων ἐστὶν ἡ HA' . πολλῶ ἄρα ἡ HA' μείζων
 5 ἐστὶ τῆς $BΨ$. μείζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς HA' τοῦ
 ἀπὸ τῆς $BΨ$. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AA' τῇ AB , ἴσον
 καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AA' τῷ ἀπὸ τῆς AB . ἀλλὰ τῷ μὲν
 ἀπὸ τῆς AA' ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν AH , HA' , τῷ δὲ ἀπὸ
 τῆς AB ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν $BΨ$, $ΨA$. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν
 10 AH , HA' ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν $BΨ$, $ΨA$, ὧν τὸ ἀπὸ
 τῆς $BΨ$ ἐλαττόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς HA' . λοιπὸν ἄρα
 τὸ ἀπὸ $ΨA$ μείζον ἐστι τοῦ ἀπὸ AH . μείζων ἄρα ἡ
 $AΨ$ τῆς AH .

6.

Ad libr. XIII prop. 6.

Ἐὰν ρητὴ εὐθεία ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ,
 15 ἐκάτερον τῶν τμημάτων ἀποτομή ἐστι. ρητὴ γὰρ ἡ
 AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ ση-
 μεῖον. σύμμετρον τμημὰ ἐστι τὸ $ΑΓ$. λέγω, ὅτι ἐκα-
 τέρα τῶν $ΑΓ$, ΓB ἀποτομή ἐστι. κείσθω τῆς AB
 ἡμίσεια ἡ $ΑΔ$. ρητὴ δὲ ἡ AB . ρητὴ ἄρα καὶ ἡ $ΑΔ$.
 20 καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς $\GammaΔ$ τοῦ ἀπὸ
 τῆς $ΔΑ$, ρητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῶν $ΔΑ$, ρητὸν ἄρα καὶ

6. Haec propositio inter libb. XII et XIII legitur in solo q (cfr. p. 246 adn. crit.). in re parum differt a XIII, 6, qualem recepinus; sed uerba magis abhorrent, quam ut scriptura codicis q inter discrepantias meras recipi possit. est detruncatio prop. 6 genuinae. cum praeterea scriptura erroribus scribarum plurimis laboret, interpretationem Latinam non dedi.

1. αἱ] om. q. 2. ὑπό] ὑπὸ τό B. 3. ἀλλά] ἀλλὰ καὶ q.
 4. HA'] HA V, AH q, $H B$ (supra scr. HA m. 2).

quoniam in circulo est $BKΣO$ quadrilaterum, et $OB = BK = KΣ$, minor autem $OΣ$, obtusus est $\angle BPK$. itaque $KB > BΨ$. uerum $HA' > KB$. itaque multo magis $HA' > BΨ$. quare etiam $A'H^2 > BΨ^2$. et quoniam $AA' = AB$, erit etiam $A'A^2 = AB^2$. uerum $AH^2 + A'H^2 = A'A^2$, $BΨ^2 + ΨA^2 = AB^2$. ergo $AH^2 + A'H^2 = BΨ^2 + ΨA^2$, quorum $BΨ^2 < A'H^2$. itaque $ΨA^2 > AH^2$. ergo $AΨ > AH$.

$HA'] HA V$ (A in ras.) et q, HA e corr. B. 5. $μεῖζον] με-$
 $ζων P.$ $HA'] HA V$ (A in ras.), HA q et B (A postea ins.).
 6. $τῆς] om. P.$ $AA'] AA V q$, $A B$ (supra scr. m. 2 AA).
 $τῆ] corr. ex τῆς P.$ 7. $AA'] AA V q$, AA postea ins.
 B. $τῶ] corr. ex τοῦ m. rec. P.$ $τῶ] corr. ex τό m. 1 q.$
 8. $AA'] AA V q$; $AH B$, AA m. 2. $AH] α ῆ B.$
 $HA'] HA V q$, $HA B.$ 10. $AH] ins. m. 2$ in spatio uacuo
 B. $HA'] HA V q$; $HA B$, corr. in HA . $ἴσα ἐστὶ V.$
 11. $ἐστὶ om V$; $ἐστὶν P.$ $τῆς] om. P.$ $HA'] ras. V$, HA
 q (H e corr. m. 1), $ῆας B$; seq. $καί$ comp. V. 12. $τῆς ΨA$
 $V q.$ $τῆς AH V q$; A mutat. in $A B$.

τὸ ἀπὸ τῶν $\Delta\Gamma$. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ
 τῆς $\Delta\Gamma$ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔA , τὸ ἄρα ἀπὸ τῶν $\Delta\Gamma$ πρὸς
 τὸ ἀπὸ τῶν ΔA λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς
 πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀλλ' ὃν μὲν ἀριθμὸς πρὸς
 5 ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $\Delta\Gamma$ τῇ ΔA μήκει.
 καὶ ἐστὶ ρητὴ ἑκατέρα· αἱ ΓA , ΔA ἄρα ρηταί εἰσι δυ-
 νάμει μόνον σύμμετροι. ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $A\Gamma$.
 ρητὴ δὲ ἡ AB , καὶ τῷ ἀπὸ τῶν $A\Gamma$ ἴσον παρὰ τὴν
 AB παραβέβληται τὸ ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$. τὸ δὲ α
 10 ἀποτομὴν παρὰ ρητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιῇ
 ἀποτομὴν πρῶτην. ἀποτομὴ ἄρα καὶ ἡ ΓB . ἑκατέρα
 ὁ ἄρα τὸν $A\Gamma$, ΓB ἀποτομὴ ἐστίν. ἐὰν ἄρα ρητὴ
 εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἐκάτερον τῶν
 τμημάτων ἀποτομὴ ἐστίν.

7.

Ad libr. XIII prop. 5.

15

Ἄλλως.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ,
 ἔσται ὡς συναμφοτέρως ἡ ὅλη καὶ τὸ μείζον τμήμα
 πρὸς τὴν ὅλην, οὕτως ἡ ὅλη πρὸς τὸ μείζον τμήμα.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τε-
 20 τμήσθω κατὰ τὸ Γ , καὶ ἔστω μείζον τμήμα τὸ $A\Gamma$.
 λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς συναμφοτέρως ἡ $BA\Gamma$ πρὸς AB ,
 οὕτως ἡ BA πρὸς $A\Gamma$.

Κείσθω γὰρ τῇ $A\Gamma$ ἴση ἡ AD . λέγω, ὅτι ἐστὶν

7. Hoc ἄλλως habet P post XIII, 6, q in textu pro XIII, 6, b mg. m. 1 post XIII, 5.

15. ἄλλως] om. q, in quo numerus prop. erasus est.
 16. μέσο q. 20. ἔστω] ἔσται b. 21. AB] BA P.

7.

Ad libr. XIII prop. 5.

Aliter.

Si recta linea secundum rationem extremam ac mediam secatur, erit ut tota cum parte maiore ad totam, ita tota ad partem maiorem.

nam recta AB in Γ secundum rationem extremam ac mediam secta sit, et maior pars sit AF . dico, esse $BA + AF : AB = BA : AF$. ponatur enim $AA = AF$. dico, esse $BA : BA = BA : AF$. nam quo-

ὡς ἡ BA πρὸς τὴν BA , οὕτως ἡ BA πρὸς τὴν AG .
 ἐπεὶ γὰρ ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ
 τὸ Γ , καὶ μείζον τμημὰ ἐστὶ τὸ AG , ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ
 BA πρὸς τὴν AG , οὕτως ἡ AG πρὸς τὴν GB . Ἰση
 5 δὲ ἡ AG τῇ AA · ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ BA πρὸς AA ,
 οὕτως ἡ AG πρὸς GB · ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ
 AA πρὸς τὴν AB , οὕτως ἡ BG πρὸς τὴν GA · συν-
 θέντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BA , οὕτως ἡ
 BA πρὸς AG . Ἰση δὲ ἐστὶν ἡ AA τῇ AG · ἐστὶν ἄρα
 10 ὡς συναμφοτέρως ἡ $BA\Gamma$ πρὸς τὴν AB , οὕτως ἡ
 BA πρὸς AG . καὶ ἐπεὶ δέδεικται ὡς ἡ AB πρὸς BA ,
 οὕτως ἡ BA πρὸς AG , Ἰση δὲ ἡ GA τῇ AA , ἐστὶν
 ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BA , οὕτως ἡ BA πρὸς τὴν
 AA . καὶ ἡ AB ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται
 15 κατὰ τὸ A , καὶ τὸ μείζον τμημὰ ἐστὶν ἡ $\xi\xi$ ἀρχῆς
 εὐθεΐα ἡ AB · ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

8.

Ad libr. XIII prop. 1—5.

Τί ἐστὶν ἀνάλυσις καὶ τί ἐστὶ σύνθεσις.

Ἀνάλυσις μὲν οὖν ἐστὶ λήψις τοῦ ζητουμένου ὡς
 ὁμολογουμένου διὰ τῶν ἀκολουθῶν ἐπὶ τι ἀληθὲς ὁμο-
 20 λογούμενον.

8. Hae analyses in meis codicibus coniunctae sunt. legun-
 tur in P (in quo demonstr. alt. prop. 5 sextam sequitur) post
 demonstrationem alteram prop. 5 (supra nr. 7 signatam), in B
 post prop. 6, in b post prop. 5 (prop. 6 deest), in q post pro-
 positionem in eo sextam, quam supra nr. 7 signavimus; in V
 analyses prop. 1—3 in textu sunt post prop. 6, prop. 4—5
 eodem loco mg. inf. m. 2.

2. AB] BA P. 4. BA] AB q. 5. $\delta\epsilon$] δ' P. AA]
 AA P. τὴν AA P. 7. AA] AB b. τήν] (prius) om. b.

niam AB in Γ secundum rationem extremam ac mediam secta est, et maior pars est $A\Gamma$, erit $BA : A\Gamma = A\Gamma : \Gamma B$. uerum $A\Gamma = \Delta A$. itaque $BA : \Delta A = A\Gamma : \Gamma B$. e contrario igitur $\Delta A : AB = B\Gamma : \Gamma A$. componendo igitur $\Delta B : BA = BA : A\Gamma$. uerum $\Delta A = A\Gamma$. itaque $BA + A\Gamma : AB = BA : A\Gamma$.¹⁾ et quoniam demonstrauius, esse $\Delta B : BA = BA : A\Gamma$, et $\Gamma A = \Delta A$, erit $\Delta B : BA = BA : \Delta A$. ergo etiam ΔB in A secundum rationem extremam ac mediam secta est, et maior pars est recta ab initio sumpta AB ; quod erat demonstrandum.



8.

Ad libr. XIII prop. 1—5.

Quid sit analysis, quid synthesis.

Analysis est adsertio eius, quod quaeritur, ut concessi, qua per consequentias ad aliquid peruenitur, quod uerum esse conceditur.

1) Hic perfecta est demonstratio propositionis, qualis in nostro *ἄλλως* exposita est. reliqua addita sunt, ut intellegatur, sub hac forma idem demonstrari ac in ipsa propositione 5, qualis in textu exposita est.

9. πρὸς] πρὸς τὴν P. δέ] δ' P. ΔΑ] ΔΔ P. 10. AB] BA P.
 11. τὴν ΔΓ P. 12. ΓΑ] ΑΓ P. ΔΑ] ΔΔ P.
 14. καί] (prius) om. P. 15. καί] om. b. 17. τί — σύν-
 θεσις] om. V. 18. μὲν οὖν] om. BVbq. ἐστὶν P.

Σύνθεσις δὲ λήψις τοῦ ὁμολογουμένου διὰ τῶν ἀκολουθῶν ἐπὶ τι ἀληθὲς ὁμολογούμενον.

Τοῦ \bar{a} θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ σύνθεσις
ἄνευ καταγραφῆς.

- 5 Εὐθεῖα γάρ τις ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τε-
τμήσθω κατὰ τὸ Γ , καὶ ἔστω μετξον τμήμα ἡ $A\Gamma$, καὶ
τῇ ἡμισείᾳ τῆς AB ἴση κείσθω ἡ $A\Delta$. λέγω, ὅτι
πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$ τοῦ ἀπὸ τῆς $A\Delta$.
Ἐπεὶ γὰρ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$ τοῦ
10 ἀπὸ τῆς ΔA , τὸ δὲ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$ ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν
 ΓA , $A\Delta$ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΓA , $A\Delta$, τὰ ἄρα
ἀπὸ τῶν ΓA , $A\Delta$ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΓA , $A\Delta$
πενταπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ $A\Delta$. διελόντι ἄρα τὸ ἀπὸ
τῆς ΓA μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΓA , $A\Delta$ τετραπλάσιά
15 ἐστι τοῦ ἀπὸ $A\Delta$. ἀλλὰ τῷ μὲν δις ὑπὸ τῶν ΓA ,
 $A\Delta$ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν BA , $A\Gamma$. διπλῇ γὰρ ἡ
 BA τῆς $A\Delta$. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς $A\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ
τῶν AB , $B\Gamma$. ἡ γὰρ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέ-
τμηται· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν BA , $A\Gamma$ μετὰ τοῦ ὑπὸ AB ,
20 $B\Gamma$ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς $A\Delta$. ἀλλὰ τὸ
ὑπὸ τῶν BA , $A\Gamma$ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ τὸ
ἀπὸ τῆς AB ἐστίν. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AB τετραπλά-
σιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ $A\Delta$. ἐστι δέ· διπλῇ γὰρ ἐστίν ἡ
 AB τῆς $A\Delta$.

2. τι ἀληθὲς ὁμολογούμενον] P, τὴν τοῦ ζητουμένου κατά-
ληξιν ἥτοι κατάληψιν BVbq. 10. τό] τοῦ b. ἐστίν B.

12. $A\Delta$] (alt.) corr. ex $A\Gamma$ m. 1 b. 13. ἐστίν P.
τῆς $A\Delta$ V. 14. τετραπλάσιόν Vq. 15. τῶν] om. bq.

16. τό] τοῦ b. τῶν] om. q. γὰρ ἐστίν bq. 17. τῷ]
corr. ex τῶν m. 2 P. $A\Gamma$] ΓA q. 19. AB] τῶν AB P.

20. τῆς] om. V. τό] τῷ q. 22. ἀπό] bis q. τῆς]

synthesis est adsertio concessi, qua per consequentias ad aliquid peruenitur, quod uerum esse conceditur.

Analysis et synthesis prop. I sine figura.

recta enim AB secundum rationem extremam ac mediam secetur in Γ , et maior pars eius sit $A\Gamma$, et ponatur $A\Delta = \frac{1}{2}AB$. dico, esse $\Gamma\Delta^2 = 5A\Delta^2$.

nam quoniam $\Gamma A^2 = 5A\Delta^2$, et

$$\Gamma\Delta^2 = \Gamma A^2 + A\Delta^2 + 2\Gamma A \times A\Delta \text{ [II, 4],}$$

erit $\Gamma A^2 + A\Delta^2 + 2\Gamma A \times A\Delta = 5A\Delta^2$. itaque subtrahendo $\Gamma A^2 + 2\Gamma A \times A\Delta = 4A\Delta^2$. uerum



$BA \times A\Gamma = 2\Gamma A \times A\Delta$ (nam $BA = 2A\Delta$), et $A\Gamma^2 = AB \times B\Gamma$ (nam AB secundum rationem extremam ac mediam secta est). itaque $BA \times A\Gamma + AB \times B\Gamma = 4A\Delta^2$. uerum $BA \times A\Gamma + AB \times B\Gamma = AB^2$ [II, 2]. ergo $AB^2 = 4A\Delta^2$. et est; nam $AB = 2A\Delta$.

om. P. ἔστι V, ἴσον ἐστὶ bq. ἀπό] ὑπό b. 23. ἀπὸ]
ἀπὸ τῆς V, ὑπό b.

Σύνθεσις.

Ἐπεὶ οὖν τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς AD , ἀλλὰ τὸ ἀπὸ BA τὸ ὑπὸ BA , AG ἐστι μετὰ τοῦ ὑπὸ AB , BG , τὸ ἄρα ὑπὸ BA , AG μετὰ
 5 τοῦ ὑπὸ AB , BG τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ AD . ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν BA , AG ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν DA , AG , τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AB , BG ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AG . τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AG μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν DA , AG τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς DA .
 10 ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν DA , AG μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν DA , AG πενταπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς DA . τὰ δὲ ἀπὸ τῶν DA , AG μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν DA , AG τὸ ἀπὸ τῆς GD ἐστίν. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς GD πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς DA . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15 Τοῦ \bar{b} θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ σύνθεσις
 ἄνευ καταγραφῆς.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ GD τμήματος ἐαυτῆς τοῦ DA πενταπλάσιον δυνάσθω, τῆς δὲ DA διπλῇ κείσθω ἡ AB . λέγω, ὅτι ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται
 20 κατὰ τὸ Γ σημείον, καὶ τὸ μείζον τμήμά ἐστίν ἡ AG , ἥτις ἐστὶ τὸ λοιπὸν μέρος τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας.

Ἐπεὶ ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ , καὶ τὸ μείζον τμήμά ἐστίν ἡ AG , τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ABG ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AG . ἐστὶ δὲ καὶ τὸ
 25 ὑπὸ τῶν BAG τῷ δις ὑπὸ τῶν DA , AG ἴσον. διπλῇ γάρ ἐστίν ἡ BA τῆς AD . τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AB , BG μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν BA , AG , ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς

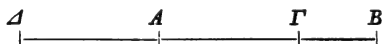
2. BA BV , $B'A'$ b. 3. ἐστίν B. 11. πενταπλάσιόν
 Vq. 13. ἐστίν] ἐστι Vq, comp. b. 14. ὅπερ ἔδει δεῖξαι]

synthesis.

Iam quoniam $AB^2 = 4AA^2$, et $BA^2 = BA \times A\Gamma + AB \times B\Gamma$ [II, 2], erunt $BA \times A\Gamma + AB \times B\Gamma = 4AA^2$. uerum $BA \times A\Gamma = 2AA \times A\Gamma$, $AB \times B\Gamma = A\Gamma^2$. itaque $A\Gamma^2 + 2AA \times A\Gamma = 4AA^2$. quare $AA^2 + A\Gamma^2 + 2AA \times A\Gamma = 5AA^2$. uerum $AA^2 + A\Gamma^2 + 2AA \times A\Gamma = \Gamma A^2$ [II, 4]. ergo $\Gamma A^2 = 5AA^2$; quod erat demonstrandum.

Analysis et synthesis prop. II sine figura.

quadratum enim rectae ΓA quintuplum sit quadrati partis eius AA , et ponatur $AB = 2AA$. dico,



rectam AB secundum rationem extremam ac mediam in puncto Γ sectam esse, et maiorem partem esse $A\Gamma$, quae reliqua pars est rectae ab initio sumptae.

quoniam AB in Γ secundum rationem extremam ac mediam secta est, et maior pars est $A\Gamma$, erit $AB \times B\Gamma = A\Gamma^2$. uerum etiam $BA \times A\Gamma = 2AA \times A\Gamma$; nam $BA = 2AA$. itaque erit $AB \times B\Gamma + BA \times A\Gamma$

- | | | |
|---------------------|----------------------|-------------------|
| om. q, o) — b. | 15. ῆ] (alt.) om. P. | 19. λόγον] om. b. |
| 20. σημειον] om. V. | 20. τῷ] om. b q. | 21. ἐστίν P. |
| 22. ἐπὶ γὰρ B V. | 25. BA, AΓ b. | 26. BA] AB q. |
| 27. τοῦ] om. q. | τῶν] om. B b q. | ἐστίν P. |

AB , ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν $\triangle A$, AG μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AG . τετραπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς $\triangle A$ · τετραπλάσιον ἄρα καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν $\triangle A$, AG μετὰ τοῦ ἀπὸ AG τοῦ ἀπὸ AD . ὥστε τὰ
 5 ἀπὸ τῶν $\triangle A$, AG μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $\triangle A$, AG , ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς GD , πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς $\triangle A$. ἐστὶ δέ.

Σύνθεσις.

Ἐπεὶ οὖν πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς GD τοῦ
 10 ἀπὸ τῆς $\triangle A$, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς GD τὰ ἀπὸ τῶν $\triangle A$, AG ἐστὶ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $\triangle A$, AG , τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $\triangle A$, AG μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $\triangle A$, AG πενταπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ $\triangle A$. διελόντι τὸ δις ὑπὸ τῶν $\triangle A$, AG μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AG τετραπλάσιόν ἐστι
 15 τοῦ ἀπὸ τῆς AD · ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τετραπλάσιον τοῦ ἀπὸ AD · τὸ ἄρα δις ὑπὸ τῶν $\triangle A$, AG , ὅπερ ἐστὶ τὸ ἅπαξ ὑπὸ τῶν BA , AG , μετὰ τοῦ ἀπὸ AG , ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB . ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς AB τὸ ὑπὸ AB , BG ἐστὶ μετὰ τοῦ ὑπὸ BA , AG .
 20 τὸ ἄρα ὑπὸ BA , AG μετὰ τοῦ ὑπὸ AB , BG ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ BA , AG μετὰ τοῦ ἀπὸ AG · καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ὑπὸ BA , AG , λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ AB , BG ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ AG · ἐστὶν ἄρα ὥς ἡ BA πρὸς τὴν AG , οὕτως ἡ AG πρὸς τὴν GB . μείζων δὲ
 25 ἡ BA τῆς AG · μείζων ἄρα καὶ ἡ AG τῆς GB · ἡ AB ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ G , καὶ τὸ μείζον τμημά ἐστὶν ἡ AG · ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

4. ἀπὸ τῆς AG V. τῆς AD V. τὰ] τό q. 5. μετὰ
 — AG] supra m. 2 B. ὑπὸ] ἀπό q. 6. ἐστίν PB.

$= 2 \Delta A \times A\Gamma + A\Gamma^2 = AB^2$ [II, 2]. sed $AB^2 = 4 \Delta A^2$.
itaque etiam $2 \Delta A \times A\Gamma + A\Gamma^2 = 4 \Delta A^2$. quare
 $\Delta A^2 + A\Gamma^2 + 2 \Delta A \times A\Gamma = 5 \Delta A^2 = \Gamma \Delta^2$ [II, 4].
et est.

synthesis.

iam quoniam $\Gamma \Delta^2 = 5 \Delta A^2$, et $\Gamma \Delta^2 = \Delta A^2 + A\Gamma^2$
 $+ 2 \Delta A \times A\Gamma$ [II, 4], erit $\Delta A^2 + A\Gamma^2 + 2 \Delta A$
 $\times A\Gamma = 5 \Delta A^2$. subtrahendo erit $2 \Delta A \times A\Gamma + A\Gamma^2$
 $= 4 \Delta A^2$. uerum etiam $AB^2 = 4 \Delta A^2$. itaque $2 \Delta A$
 $\times A\Gamma + A\Gamma^2 = AB^2 = BA \times A\Gamma + A\Gamma^2$. uerum
 $AB^2 = AB \times B\Gamma + BA \times A\Gamma$ [II, 2]. itaque BA
 $\times A\Gamma + AB \times B\Gamma = BA \times A\Gamma + A\Gamma^2$. et ablato,
quod commune est, $BA \times A\Gamma$ erit $AB \times B\Gamma = A\Gamma^2$.
itaque $BA : A\Gamma = A\Gamma : \Gamma B$. et $BA > A\Gamma$. itaque
etiam $A\Gamma > \Gamma B$. ergo AB secundum rationem ex-
tremam ac mediam in Γ secta est, et maior pars est
 $A\Gamma$; quod erat demonstrandum.

τό] om. B. πενταπλάσια B, comp. V. 7. τῆς] om. P.
ἔστιν Bb, om. q. δέ] om. q, ΔΕ b; dein add. διὰ τὴν ὑπό-
θεσιν BVq, mg. m. 1 b. 10. τὰ] τό BV. 11. ἔστιν B.
ἀπό] corr. ex ὑπό V. 13. ἔστι] om. V. ΔΔ q, τῆς
ΔΑ V. 15. τῆς] om. P. ἔστιν B. ἀπό] corr. ex ἄ m.
1 P. 16. τῆς ΔΔ V. τῶν] om. P. 17. ἔστιν B.
18. ἀλλὰ — τῆς AB] postea add. m. 1 mg. P. 19. ὑπὸ τῶν
V. ἔστιν B. 20. ὑπό] (alt.) ἀπό q. ἴσον — 21. ΒΑ,
ΑΓ] postea add. m. 1 mg. P. 21. τῶ] corr. ex τό m. 2 P.
23. ΑΒ, ΒΓ] corr. ex ΑΒΓ V; ΑΒ b, ΑΒΓ B.
25. ΑΓ] (prius) ΓΑ q. ἄρα ΑΒ V. 27. ὅπερ ἔδει
δειξαι] om. Vq, o) — b.

Τοῦ γ θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ
σύνθεσις.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον
τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημείον, καὶ ἔστω μείζον τμήμα
5 ἡ AG , καὶ τῆς AG ἡμίσεια ἡ GA' . λέγω, ὅτι πεντα-
πλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς BA τοῦ ἀπὸ τῆς GA .

Ἐπεὶ γὰρ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς BA τοῦ
ἀπὸ τῆς GA , τὸ δὲ ἀπὸ τῆς AB τὸ ὑπὸ τῶν AB ,
 BG ἐστι μετὰ τοῦ ἀπὸ AG , τὸ ἄρα ὑπὸ AB , BG
10 μετὰ τοῦ ἀπὸ AG πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ AG .
διελόντι τὸ ἄρα ὑπὸ AB , BG τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ
ἀπὸ AG . τῷ δὲ ὑπὸ AB , BG ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς
 AG . ἡ γὰρ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ
τὸ Γ . τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AG τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ
15 AG . ἐστι δέ· διπλὴ γὰρ ἡ AG τῆς AG .

Ἡ σύνθεσις.

Ἐπεὶ διπλὴ ἐστὶν ἡ AG τῆς AG , τετραπλάσιόν
ἐστι τὸ ἀπὸ AG τοῦ ἀπὸ AG . ἀλλὰ τῷ ἀπὸ AG
ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ AB , BG . τὸ ἄρα ὑπὸ AB , BG
20 τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ AG . συνθέντι τὸ ἄρα ὑπὸ
 AB , BG μετὰ τοῦ ἀπὸ AG , ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ AB ,
πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ AG . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τοῦ δ θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ
σύνθεσις.

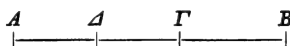
25 Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον
τετμήσθω κατὰ τὸ Γ , καὶ ἔστω μείζον τμήμα τὸ AG .

1. ἡ] (alt.) om. q. 3. γάρ] om. bq. λόγον] om. P.
8. $\angle B$] e corr. V, BA q. 9. $B\Gamma$] corr. ex AG m. 2 B.

Analysis et synthesis prop. III.

recta enim AB in Γ puncto secundum rationem extremam ac mediam secetur, et maior pars sit $A\Gamma$ et $\Gamma\Delta = \frac{1}{2}A\Gamma$. dico, esse $B\Delta^2 = 5\Gamma\Delta^2$.

nam quoniam $B\Delta^2 = 5\Gamma\Delta^2$, et $\Delta B^2 = AB \times B\Gamma + \Delta\Gamma^2$ [II, 6], erit $AB \times B\Gamma + \Delta\Gamma^2 = 5\Delta\Gamma^2$. subtrahendo erit $AB \times B\Gamma = 4\Delta\Gamma^2$. uerum $A\Gamma^2 = AB$



$\times B\Gamma$; nam AB in Γ secundum rationem extremam ac mediam secta est. ergo $A\Gamma^2 = 4\Delta\Gamma^2$. et est; nam $A\Gamma = 2\Delta\Gamma$.

synthesis.

quoniam $A\Gamma = 2\Delta\Gamma$, erit $A\Gamma^2 = 4\Delta\Gamma^2$. uerum $AB \times B\Gamma = A\Gamma^2$. itaque $AB \times B\Gamma = 4\Delta\Gamma^2$. addendo erit $AB \times B\Gamma + \Delta\Gamma^2 = 5\Delta\Gamma^2 = \Delta B^2$ [II, 6]; quod erat demonstrandum.

Analysis et synthesis prop. IV.

recta enim AB in Γ secundum rationem extremam ac mediam secetur, et maior pars sit $A\Gamma$. dico, esse $AB^2 + B\Gamma^2 = 3A\Gamma^2$.

- | | | | |
|--|--|---------------------------------------|--|
| $\Delta\Gamma$ V. | $\tau\eta\varsigma \Delta\Gamma$ V, $\Gamma\Delta$ P. | 11. ἄρα τό BV. | 15. $\tau\eta\varsigma$ |
| 18. $\tau\tilde{\omega}$] corr. ex τό m. 1 b. | $\xi\sigma\tau\iota\nu$ B. | 16. η] om. Bq. | 17. $\Gamma\Delta$ P. |
| om. P. | 22. $\xi\sigma\tau\iota\nu$ P. | $\acute{\alpha}\pi\acute{o}$] om. b. | 20. $\acute{\alpha}\pi\acute{o}$] (prius) |
| 23. η] (alt.) om. q. | $\delta\pi\epsilon\rho \xi\delta\epsilon\iota \delta\epsilon\iota\chi\epsilon\alpha\iota$] om. q, o) — b. | | |
| | 25. $\gamma\acute{\alpha}\rho$] om. bq. | | |

λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ $ΑΓ$.

Ἐπεὶ γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ $ΑΓ$, ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ τὸ δις ὑπὸ τῶν
 5 AB , $B\Gamma$ ἐστὶ μετὰ τοῦ ἀπὸ $ΑΓ$, τὸ ἄρα δις ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ μετὰ τοῦ ἀπὸ $ΑΓ$ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ $ΑΓ$. διελόντι τὸ ἄρα δις ὑπὸ AB , $B\Gamma$ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ $ΑΓ$. ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$. ἐστὶ δέ· ἢ γὰρ AB ἄκρον καὶ μέσον
 10 λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ .

Ἡ σύνθεσις.

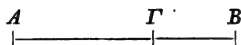
Ἐπεὶ ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ , καὶ ἐστὶ μείζον τμήμα ἡ $ΑΓ$, τὸ ἄρα ὑπὸ AB , $B\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ $ΑΓ$. τὸ ἄρα δις ὑπὸ AB , $B\Gamma$
 15 διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ $ΑΓ$. συνθέντι τὸ ἄρα δις ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ μετὰ τοῦ ἀπὸ $ΑΓ$ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ $ΑΓ$. ἀλλὰ τὸ δις ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ τὰ ἀπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ ἐστὶ τετράγωνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ $ΑΓ$.
 20 ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τοῦ ε θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ
 σύνθεσις.

Εὐθέα γάρ τις ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τε-
 τμήσθω κατὰ τὸ Γ , καὶ ἔστω μείζον τμήμα ἡ $ΑΓ$,
 25 καὶ τῇ $ΑΓ$ ἴση κείσθω ἡ $ΑΔ$. λέγω, ὅτι ἡ $ΑΒ$ ἄκρον
 καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ A , καὶ τὸ μείζον
 τμήμά ἐστὶν ἡ AB .

5. τοῦ] om. V. 6. ἐστὶν P. 7. τῶν AB V.
 διπλάσιον — 8. $B\Gamma$] om. q. 8. τό] om. b. ὑπό] ἀπό V,

nam quoniam $AB^2 + B\Gamma^2 = 3A\Gamma^2$, sed $AB^2 + B\Gamma^2 = 2AB \times B\Gamma + A\Gamma^2$ [II, 7], erit $2AB \times B\Gamma + A\Gamma^2 = 3A\Gamma^2$. subtrahendo erit $2AB \times B\Gamma = 2A\Gamma^2$.



quare $AB \times B\Gamma = A\Gamma^2$. et est; nam AB secundum rationem extremam ac mediam in Γ secta est.

synthesis.

quoniam AB secundum rationem extremam ac mediam in Γ secta est, et maior pars est $A\Gamma$, erit $AB \times B\Gamma = A\Gamma^2$. itaque $2AB \times B\Gamma = 2A\Gamma^2$. addendo erit $2AB \times B\Gamma + A\Gamma^2 = 3A\Gamma^2$. uerum $2AB \times B\Gamma + A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2$ [II, 7]. ergo $AB^2 + B\Gamma^2 = 3A\Gamma^2$; quod erat demonstrandum.

Analysis et synthesis prop. V.

recta enim AB in Γ secundum rationem extremam ac mediam secetur, et maior pars sit $A\Gamma$, et ponatur $A\Delta = A\Gamma$. dico, ΔB in A secundum rationem extremam ac mediam sectam esse, et partem maiorem esse AB .

$\alpha\pi\alpha\tilde{\xi}$ $\dot{\nu}\pi\acute{o}$ B b. 9. $\tau\tilde{\omega}$] supra scr. o m. 1 b. $\tau\tilde{\eta}\varsigma$] om. B.
 $\xi\sigma\tau\iota\nu$ B. 10. Γ $\acute{o}\pi\epsilon\rho$ $\xi\delta\epsilon\iota$ $\delta\epsilon\iota\tilde{\xi}\alpha\iota$ B. 11. η] om. Bb.
 13. $\kappa\alpha\iota$ — $A\Gamma$] postea add. m. 1 P, mg. m. 1 V ($A\Gamma$ e corr.)
 14. $\dot{\iota}\sigma\omicron\nu$ — $B\Gamma$] mg. m. 2 B. $\tau\tilde{\omega}$] $\tau\acute{o}$ q. $\dot{\alpha}\pi\acute{o}$] om. B.
 $\dot{\nu}\pi\acute{o}$ $\tau\tilde{\omega}\nu$ B. 15. $\delta\iota\pi\lambda\acute{\alpha}\sigma\iota\omicron\nu$ — $A\Gamma$] etiam in mg. a m. 2 B ($\tau\tilde{\eta}\varsigma$ $A\Gamma$). 18. $\tau\tilde{\eta}\varsigma$] om. q. $\xi\sigma\tau\iota\nu$ P. 19. $B\Gamma$ $\tau\epsilon\tau\rho\acute{\alpha}\gamma\omega\nu\alpha$ B b q. 20. $\acute{o}\pi\epsilon\rho$ $\xi\delta\epsilon\iota$ $\delta\epsilon\iota\tilde{\xi}\alpha\iota$] om. q, o) — b.
 21. η] (alt.) om. V.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΔB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται
κατὰ τὸ A , καὶ τὸ μείζον τμημὰ ἐστὶν ἡ AB , ἔστιν
ἄρα ὡς ἡ ΔB πρὸς τὴν BA , οὕτως ἡ BA πρὸς τὴν
 AD . ἴση δὲ ἡ AD τῇ AG · ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔB πρὸς
5 τὴν BA , οὕτως ἡ BA πρὸς τὴν AG · ἀναστρέψαντι
ἄρα ὡς ἡ BA πρὸς τὴν AD , οὕτως ἡ AB πρὸς τὴν
 BG · διελόντι ἄρα ὡς ἡ BA πρὸς τὴν AD , οὕτως ἡ
 AG πρὸς τὴν GB . ἴση δὲ ἡ AD τῇ AG · ἔστιν ἄρα
ὡς ἡ BA πρὸς τὴν AG οὕτως ἡ AG πρὸς τὴν GB .
10 ἔστι δέ· ἡ γὰρ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται
κατὰ τὸ Γ .

Ἡ σύνθεσις.

Ἐπεὶ ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ
τὸ Γ , ἔστιν ἄρα ὡς ἡ BA πρὸς τὴν AG , οὕτως ἡ
15 AG πρὸς τὴν GB . ἴση δὲ ἡ AG τῇ AD · ἔστιν ἄρα
ὡς ἡ BA πρὸς τὴν AD , οὕτως ἡ AG πρὸς τὴν GB ·
συνθέντι ὡς ἡ BA πρὸς τὴν AD , οὕτως ἡ AB πρὸς
τὴν BG · ἀναστρέψαντι ὡς ἡ ΔB πρὸς τὴν BA , οὕτως
ἡ BA πρὸς τὴν AG . ἴση δὲ ἡ AG τῇ AD · ἔστιν ἄρα
20 ὡς ἡ ΔB πρὸς BA , οὕτως ἡ BA πρὸς AD . ἡ ἄρα
 ΔB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ A , καὶ
τὸ μείζον τμημὰ ἐστὶν ἡ AB · ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

9.

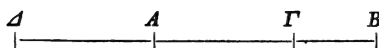
Ad libr. XIII prop. 17.

Ῥητὴ γὰρ ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω
κατὰ τὸ Γ , καὶ ἔστω μείζον τὸ AG . προσκείσθω δὲ

9. Ad vocabulum κύβον p. 326, 19 signo \mathcal{S} relatum in mg.
inf. hab. P m. 1 (pro scholio).

1. ἐπεὶ — 2. AB] mg. V. 1. γὰρ] οὖν V. 2. κατὰ
τὸ A] om. V. 6. $B\Delta$] corr. ex BA m. 2B. 8. ἴση — 9.

nam quoniam ΔB in A secundum rationem extremam ac mediam secta est, et maior pars est AB , erit $\Delta B : BA = BA : \Delta A$. sed $\Delta A = \Delta \Gamma$. itaque $\Delta B : BA = BA : \Delta \Gamma$. itaque conuertendo erit $B\Delta$



$: \Delta A = AB : B\Gamma$ [V, 19 coroll.]. dirimendo igitur $BA : \Delta A = \Delta \Gamma : \Gamma B$ [V, 17]. sed $\Delta A = \Delta \Gamma$. itaque $BA : \Delta \Gamma = \Delta \Gamma : \Gamma B$. et est; nam AB secundum rationem extremam ac mediam in Γ secta est.

synthesis.

quoniam AB in Γ secundum rationem extremam ac mediam secta est, erit $BA : \Delta \Gamma = \Delta \Gamma : \Gamma B$. sed $\Delta \Gamma = \Delta A$. itaque $BA : \Delta A = \Delta \Gamma : \Gamma B$. componendo igitur $B\Delta : \Delta A = AB : B\Gamma$ [V, 18]. itaque conuertendo $\Delta B : BA = BA : \Delta \Gamma$ [V, 19 coroll.]. sed $\Delta \Gamma = \Delta A$. erit igitur $\Delta B : BA = BA : \Delta A$. ergo ΔB in A secundum rationem extremam ac mediam secta est, et maior pars est AB ; quod erat demonstrandum.

9.

Ad libr. XIII prop. 17.¹⁾

recta enim rationalis AB in Γ secundum rationem extremam ac mediam secetur, et maior sit $\Delta \Gamma$. ad-

1) Hoc scholio idem demonstratur, quod in prop. VI, quam omittunt codices nonnulli; inter eos tamen P non est.

ΓB] mg. m. 2 B. 12. η] om. Bq. 17. $\tau\eta\gamma$] om. q.
 19. $\tau\eta \Delta A$] in ras. m. 1 P. 20. $\pi\rho\acute{o}s \tau\eta\gamma BA$ V. $\tau\eta\gamma \Delta A$
 Vb. 21. $\kappa\alpha\tau\grave{\alpha} \tau\acute{o} A$] postea add. m. 1 P. 22. $\delta\pi\epsilon\rho \xi\delta\epsilon\iota$
 $\delta\epsilon\iota\xi\alpha\iota$] om. q, o) — b. $\delta\epsilon\iota\xi\alpha\iota$] :~ V.

ἡ $ΑΔ$ ἡμίσεια τῆς $ΑΒ$. ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ $ΑΔ$. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιον τὸ ἀπὸ $ΓΔ$ τοῦ ἀπὸ $ΔΑ$, αἱ $ΓΔ$, $ΔΑ$ ἄρα ῥηταὶ εἰσιν δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἀποτομὴ ἄρα ἡ $ΑΓ$. ῥητὴ δὲ ἡ $ΑΒ$. τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς
 5 παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $ΒΓ$. ἐκάτερον ἄρα τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ ἀποτομὴ ἐστὶν ὁ· προσαρμόζουσα δὲ τῆς μὲν $ΑΓ$ ἡ $ΑΔ$, τῆς δὲ $ΓΒ$ ἡ $ΓΔ$.

10.

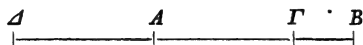
Ad libr. XIII prop. 18.

- Ἄλλως ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ $ΜΒ$ τῆς $ΝΒ$.
 10 Ἐπεὶ γὰρ διπλὴ ἐστὶν ἡ $ΑΔ$ τῆς $ΔΒ$, τριπλὴ ἄρα ἡ $ΑΒ$ τῆς $ΒΔ$. ὥς δὲ ἡ $ΑΒ$ πρὸς τὴν $ΒΔ$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΖ$ διὰ τὸ ἰσογώνιον εἶναι τὸ $ΖΑΒ$ τρίγωνον τῷ $ΖΔΒ$ τριγώνῳ. τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΒΖ$. ἐδείχθη
 15 δὲ τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΒ$ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΚΑ$ πενταπλάσιον. πέντε ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς $ΚΑ$ τρισι τοῖς ἀπὸ τῆς $ΖΒ$ ἴσα ἐστίν. ἀλλὰ τρία τὰ ἀπὸ τῆς $ΖΒ$ ἕξ τῶν ἀπὸ τῆς $ΝΒ$ μείζονά ἐστιν. καὶ πέντε ἄρα τὰ ἀπὸ τῆς $ΚΑ$ ἕξ τῶν ἀπὸ τῆς $ΝΒ$ μείζονά ἐστιν. ὥστε καὶ ἐν τὸ
 20 ἀπὸ τῆς $ΚΑ$ ἐνὸς τοῦ ἀπὸ τῆς $ΝΒ$ μείζον ἐστὶν. μείζων ἄρα ἡ $ΚΑ$ τῆς $ΝΒ$. ἴση δὲ ἡ $ΚΑ$ τῇ $ΑΜ$. μείζων ἄρα ἡ $ΑΜ$ τῆς $ΝΒ$. πολλῶν ἄρα ἡ $ΜΒ$ τῆς $ΒΝ$ μείζων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. ὅτι δὲ τρία τὰ ἀπὸ τῆς $ΖΒ$ ἕξ τῶν ἀπὸ τῆς $ΒΝ$ μείζονά ἐστιν, δεί-

10. Post δεῖξαι p. 336, 14 hab. PBVq.

7. ὁ] h. e. ὅπερ ἔδει δεῖξαι. 9. Post $ΝΒ$ add. V: ἄλλως δεικτέον, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ τῆς

iiciatur autem $AA = \frac{1}{2} AB$. itaque etiam AA rationalis est. et quoniam est $\Gamma A^2 = 5AA^2$ [XIII, 1], rectae ΓA , AA rationales sunt potentia solum commensurabiles. itaque AG apotome est. sed AB ra-



tionalis est. quadratum autem apotomes ad rationalem adplicatum latitudinem efficit apotomen [X, 97]. itaque $B\Gamma$ apotome est; ergo utraque AG , ΓB apotome est; quod erat demonstrandum. congruens autem est AG rectae AA , et ΓA rectae ΓB .

10.

Ad libr. XIII prop. 18.

Aliter demonstratur, esse $MB > NB$.

Quoniam enim $AA = 2AB$, erit $AB = 3BA$. sed $AB : BA = AB^2 : BZ^2$, quia $ZAB \sim ZAB$. itaque $AB^2 = 3BZ^2$. demonstrauius autem, esse $AB^2 = 5KA^2$. itaque $5KA^2 = 3BZ^2$. uerum $3BZ^2 > 6NB^2$. itaque etiam $5KA^2 > 6NB^2$. quare etiam $KA^2 > NB^2$. itaque $KA > NB$. uerum $KA = AM$. itaque $AM > NB$. ergo multo magis $MB > BN$; quod erat demonstrandum. — esse autem $3BZ^2 > 6BN^2$, ita demonstrauius. quoniam enim $BN > NZ$, erit

τοῦ δωδεκαέδρου. 11. $BA] AB BV$. $BA] AB V$.
 13. εἶναι] om. V. 14. $BZ] ZB V$. 18. ἐστὶ q. 20. ἐστὶ
 $BV q$. 23. $BN] NB B, \ddot{N}BN V$. $\mu\epsilon\lambda\lambda\omega\nu \epsilon\sigma\tau\acute{\iota}\nu$] om. BV .
 ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. q. 24. $\tau\eta\varsigma$] (prius) $\tau\omega\nu V q$.
 ἐστὶ $BV q$.

ξομεν οὕτως· ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ *BN* τῆς *NZ*,
 τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν *ZBN* μείζον ἐστὶ τοῦ ὑπὸ *BZN*.
 τὸ ἄρα ὑπὸ *ZBN* μετὰ τοῦ ὑπὸ *BZN* μείζον ἐστὶν
 ἢ διπλάσιον τοῦ ὑπὸ *BZN*. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ *ZBN*
 5 μετὰ τοῦ ὑπὸ *BZN* τὸ ἀπὸ τῆς *ZB* ἐστὶν, τὸ δὲ ὑπὸ
BZN τὸ ἀπὸ τῆς *NB* ἐστὶν. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς *ZB*
 τοῦ ἀπὸ τῆς *BN* μείζον ἐστὶν ἢ διπλάσιον. Ἐν ἄρα
 τὸ ἀπὸ τῆς *ZB* δύο τῶν ἀπὸ *BN* μείζον ἐστὶν. ὥστε
 καὶ τρία τὰ ἀπὸ τῆς *ZB* ἕξ τῶν ἀπὸ *BN* μείζονά
 10 ἐστὶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

-
- | | | |
|--|---|--------------------------|
| 1. ἐστίν] om. q. | <i>BN</i>] <i>NB</i> q, <i>BNB</i> V. | 2. τοῦ ὑπό] |
| τοῦ ὑπό τῆς V, τοῦ ὑπό τῶν q, τοῦ ἀπὸ τῆς B. | | 3. τό] corr. |
| ex τὰ m. 2 V, mut. in τὰ B. | τῶν <i>ZBN</i> q. | Post τοῦ |
| del. α P. | 4. <i>BZN</i>] corr. ex <i>ZBN</i> m. 2 B. | 5. <i>ZB</i>] <i>BZ</i> |
-

$ZB \times BN > BZ \times ZN$. itaque $ZB \times BN + BZ \times ZN > 2BZ \times ZN$. uerum $ZB \times BN + BZ \times ZN = ZB^2$ [II, 2], et $BZ \times ZN = NB^2$. itaque $ZB^2 > 2BN^2$. ergo etiam $3ZB^2 > 6BN^2$; quod erat demonstrandum.

B. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ q, comp. V. $\acute{\upsilon}\pi\acute{o}$ $\tau\acute{\omega}\nu$ V. 6. BZN] e corr. V. $\tau\acute{o}$] $\tau\acute{o}$, supra scr. $\acute{\iota}\sigma\omicron\nu$ m. 2 B, $\acute{\iota}\sigma\omicron\nu$ $\tau\acute{\omega}$ P. NB] $\acute{\epsilon}\acute{\nu}\acute{\nu}\acute{\nu}$ V. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$] om. P. Dein add. $\acute{\alpha}\kappa\rho\omicron\nu$ $\gamma\acute{\alpha}\rho$ (supra V) $\kappa\alpha\iota$ $\mu\acute{\epsilon}\sigma\omicron\nu$ $\lambda\acute{o}\gamma\omicron\nu$ $\tau\acute{\epsilon}\tau\mu\eta\tau\alpha\iota$ η BZ $\kappa\alpha\tau\acute{\alpha}$ $\tau\acute{o}$ N , $\kappa\alpha\iota$ $\tau\acute{o}$ $\acute{\upsilon}\pi\acute{o}$ $\tau\acute{\omega}\nu$ $\acute{\alpha}\kappa\rho\omega\nu$ $\acute{\iota}\sigma\omicron\nu$ $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota$ $\tau\acute{\omega}$ $\acute{\alpha}\pi\acute{o}$ $\tau\eta\varsigma$ $\mu\acute{\epsilon}\sigma\eta\varsigma$ V, et mg. m. 2 B. 7. $\acute{\epsilon}\nu$] corr. ex $\acute{\epsilon}\acute{\alpha}\nu$ m. 1 q. 8. $\tau\acute{\omega}\nu$] $\tau\eta\varsigma$ P. $\acute{\alpha}\pi\acute{o}$ $\tau\acute{\omega}\nu$ V. 10. $\acute{\epsilon}\sigma\tau\iota\nu$] om. q. $\acute{o}\pi\epsilon\rho$ $\acute{\epsilon}\delta\epsilon\iota$ $\delta\epsilon\acute{\iota}\xi\alpha\iota$] om. V.



APPENDIX II.



XI.

λς'.

36

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσι, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τριῶν στερεὸν ἴσον ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς μέσης στερεῷ ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.

ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ A, B, Γ , ὡς ἡ A πρὸς τὴν B , οὕτως ἡ B πρὸς τὴν Γ . λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν A, B, Γ περιεχόμενον στερεὸν ἴσον ἔστί τῷ ἀπὸ τῆς B στερεῷ ἰσοπλεύρῳ τε καὶ ἰσογωνίῳ. κείσθω τῇ A ἴση ἡ AE , καὶ συνεστιάτω πρὸς τῇ EA εὐθείᾳ καὶ τῷ σημείῳ τῷ Δ τυχούσῃ στερεᾷ γωνία εὐθυγράμμῳ ἴση στερεὰ γωνία εὐθύγραμμος ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν $ZA, \Delta H, HA, \Delta E, ZA, \Delta \Theta$, καὶ κείσθω τῇ μὲν B ἴση ἡ HA , τῇ δὲ Γ ἴση ἡ ΘA , καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΔK στερεόν, καὶ κείσθω τῇ B ἴση ἡ AM , καὶ συνεστιάτω πρὸς τῇ MA εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Λ τῇ στερεᾷ γωνία εὐθυγράμμῳ τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν $\Theta A, \Delta E, EA, \Delta H, HA, \Delta \Theta$ ἴση στερεὰ γωνία εὐθύγραμμος ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν $MA, \Lambda N, NA, \Lambda \Xi, \Xi A, \Lambda M$, ὥστε

Hic appendix scripturam cod. b inde a XI, 36 ad finem libri XII continet nulla littera mutata. quamquam sine dubio plurimi insunt meri errores scribendi, tamen dubitari nequit, quin cod. b quasi recensioem quandam propriam praebeat. cfr. Zeitschr. f. Math. u. Phys., hist.-litt. Abth. XXIX p. 1 — 22.

ἴσην εἶναι τὴν μὲν ὑπὸ τῶν $\Theta\Delta$, ΔE τῇ ὑπὸ τῶν NA , AM , τὴν δὲ ὑπὸ τῶν $\Theta\Delta$, ΔH τῇ ὑπὸ τῶν NA , $\Delta\Xi$, τὴν δὲ ὑπὸ τῶν $H\Delta$, ΔE τῇ ὑπὸ τῶν ΞA , AO , AM , καὶ κείσθω τῇ B ἴση ἑκατέρω τῶν ΞA , AO , καὶ συμπεπληρώσθω τὸ AP στερεόν. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὥς ἡ A πρὸς τὴν B , οὕτως ἡ B πρὸς τὴν Γ , ἴση δὲ ἡ μὲν A τῇ ΔE , ἡ δὲ B ἑκατέρω τῶν ΞA , AO , ἡ δὲ Γ τῇ $\Delta\Theta$, ὥς ἄρα ἡ ΔE πρὸς MA , οὕτως ἡ OA πρὸς τὴν $\Delta\Theta$. καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν $\Theta\Delta$, ΔE , OA , AM αἱ πλευραὶ ἀντιπεπόνθασιν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $\Delta\Theta$, ΘP παραλληλόγραμμον τῷ $OAM\Xi$. καὶ ἐπεὶ ἴσαι γωνίαι ἐπίπεδοι εἰσιν αἱ ὑπὸ τῶν $\Theta\Delta$, ΔE , OA , AM , ἐπὶ δὲ τῶν κορυφῶν αὐτῶν μετέωροι γραμμαὶ ἐφesiτᾷσιν αἱ $H\Delta$, ΞA , ἴσας γωνίας περιέχουσι τὴν μὲν ὑπὸ τῶν $\Theta\Delta$, ΔH τῇ ὑπὸ τῶν OA , $\Delta\Xi$, τὴν δὲ ὑπὸ τῶν $H\Delta$, ΔE τῇ ὑπὸ τῶν ΞA , AM , καὶ ἀφηρημέναι εἰσὶν ἴσαι εὐθεῖαι αἱ $H\Delta$, ΞA , αἱ ἄρα ἀπὸ τῶν H , Ξ ἐπὶ τὰ διὰ τῶν $\Theta\Delta$, ΔE , OA , AM ἐπίπεδα κάθεται ἀγόμεναι ἴσαι ἔσονται. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα, ὧν τὰ ὕψη ἴσα ἐστί, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔK τῷ AP . καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΔK τὸ ὑπὸ τῶν A , B , Γ , τὸ δὲ AP τὸ ἀπὸ τῆς B . τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν A , B , Γ περιεχόμενον στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς B στερεῷ ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἐὰν ὥσιν ὁσαιοδηποτοῦν εὐθεῖαι ἀνάλογον, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν ὁμοία καὶ ὁμοίως κείμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἀνάλογον ἔσται. καὶ ἐὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν

ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἀνάλογον ἢ, καὶ αὐταὶ ἀνάλογον ἔσονται.

ἔστωσαν ὁσαιοηποτοῦν εὐθεῖαι ἀνάλογον ἡ AB , $\Gamma\Delta$, EZ , $H\Theta$, ὡς ἡ AB πρὸς $\Gamma\Delta$, οὕτως ἡ EZ πρὸς $H\Theta$, καὶ ἀναγεγράφθω ἀφ' ἐκάστης τῶν AB , $\Gamma\Delta$, EZ , $H\Theta$ ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ AK , $\Gamma\Lambda$, EM , HN . λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ AK στερεὸν πρὸς τὸ $\Gamma\Lambda$ στερεόν, οὕτως τὸ EM στερεὸν πρὸς τὸ HN στερεόν. πεποιήσθω γὰρ ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως ἢ τε $\Gamma\Delta$ πρὸς τὴν Ξ καὶ ἡ Ξ πρὸς τὴν O . ὡς ἄρα ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, τουτέστιν ἡ AB πρὸς τὴν O , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης, τουτέστι τὸ AK , πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τουτέστι τὸ $\Gamma\Lambda$. ὡς δὲ ἡ EZ πρὸς τὴν $H\Theta$, οὕτως ἢ τε $H\Theta$ πρὸς τὴν Π καὶ ἡ Π πρὸς τὴν P . ἔστιν ἄρα ὡς ἡ EZ πρὸς τὴν P , οὕτως τὸ EM πρὸς τὴν HN . καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν $H\Theta$, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως ἢ τε $\Gamma\Delta$ πρὸς τὴν Ξ καὶ ἡ Ξ πρὸς τὴν O , ὡς δὲ ἡ EZ πρὸς τὴν $H\Theta$, οὕτως ἢ τε $H\Theta$ πρὸς τὴν Π καὶ ἡ Π πρὸς τὴν P , δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν O , οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν P . ἀλλ' ὡς μὲν ἡ AB πρὸς τὴν O , οὕτως τὸ AK στερεὸν πρὸς τὸ $\Gamma\Lambda$ στερεόν, ὡς δὲ ἡ EZ πρὸς τὴν P , οὕτως τὸ EM στερεὸν πρὸς τὸ HN στερεόν. ὡς ἄρα τὸ AK στερεὸν πρὸς τὸ $\Gamma\Lambda$ στερεόν, οὕτως τὸ EM στερεὸν πρὸς τὸ HN στερεόν.

ἔστω δὴ πάλιν ὡς τὸ AK στερεὸν πρὸς τὸ $\Gamma\Lambda$ στερεόν, οὕτως τὸ EM στερεὸν πρὸς τὸ HN στερεόν. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν $H\Theta$. πεποιήσθω γὰρ ὡς ἡ AB πρὸς

τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν ΣT , καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΣT τῷ HN ὁμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΣT . ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν ΣT , καὶ ὡς ἄρα τὸ AK στερεὸν πρὸς τὸ $\Gamma\Delta$ στερεόν, οὕτως τὸ EM στερεὸν πρὸς τὸ ΣT στερεόν. τὸ EM ἄρα πρὸς ἐκάτερον τῶν HN , ΣT τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ HN τῷ ΣT , καὶ ὁμόλογός ἐστὶν ἡ $H\Theta$ τῇ ΣT . ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ $H\Theta$ τῇ ΣT . καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν ΣT , ἴση δὲ ἡ ΣT τῇ $H\Theta$, ὡς ἄρα ἡ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν $H\Theta$. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

38

λη'.

Ἐὰν κύβου τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων αἱ πλευραὶ δίχα τμηθῶσι, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῇ, ἡ τῶν ἐπιπέδων κοινὴ τομὴ δίχα τεμεῖ τὴν τοῦ κύκλου διάμετρον, καὶ αὕτη δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου.

κύβου γὰρ τοῦ AB τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων τῶν $\Gamma\Delta$, AE , BZ , $H\Theta$ αἱ πλευραὶ δίχα τετμήσθωσαν αἱ $\Gamma\Delta$, ΔA , AE , EG , BZ , ZH , $H\Theta$, ΘB κατὰ τὰ K , Λ , M , N , Ξ , O , Π , P , διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω τὰ KM , $\Pi\Xi$, NA , OP , καὶ ἔστω τῶν ἐπιπέδων κοινὴ τομὴ ἡ ΣT , διάμετρος δὲ τοῦ κύβου ἔστω ἡ BA . λέγω, ὅτι ἡ ΣT δίχα τέμνει τὴν τοῦ κύβου διάμετρον, καὶ αὕτη δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῶν¹⁾ τοῦ κύβου διαμέτρων¹⁾).

ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ $\Gamma\Sigma$, ΣA , BT , TH . ἐπεὶ

1) corr. in τῆς — διαμέτρου m. 1.

ἴση ἐστὶν ἡ $ΓΕ$ τῇ $ΔΑ$, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν $ΓΕ$ ἡμίσεια ἡ $ΓΝ$, τῆς δὲ $ΔΑ$ ἡμίσεια ἡ $ΛΑ$, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ $ΓΝ$ τῇ $ΛΑ$. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ $ΣΝ$ τῇ $ΣΑ$ ἴση. δύο δὲ αἱ $ΓΝ$, $ΝΣ$ δυσὶ ταῖς $ΛΑ$, $ΑΣ$ ἴσαι εἰσί· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $ΓΝΣ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΣΛΑ$ ἴση· βάσις ἄρα ἡ $ΓΣ$ βάσει τῇ $ΣΑ$ ἴση, καὶ τὸ $ΓΝΣ$ τρίγωνον τῷ $ΑΑΣ$ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὅφ' ἂς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν $ΓΣ$, $ΣΝ$ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν $ΑΣ$, $ΣΑ$. κοινὴ προσκείμεθω ἡ ὑπὸ τῶν $ΝΣ$, $ΣΑ$. αἱ ἄρα ὑπὸ τῶν $ΓΣ$, $ΣΝ$, $ΝΣ$, $ΣΑ$ ταῖς ὑπὸ τῶν $ΑΣ$, $ΣΑ$, $ΑΣ$, $ΣΝ$ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ τῶν $ΑΣ$, $ΣΑ$, $ΑΣ$, $ΣΝ$ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί· πρὸς δὴ τινι εὐθείᾳ τῇ $ΝΣ$ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ $Σ$ δύο εὐθεῖαι αἱ $ΣΓ$, $ΣΑ$ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσι τὰς ὑπὸ τῶν $ΓΣΝ$, $ΝΣΑ$. ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ $ΓΣ$ τῇ $ΣΑ$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ $ΒΤ$ τῇ $ΤΗ$ ἐπ' εὐθείας ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἑκατέρω τῶν $ΓΒ$, $ΑΗ$ τῇ $ΕΘ$, ἀλλὰ καὶ παράλληλοι, αἱ δὲ παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσαι παράλληλοι εἰσίν, αἱ $ΓΒ$, $ΑΗ$ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι. καὶ ἐπεξευγμέναι εἰσὶν αἱ $ΓΑ$, $ΒΗ$, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν $ΓΑ$ ἡμίσεια ἡ $ΣΑ$, τῆς δὲ $ΒΗ$ ἡμίσεια ἡ $ΒΤ$. αἱ $ΣΑ$, $ΒΤ$ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι· καὶ ἐπεξευγμέναι εἰσὶν αἱ $ΣΤ$, $ΑΒ$. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν $ΣΤ$ τῇ $ΤΤ$, ἡ δὲ $ΑΤ$ τῇ $ΤΒ$. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λθ'.

39

Ἐὰν ᾗ δύο πρίσματα ἰσουψῇ, καὶ τὸ μὲν ἔχει βάσιν τρίγωνον, τὸ δὲ παραλληλόγραμμον, διπλάσιον δὲ ᾗ

τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἔσται τὰ πρίσματα.

Ἔστω δύο πρίσματα ἰσουψῇ τὰ $ABΓΔEZ$, $HΘKΛMN$, καὶ τὸ μὲν ἔχέτω τρίγωνον βάσιν τὸ $ΚΛΝ$, τὸ δὲ παραλληλόγραμμον τὸ $ΒΓΔΕ$, καὶ ἔστω τὸ $ΒΓΔΕ$ τοῦ $ΝΚΛ$ τριγώνου διπλάσιον. λέγω, ὅτι ἴσα ἔστί τὰ πρίσματα. πεπληρώσθω γὰρ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα τὰ $ΑΔ$, $ΗΛ$. ἐπεὶ οὖν τὸ $ΒΔ$ παραλληλόγραμμον τοῦ $ΝΚΛ$ τριγώνου ἔστι διπλάσιον, ἔστι δὲ τοῦ $ΝΚΛ$ τριγώνου διπλάσιον τὸ $ΝΛ$ παραλληλόγραμμον, ἴσον ἄρα ἔστί τὸ $ΒΔ$ τῷ $ΝΛ$. ἐπὶ ἴσων οὖν βάσεων τῶν $ΒΔ$, $ΝΛ$ ἰσουψῇ ἔστι στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ $ΑΔ$, $ΗΛ$. ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις. ἀλλὰ τοῦ μὲν $ΑΔ$ ἡμισὺ ἔστι τὸ $ΑΒΓΔΕΖ$ πρίσμα, τοῦ δὲ $ΗΛ$ ἡμισὺ τὸ $ΗΘΚΛΜ$ πρίσμα. καὶ τὸ $ΑΒΓΔΕΖ$ ἄρα πρίσμα τῷ $ΗΘΚΛΜΝ$ πρίσματι ἴσον ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Εὐκλείδου στοιχείων στερεῶν ια.

XII

Εὐκλείδου στοιχείων ιβ.

- 1 Τὰ ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὥς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

ἔστωσαν κύκλοι οἱ $ΑΒΓΔ$, $ΗΘΚΛ$, καὶ ἐν τοῖς $ΑΒΓΔ$, $ΗΘΚΛ$ ὅμοια πολύγωνα ἔστω τὰ $ΑΒΓΔΕ$, $ΗΘΚΛΜ$, διάμετροι δὲ τῶν κύκλων ἔστωσαν αἱ $ΒΖ$, $ΘΝ$. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὥς τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΖ$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $ΘΝ$ τετράγωνον, οὕτως τὸ $ΑΒΓΔΕ$ πολύγωνον πρὸς τὸ $ΗΘΚΛΜ$ πολύγωνον. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ $ΒΕ$, $ΑΖ$, $ΘΜ$, $ΗΝ$. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὥς ἢ $ΒΑ$ πρὸς $ΑΕ$, οὕτως ἢ $ΘΗ$ πρὸς τὴν $ΗΜ$, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν $ΒΑΕ$, $ΘΗΜ$ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα ἔστί τὸ $ΑΒΕ$ τρίγωνον

τῷ $H\Theta M$ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν AEB γωνία τῇ ὑπὸ τῶν $H\Theta M$. ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ AEB τῇ ὑπὸ AZB ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ $HM\Theta$ τῇ ὑπὸ $HN\Theta$ ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ ὀρθὴ ὑπὸ τῶν BAZ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΘHN ἴση. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ AZB λοιπῇ τῇ ὑπὸ $H\Theta N$ ἐστὶν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ABZ τρίγωνον τῷ $H\Theta N$ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ BZ πρὸς τὴν BA , οὕτως ἡ ΘN πρὸς ΘH . ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ BZ πρὸς τὴν ΘN , οὕτως ἡ BA πρὸς τὴν ΘH . καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς BZ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘN τετράγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ZB πρὸς τὴν ΘN , ἔχει δὲ καὶ τὸ $AB\Gamma\Delta E$ πολύγωνον πρὸς τὸ $H\Theta K\Lambda M$ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἥπερ ἡ AB πρὸς τὴν $H\Theta$, καὶ ἐστὶν ὡς ἡ BZ πρὸς τὴν ΘN , οὕτως ἡ AB πρὸς τὴν $H\Theta$, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς BZ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘN τετράγωνον, οὕτως τὸ $AB\Gamma\Delta E$ πολύγωνον πρὸς τὸ $H\Theta K\Lambda M$ πολύγωνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν 2 διαμέτρων τετράγωνα.

ἔστωσαν κύκλοι οἱ $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ $B\Delta$, $Z\Theta$. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ $Z\Theta$ τετράγωνον, οὕτως ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸν $EZH\Theta$ κύκλον. εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $Z\Theta$ τετράγωνον, οὕτως ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸν $EZH\Theta$ κύκλον, ἦτοι πρὸς ἑλασσόν τι τοῦ $EZH\Theta$ κύκλου χωρίον ἢ πρὸς τὸ μείζον. ἔστω πρότερον πρὸς ἑλασσον τὸ Φ , καὶ τῷ $EZH\Theta$ κύκλῳ ἴσα ἔστω τὰ ΦX , καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν $EZH\Theta$ κύκλον τετρά-

γωνον τὸ $EZH\Theta$. τὸ $EZH\Theta$ ἄρα τετράγωνον μείζον ἔστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ $EZH\Theta$ κύκλου. τετμήσθωσαν αἱ EZ , ZH , $H\Theta$, ΘE περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ K , Λ , M , N σημεῖα, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ EK , KZ , $Z\Lambda$, ΛH , HM , $M\Theta$, ΘN , NE . ἕκαστον ἄρα τῶν EK , KZ , $Z\Lambda$, ΛH , HM , $M\Theta$, ΘN , NE τρίγωνον μείζον ἔστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου. ἕκαστον ἄρα τῶν EKZ , $Z\Lambda H$, $HM\Theta$, ΘNE τῶν τριγώνων μείζον ἔστιν ἢ τοὶ ἥμισυ τοῦ καθ' αὐτὸ τμήματος τοῦ κύκλου. τοιαύτης δὴ γινομένης τῆς διαιρέσεως ληφθήσεται τοιαῦτα τμήματα ἀπὸ τοῦ ὅλου κύκλου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ X χωρίου. λελήφθω καὶ ἔστω τὰ EK , KZ , $Z\Lambda$, ΛH , HM , $M\Theta$, ΘN , NE . δύο οὖν μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων τοῦ τε $EZ\Theta$ κύκλου καὶ τοῦ X χωρίου ἀφήρηται ἀπὸ τοῦ μείζονος μείζον ἢ τὸ ἥμισυ μέρος καὶ τοῦ καταλειπομένου μείζον ἢ τὸ ἥμισυ μέρος, καὶ τοῦτο αἰ γένηται, καὶ καταλέλειπται χωρίον, ὃ ἐλάσσον ἔσται τοῦ X . λοιπὸν ἄρα τὸ $EKZ\Lambda HM\Theta N$ πολύγωνον μείζον ἔστι τοῦ Φ χωρίου. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον τῷ $EKZ\Lambda HM\Theta N$ πολυγώνῳ ὅμοιον πολύγωνον τὸ $A\Xi BO\Gamma\P\Delta P$. ἐπεὶ ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς $Z\Theta$, οὕτως ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸ Φ χωρίον, ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $Z\Theta$, οὕτως τὸ $A\Xi BO\Gamma\P\Delta P$ πολύγωνον πρὸς τὸ $EKZ\Lambda HM\Theta N$, ὡς ἄρα ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸ Φ χωρίον, οὕτως τὸ $A\Xi BO\Gamma\P\Delta P$ πολύγωνον πρὸς τὸ $EKZ\Lambda HM\Theta N$ πολύγωνον. ἐναλλάξ ἄρα ἔστιν, ὡς ὁ $AB\Gamma\Delta$ πρὸς τὸ ἐν αὐτῷ πολύγωνον, οὕτως τὸ X χωρίον πρὸς τὸ $EKZ\Lambda HM\Theta N$ πολύγωνον. μείζων δὲ ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος

τοῦ ἐν αὐτῷ πολυγώνου· μείζον ἄρα καὶ τὸ Φ χωρίον τοῦ $EKZ\Lambda HM\Theta N$ πολυγώνου. ἀλλὰ μὴν καὶ ἔλασσον τὸ Φ · ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$ τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $Z\Theta$ τετραγώνου, οὕτως ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς ἑλασσόν τι τοῦ $EZH\Theta$ κύκλου χωρίον.

λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ πρὸς μείζον. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς τὸ Φ . ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $Z\Theta$ τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔB τετραγώνου, οὕτως τὸ Φ χωρίον πρὸς τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον. ὡς δὲ τὸ Φ χωρίον πρὸς τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον, οὕτως ὁ $EZH\Theta$ κύκλος πρὸς ἑλασσόν τι τοῦ $AB\Gamma\Delta$ κύκλου χωρίον· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $Z\Theta$ τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔB τετραγώνου, οὕτως ὁ $EZH\Theta$ κύκλος πρὸς ἑλασσόν τι τοῦ $AB\Gamma\Delta$ κύκλου χωρίον· ὅπερ ἀδύνατον δέδεικται. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$ τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $Z\Theta$ τετραγώνου, οὕτως ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς μείζον τι τοῦ $EZH\Theta$ κύκλου χωρίον. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἑλασσον. ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$ τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $Z\Theta$ τετραγώνου, οὕτως ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸν $EZH\Theta$ κύκλον.

Πᾶσα πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν διαιρεῖται 3 εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ δύο πρίσματα τῆς ὅλης πυραμίδος μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ.

ἔστω πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν ἔστω τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημείον. λέγω, ὅτι ἡ $AB\Gamma\Delta$ πυραμὶς διαιρεῖται εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα.

τετμήσθωσαν αἱ πλευραὶ τῆς πυραμίδος δίχα κατὰ τὰ $E, Z, H, \Theta, K, \Delta$ σημεῖα, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $EZ, ZH, EH, H\Delta, Z\Theta, \Theta K, K\Delta, \Delta\Theta$. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν AZ τῇ $Z\Delta$, ἡ δὲ $B\Theta$ τῇ $\Theta\Delta$, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ $Z\Theta$. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν AE τῇ EB , ἡ δὲ AZ τῇ $Z\Delta$, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ $B\Delta$ τῇ EZ . παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ $EBZ\Theta$. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν EB τῇ $Z\Theta$, ἡ δὲ EZ τῇ $B\Theta$. ἀλλ' ἡ μὲν BE τῇ EA ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ $B\Theta$ τῇ $\Theta\Delta$. καὶ ἡ μὲν AE ἄρα τῇ $Z\Theta$ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ EZ τῇ $\Theta\Delta$. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ AZ τῇ $Z\Delta$ ἴση. ἴσον ἄρα καὶ ὁμοίον ἐστὶ τὸ AEZ τρίγωνον τῷ $Z\Theta\Delta$ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ $AZ\Theta$ τρίγωνον τῷ $Z\Delta K$ τριγώνῳ ἴσον τε καὶ ὁμοίον ἐστὶν. τὸ δὲ AEH τρίγωνον τῷ $Z\Theta K$ τριγώνῳ ἴσον τε καὶ ὁμοίον ἐστὶν. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων αἱ EZ, ZH παρὰ δύο εὐθείας ἀπτομένης ἀλλήλων τὰς $\Theta\Delta, \Delta K$ κείνται μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσαι, ἴσας γωνίας περιέξουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ EZH γωνία τῇ ὑπὸ $\Theta\Delta K$ γωνία. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ EZ, ZH δυοὶ ταῖς $\Theta\Delta, \Delta K$ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρω ἑκατέρω, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ EZH γωνία τῇ ὑπὸ $\Theta\Delta K$ ἴση ἐστίν, βάσις ἄρα ἡ EH βάσει τῇ ΘK ἐστὶν ἴση. ἴσον ἄρα καὶ ὁμοίον ἐστὶ τὸ EZH τρίγωνον τῷ $\Theta\Delta K$ τριγώνῳ. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἥς μὲν ἐστὶ τὸ AEH τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Z σημεῖον, ἴση τε καὶ ὁμοία ἐστὶ τῇ πυραμίδι τῇ βάσιν μὲν ἐχούσῃ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Δ σημεῖον. καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ AEH τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Z σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ τῇ πυραμίδι τῇ βάσιν μὲν ἐχούσῃ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Δ σημεῖον. διή-

ρηται ἄρα ἡ $ABΓΔ$ πυραμὶς εἰς δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ.

λέγω δὴ, ὅτι καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ $ΒΑ$ τῇ $ΑΓ$, διπλάσιόν ἐστι τὸ $ΕΗΑΒ$ παραλληλόγραμμον τοῦ $ΗΑΓ$ τριγώνου. καὶ ἐπεὶ δέ-
δεικται, ὅτι, ἐὰν δύο πρίσματα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, καὶ τὸ μὲν ἔχει βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τριγώνον, ἥ δὲ διπλάσιον τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἔσται τὰ πρίσματα, τὸ ἄρα πρίσμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν $ΘΒΑ$, $ΕΖΗ$, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τοῦ $ΕΒΖΘ$ καὶ τοῦ $ΕΒΑΗ$ καὶ ἔτι τοῦ $ΖΘΑΗ$ ἴσον ἐστὶ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν $ΗΓΑ$, $ΖΘΚ$, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν $ΚΖΗΓ$, $ΑΓΘΚ$, $ΖΗΑΘ$. διήρηται ἄρα ἡ $ΑΒΓΔ$ πυραμὶς εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ φανερόν, ὅτι τὰ δύο πρίσματα ἴσα ἐστὶν ἢ τὸ ἡμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος :—

Ἐὰν ὥσι δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὔσαι ⁴ καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, διαιρεθῇ δὲ ἑκατέρα αὐτῶν εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, ἔσται ὥς ἡ τῆς μιᾶς πυραμίδος βάσις πρὸς τὴν τῆς ἐτέρας πυραμίδος βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ μιᾷ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ἐτέρᾳ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῇ.

ἔστωσαν δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὔσαι καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς $ΑΒΓ$, $ΜΝΞ$, κορυφὰς δὲ τὰ $Δ$, $Ο$ σημεία, καὶ διηρῆσθω ἑκατέρα αὐτῶν εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας

τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ $ABΓ$ βάσις πρὸς τὴν $MNΞ$ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ $ABΓΔ$ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ $ΔΕΖΘ$ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ.

ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστὶν ἡ AB τῇ $ΔΗ$, ὁμοίον ἐστὶ τὸ $ABΓ$ τρίγωνον τῷ $ΔΗΓ$ τριγώνῳ. τὸ $ABΓ$ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ $ΔΗΓ$ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ $NΞ$ πρὸς τὴν $ΞΦ$. καὶ ἐστὶν ὡς ἡ $BΓ$ πρὸς τὴν $ΓΔ$, οὕτως ἡ $NΞ$ πρὸς τὴν $ΞΦ$. καὶ ὡς ἄρα τὸ $ABΓ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΔΗΓ$ τρίγωνον, οὕτως τὸ $MNΞ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΣΦΞ$ τρίγωνον. ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ $ABΓ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $MNΞ$, οὕτως τὸ $ΗΔΓ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΣΦΞ$ τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ ἀπεναντίον ἐστὶ τὰ $ΔΗΓ$, $ZΘK$ ἐπίπεδα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ ἀπεναντίον ἐστὶ τὰ $ΣΦΞ$, PTN ἐπίπεδα. ὡς ἄρα ἡ $ABΓ$ βάσις πρὸς τὴν $MNΞ$ βάσιν, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ ἀπεναντίον ἐστὶ τὰ $ΔΗΓ$, $ZΘK$ ἐπίπεδα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ ἀπεναντίον ἐστὶ τὰ $ΣΦΞ$, PTT ἐπίπεδα. ἀλλὰ τὰ μὲν ἐν τῇ $ABΓΔ$ πυραμίδι πρίσματα διπλάσιά ἐστι τοῦ πρίσματος, οὗ ἀπεναντίον ἐστὶ τὰ $ΔΗΓ$, $ZΘK$ ἐπίπεδα. τὰ δ' ἐν τῇ $MNΞO$ πυραμίδι πρίσματα διπλάσιά ἐστι τοῦ πρίσματος, οὗ ἀπεναντίον ἐστὶ τὰ $ΣΦΞ$, PTT ἐπίπεδα. ὡς ἄρα ἡ $ABΓ$ βάσις πρὸς τὴν $MNΞ$ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ $ABΓΔ$ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ $MNΞO$ πυραμίδι πρίσματα. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ AEH βάσις πρὸς τὴν $ΜΠΣ$ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ $AEHZ$ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ $ΜΠΣΡ$ πυραμίδι πρίσματα. ὡς δὲ ἡ $ZΘK$ βάσις πρὸς τὴν TPT βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ $ZΘKΔ$ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ $PTTO$

πυραμίδι πρίσματα. ἔσται ἄρα ὡς ἐν τῶν ἡγούμενων πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων, ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ $ABΓ$ βάσις πρὸς τὴν $MNΞ$ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ $ABΓΔ$ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ $MNΞΟ$ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὔσαι πυραμίδες καὶ τρι- 5 γώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἶσιν ὡς αἱ βάσεις.

ἔτρωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες τριγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς $ABΓ$, $MNΞ$ αἱ $ABΓΔ$, $MNΞΟ$, κορυφὰς δὲ τὰ $Δ$, $Ο$ σημεία. λέγω, ὅτι ἔστιν ὡς ἡ $ABΓ$ βάσις πρὸς τὴν $MNΞ$ βάσιν, οὕτως ἡ $ABΓΔ$ πυραμὶς πρὸς τὴν $MNΞΟ$ πυραμίδα.

εἰ γὰρ μὴ ἔστιν ὡς ἡ $ABΓ$ βάσις πρὸς τὴν $MNΞ$ βάσιν, οὕτως ἡ $ABΓΔ$ πυραμὶς πρὸς τὴν $MNΞΟ$ πυραμίδα, ἔσται ἄρα ὡς ἡ $ABΓ$ βάσις πρὸς τὴν $MNΞ$ βάσιν, οὕτως ἡ $ABΓΔ$ πυραμὶς ἥτοι πρὸς ἑλαττόν τι τῆς $MNΞΟ$ πυραμίδος στερεὸν ἢ πρὸς μείζον. ἔστω πρὸς ἑλαττον τὸ $Ω$, καὶ τῇ $MNΞΟ$ πυραμίδι ἴσα ἔστω τὰ $Ω$, X χωρία, καὶ διηρῆσθω ἡ $MNΞΟ$ πυραμὶς εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα. μείζονα ἄρα ἐστὶ τὰ πρίσματα τῆς ὅλης πυραμίδος ἢ τὸ ἥμισυ. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας πυραμίδας εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα λήψομέν τινας πυραμίδας ἀπὸ τῆς ὅλης πυραμίδος, αἱ ἔσονται ἐλάσσονες τοῦ X στερεοῦ. λελήφθωσαν καὶ ἔτρωσαν αἱ $ΜΠΣΡ$, $ΤΤΟ$. ἐπεὶ οὖν ἡ πυραμὶς ἴση ἐστὶ τοῖς στερεοῖς εἰς τὰ καταλελημμένα ἀποτμήματα ἐλάσσονά εἰσι τοῦ X . λοιπὰ ἄρα τὰ ἐν

τῇ $MNΞO$ πυραμίδι πρίσματα μείζονά ἐστι τοῦ Ω στερεοῦ. διηρησθῶ ἡ $ABΓΔ$ πυραμὶς ὁμοίως τῇ $MNΞO$ πυραμίδι. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ $ABΓ$ βάσις πρὸς τὴν $MNΞ$ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ πυραμίδι τῇ $ABΓΔ$ πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ $MNΞO$ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῇ, ὡς ἄρα ἡ $ABΓΔ$ πυραμὶς πρὸς τὸ Ω στερεόν, οὕτως τὰ ἐν τῇ $ABΓΔ$ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ $MNΞO$ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῇ. ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $ABΓΔ$ πυραμὶς πρὸς τὰ ἐν αὐτῇ πρίσματα πάντα, οὕτως τὸ Ω στερεόν πρὸς τὰ ἐν τῇ $MNΞO$ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῇ. μείζων δὲ ἡ $ABΓΔ$ πυραμὶς τῶν ἐν αὐτῇ πρισμαμάτων πάντων. μείζον ἄρα καὶ τὸ Ω στερεὸν τῶν ἐν τῇ $MNΞO$ πυραμίδι πρισμαμάτων πάντων. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $ABΓ$ βάσις πρὸς τὴν $MNΞ$ βάσιν, οὕτως ἡ $ABΓΔ$ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς $MNΞO$ πυραμίδος στερεόν.

λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ πρὸς μείζον. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς τὸ Ω . ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $MNΞ$ βάσις πρὸς τὴν $ABΓ$ βάσιν, οὕτως τὸ Ω στερεὸν πρὸς τὴν $ABΓΔ$ πυραμίδα. ὡς δὲ τὸ Ω στερεὸν πρὸς τὴν $ABΓΔ$ πυραμίδα, οὕτως ἡ $MNΞO$ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς $ABΓΔ$ πυραμίδος στερεόν. ὡς ἄρα ἡ $MNΞ$ βάσις πρὸς τὴν $ABΓ$ βάσιν, οὕτως ἡ $MNΞO$ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς $ABΓΔ$ πυραμίδος στερεόν· ὅπερ ἀδύνατον δέδεικται. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $ABΓ$ βάσις πρὸς τὴν $MNΞ$ βάσιν, οὕτως ἡ $ABΓΔ$ πυραμὶς πρὸς μείζον τι τῆς $MNΞO$ πυραμίδος στερεόν. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλαττον. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $ABΓ$ βάσις πρὸς τὴν $MNΞ$ βάσιν, οὕτως ἡ

$AB\Gamma\Delta$ πυραμὶς πρὸς τὴν $MN\Xi O$ πυραμίδα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πᾶν πρίσμα τρίγωνον ἔχον βάσιν διαιρεῖται εἰς τρεῖς 6
πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας.

ἔστω πρίσμα τὸ $AB\Gamma\Delta EZ$ τρίγωνον ἔχον βάσιν τὴν $\Gamma Z\Delta$. λέγω, ὅτι τὸ $AB\Gamma\Delta EZ$ πρίσμα διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας. ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ $B\Delta$, BZ , ZE . ἡ ἄρα πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $\Gamma B\Delta$ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Z σημεῖον, ἴση ἐστὶ τῇ πυραμίδι τῇ βάσιν μὲν ἐχούσῃ τὸ $B\Delta E$ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Z σημεῖον, ἴση ἐστὶ τῇ πυραμίδι τῇ βάσιν μὲν ἐχούσῃ τὸ AEZ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ Z σημεῖον. καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $B\Gamma\Delta$ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Z σημεῖον, ἴση ἐστὶ τῇ πυραμίδι τῇ βάσιν μὲν ἐχούσῃ τὸ AEZ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ B σημεῖον. διήρηται ἄρα τὸ $AB\Gamma\Delta EZ$ πρίσμα εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, ὧν βάσεις μὲν εἰσιν $AB\Gamma\Delta$, $EAEZ$, κορυφὴ δὲ τὰ B , Z σημεία.

Τῶν ἴσων πυραμίδων καὶ τριγώνους βάσεις ἔχον- 7
τῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. καὶ ὧν πυραμίδων τριγώνους βάσεις ἔχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσαι εἰσὶν ἐκεῖναι.

ἔστωσαν ἴσαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς $AB\Gamma$, EZH αἱ $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$, κορυφαὶς δὲ τὰ Δ , Θ σημεία. λέγω, ὅτι τῶν $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$ πυραμίδων τριγώνων βάσιν ἔχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι. συμπληρώσθω γὰρ τὰ $B\Delta M\Delta$, $Z\Theta P\Theta$ στερεά. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $AB\Gamma\Delta$ πυραμὶς

τῇ $EZH\Theta$ πυραμίδι, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν $AB\Gamma\Delta$ πυραμίδος ἑξαπλάσιον τὸ $B\Delta M\Lambda$ στερεόν, τῆς δὲ $EZH\Theta$ ἑξαπλάσιον τὸ $Z\Theta P\Omega$ στερεόν, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $B\Delta M\Lambda$ στερεὸν τῷ $Z\Theta P\Omega$ στερεῷ. τῶν δὲ ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ BM βάσις πρὸς τὴν ZP βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ $OP\Theta Z$ στερεοῦ ὕψος. ὡς δὲ ἡ BM βάσις πρὸς τὴν ZP βάσιν, οὕτως ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν EZH βάσιν. ὡς ἄρα ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν EZH βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ $OP\Theta Z$ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ $\Lambda M\Delta B$ στερεοῦ ὕψος. τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν τε $B\Delta M\Lambda$, $Z\Theta P\Omega$ στερεῶν καὶ τῶν $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$ πυραμίδων. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $AB\Gamma$ πρὸς τὴν EZH βάσιν, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $EZH\Theta$ πυραμίδος ὕψος τῶν $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$ πρὸς τὸ τῆς $AB\Gamma\Delta$ πυραμίδος ὕψος. τῶν $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$ ἄρα πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. Γ

ἀντιπεπονθέτωσαν δὲ πάλιν τῶν $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$ πυραμίδων αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν EZH βάσιν, οὕτως τὸ τῆς $EZH\Theta$ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς $AB\Gamma\Delta$ πυραμίδος ὕψος. λέγω, ὅτι ἐστὶν ἴση ἡ $AB\Gamma\Delta$ πυραμὶς τῇ $EZH\Theta$ πυραμίδι. τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν EZH βάσιν, οὕτως τὸ τῆς $EZH\Theta$ ὕψος πρὸς τὸ τῆς $AB\Gamma\Delta$ πυραμίδος ὕψος, ὡς δὲ ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν EZH βάσιν, οὕτως ἡ BM βάσις πρὸς τὴν ZP βάσιν, οὕτως τὸ τῆς $EZH\Theta$ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς $AB\Gamma\Delta$ πυραμίδος ὕψος. τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν τε $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$ πυραμίδων καὶ τῶν $B\Delta M\Lambda$, $Z\Theta P\Omega$ στερεῶν. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ BM βάσις πρὸς τὴν ZP βάσιν, οὕτως

τὸ τοῦ $Z\Theta PO$ στερεοῦ ὕψος. ὧν δὲ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $B\Delta M\Lambda$ στερεὸν τῷ $Z\Theta PO$ στερεῷ. καὶ ἐστὶ τοῦ μὲν $B\Delta M\Lambda$ στερεοῦ ἕκτον μέρος ἡ $EZH\Theta$, $AB\Gamma\Delta$ πυραμῖς, τοῦ δὲ $Z\Theta PO$ στερεοῦ ἕκτον μέρος ἡ $EZH\Theta$ πυραμῖς. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ $AB\Gamma\Delta$ πυραμῖς τῇ $EZH\Theta$ πυραμίδι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Αἱ ὅμοιαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις 8 πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

ἔστωσαν ὅμοιαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς $AB\Gamma$, EZH αἱ $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$, κορυφαὶ δὲ τὰ Δ , Θ σημεῖα, καὶ ἔστω ἴση ἡ μὲν ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν EZ , ZH γωνίᾳ, ἡ δὲ ὑπὸ τῶν AB , $B\Delta$ τῇ ὑπὸ τῶν EZ , $Z\Theta$. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ τῇ ὑπὸ τῶν ΘZ , ZH , ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ $B\Gamma$ τῇ ZH . λέγω, ὅτι ἡ $AB\Gamma\Delta$ πυραμῖς πρὸς τὴν $EZH\Theta$ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν ZH .

συμπεπληρώσθωσαν γὰρ τὰ $B\Delta M\Lambda$, $Z\Theta PO$ στερεά. ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν $B\Delta$, οὕτως ἡ ZH πρὸς τὴν ZE , καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$, EZ , ZH αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ BM παραλληλόγραμμον τῷ ZP παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν $A\Delta$ τῷ $E\Theta$ ὁμοίον ἐστὶ, τὸ δὲ NB τῷ $Z\Pi$. ἀλλὰ τὰ μὲν BN , $A\Delta$, BM τὰ τρία τοῖς ἀπεναντίον αὐτῶν τοῖς $A\Delta$, MN , $A\Lambda$ ἴσα ἐστί, τὰ δὲ ZP , $E\Theta$, ΠZ τὰ τρία τοῖς ἀπεναντίον αὐτῶν τοῖς ΘO , EO , $P\Pi$ ἴσα ἐστίν. ὅλον ἄρα το

$B\Delta M\Lambda$ στερεὸν ὅλῳ τῷ $Z\Theta PO$ στερεῷ ὁμοιὸν ἐστὶ. τὰ δὲ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλα ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. τὸ $B\Delta M\Lambda$ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ $Z\Theta PO$ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν ZH . καὶ ἐστὶ τοῦ μὲν $B\Delta M\Lambda$ στερεοῦ ἕκτον μέρος ἡ $AB\Gamma$ πυραμὶς τοῦ $Z\Theta PO$ στερεοῦ ἕκτον μέρος ἡ $EZH\Theta$ πυραμὶς· καὶ ἡ $AB\Gamma\Delta$ ἄρα πυραμὶς πρὸς τὴν $EZH\Theta$ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν ZH .

- 9 Πᾶς κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος καὶ ὕψος ἴσων.

ἐχέτω γὰρ κῶνος κυλίνδρῳ βάσιν τὴν αὐτὴν τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον καὶ ὕψος ἴσων. λέγω, ὅτι τριπλάσιός ἐστιν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου.

εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου τριπλάσιος, ἔσται ἄρα ἥτοι μείζων ἢ τριπλάσιος ἢ ἐλάσσων ἢ τριπλάσιος. ἔστω πρότερον ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου μείζων ἢ τριπλάσιος τῷ $P\Sigma$ στερεῷ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον τετράγωνον τὸ $AB\Gamma\Delta$, καὶ ἀνεστᾷτ' ἀπὸ τοῦ $AB\Gamma\Delta$ τετραγώνου πρίσμα ἰσουψὲς τῷ κυλίνδρῳ. τὸ ἄρα ἀνεσταμένον πρίσμα μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κυλίνδρου. τετμήσθωσαν αἱ AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ E , Z , H , Θ σημεία, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ EA , EB , BZ , $Z\Gamma$, ΓH , $H\Delta$, $\Delta\Theta$, ΘA , καὶ ἀνεστᾷτ' ἀφ' ἐκάστου τῶν ΔEB , $BZ\Gamma$, $\Gamma H\Delta$, $\Delta\Theta A$ τριγώνων πρίσματα ἰσουψὲς τῷ κυλίνδρῳ. ἕκαστον ἀνασταμένων πρισμμάτων μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' αὐτὸ τμήματος καὶ κυλίνδρου. τοιαύτης δὴ γινομένης ἀεὶ ἐπισκέψεως ληφθῆσεται τινα τμήματα ἀπὸ τοῦ ὅλου κυλίνδρου, ἃ ἔσται

ελάχιστον τοῦ P στερεοῦ. λελήφθω καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν $AEB, BZ\Gamma, \Gamma H\Delta, \Delta\Theta A$. λοιπὸν ἄρα τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μείζον ἐστὶν ἢ τριπλάσιον τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. ἀλλὰ τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, τριπλάσιόν ἐστὶ τῆς πυραμίδος τῆς βάσιν μὲν ἐχούσης τὸ $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $AEBZ\Gamma H\Delta\Theta$ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μείζον ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ. ἀλλὰ καὶ ἐμπεριέχεται ἐν αὐτῷ ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου μείζων ἐστὶν ἢ τριπλάσιος.

λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων ἢ τριπλάσιος.

εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω. ἀνάπαλιν ἄρα ὁ κώνος τοῦ κυλίνδρου μείζων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος τῷ P στερεῷ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον τετράγωνον τὸ $AB\Gamma\Delta$, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ $AB\Gamma\Delta$ τετραγώνου πυραμὶς ἰσουψὴς τῷ κώνῳ. ἡ ἄρα ἀνεσταμένη πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. τετμήσθωσαν αἱ $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὸ $EZH\Theta$ σημεία, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $AE, EB, BZ, Z\Gamma, \Gamma H, H\Delta, \Delta\Theta, \Theta A$, καὶ ἀνεστάτω ἀφ' ἐκάστου τῶν $AEB, BZ\Gamma, \Gamma H\Delta, \Delta\Theta A$ τριγώνων πυραμὶς ἰσουψὴς τῷ κώνῳ. ἐκάστη ἄρα τῶν ἀνεσταμένων πυραμίδων μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τῶν καθ' αὐτὸ τμήματος τοῦ κώνου. τοιαύτης δὴ γινομένης αἱ ἐπισκέψεως ληφθήσεται τινα τμήματα ἀπὸ τοῦ ὅλου κώνου, ἃ ἔσται

ἐλαττον αὐτοῦ στερεοῦ. λελήφθω καὶ ἀνεστάτω ἐπὶ τῶν $ΑΕΒ$, $ΒΖΓ$, $ΓΗΔ$, $ΔΘΑ$. λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἣς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $ΑΕΒΖΓΗΔΘ$ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ, μείζον ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος τοῦ κυλίνδρου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν $ΑΒΓΔ$ κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ. ἀλλ' ἡ πυραμὶς, ἣς βάσις μὲν ἐστὶν ἡ $ΑΕΒΖΓΗΔΘ$ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ, τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸ $ΑΕΒΖΓΗΔΘ$ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ. καὶ τὸ πρίσμα ἄρα, οὗ βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $ΑΕΒΖΓΗΔΘ$ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ, μείζον ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν $ΑΒΓΔ$ κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ, μείζον ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν $ΑΒΓΔ$ κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ. ἀλλὰ καὶ ἐμπεριέχεται ἐν αὐτῷ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἐλάττω ἐστὶν ἢ τριπλάσιος. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ μείζων ἢ τριπλάσιος. τριπλάσιος ἄρα ἐστίν.

10 Οἱ ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων.

ἔστωσαν ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν ἔστωσαν οἱ $ΑΒΓΔ$, $ΕΖΗΘ$ κύκλοι, ἄξονες δὲ οἱ $ΚΑ$, $ΜΝ$, διάμετροι δὲ ἔστωσαν αἱ $ΒΓ$, $ΖΘ$. λέγω, ὅτι ὁ $ΑΒΓΔΚΑ$ κῶνος πρὸς τὸν $ΕΖΗΘΜΝ$ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ $ΒΔ$ πρὸς $ΖΘ$.

εἰ γὰρ μὴ ὁ $ΑΒΓΔΚΑ$ κῶνος πρὸς τὸν $ΕΖΗΘΜΝ$ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ $ΒΔ$ πρὸς τὴν $ΖΘ$, ἔξει ἄρα ὁ $ΑΒΓΔΚΑ$ κῶνος ἥτοι πρὸς ἐλασσόν τι τοῦ $ΕΖΗΘΜΝ$ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἥπερ ἡ $ΒΔ$ πρὸς τὴν $ΖΘ$ ἢ πρὸς τὸ μείζον. ἐχέτω πρό-

τερον πρὸς ἑλασσον τὸ A , καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν $EZH\Theta$ κύκλον τετράγωνον τὸ $EZH\Theta$, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ $EZH\Theta$ τετραγώνου πυραμὶς ἰσουψὴς τῷ κώνῳ. ἡ ἄρα ἀνεσταμένη πυραμὶς μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. τετμήσθωσαν αἱ EZ , ZH , $H\Theta$, ΘE περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ξ , O , Π , P σημεῖα, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $E\Xi$, ΞZ , ZO , OH , $H\Pi$, $\Pi\Theta$, ΘP , PE , καὶ ἀνεστάτω ἀφ' ἐκάστου τῶν $E\Xi$, ΞZ , ZO , OH , $H\Pi$, $\Pi\Theta$, ΘP , PE τριγώνων πυραμὶς ἰσουψὴς τῷ κώνῳ. ἐκάστη ἄρα τῶν ἀνεσταμένων πυραμίδων μεῖζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' αὐτὴν τμήματος τοῦ κώνου. τοιαύτης δὴ γινομένης ἀεὶ ἐπισκέψεως ληφθῆσεται τινα τμήματα ἀπὸ τοῦ ὅλου κώνου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ A στερεοῦ. λελήφθω καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν $E\Xi Z$, ZOH , $H\Pi\Theta$, ΘPE . λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἣς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $E\Xi ZZOH\Pi\Theta PE$ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ N σημεῖον, μεῖζόν ἐστι τοῦ A στερεοῦ. ἐγγεγράφθω εἰς τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον τῷ $E\Xi ZOH\Pi\Theta PE$ πολυγώνῳ ὁμοιόν τε πολύγωνον τὸ $AEBT\Gamma T\Delta\Phi A$, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ $AEBT\Gamma T\Delta\Phi$ πολυγώνου πρίσμα ἰσουψὲς τῷ κώνῳ, καὶ τῶν μὲν περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἣς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $AEBT\Gamma T\Delta\Phi$ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ A σημεῖον, τρίγωνον ἐφεστιάτω τὸ $\Lambda\Sigma B$, τῶν δὲ περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἣς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $E\Xi OH\Pi\Theta P$ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ N σημεῖον ἐφεστιάτω τὸ $NZ\Xi$ τρίγωνον, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΣK , $M\Xi$. ἐπεὶ ὁμοιοὶ κῶνοι καὶ κύλινδροι εἰσιν, ὧν ἀνάλογόν εἰσιν οἱ τε ἄξονες καὶ οἱ διαμέτροι τῶν βάσεων, ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $K\Lambda$ πρὸς τὴν MN , οὕτως ο $B\Delta$ πρὸς τὴν $Z\Theta$. ὡς δὲ ἡ $B\Delta$ πρὸς τὴν $Z\Theta$, οὕτως ἡ BK πρὸς τὴν MZ . ὡς ἄρα ἡ $K\Lambda$ πρὸς τὴν KB ,

οὕτως ἡ MN πρὸς τὴν MZ · καὶ περὶ ὀρθὰς γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν $\angle K, KB, MN, MZ$ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν. ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ KBA τρίγωνον τῷ MNZ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ KA πρὸς τὴν AB , οὕτως ἡ MN πρὸς τὴν ZN . ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ KA πρὸς τὴν MN , οὕτως ἡ AZ πρὸς τὴν NZ . πάλιν ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΣK πρὸς τὴν KA , οὕτως ἡ $M\Xi$ πρὸς τὴν MN , καὶ περὶ ὀρθὰς γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν $\Sigma KA, \Xi MN$ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΣKA τρίγωνον τῷ ΞMN τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν, ὡς ἡ KA πρὸς τὴν MN , οὕτως ἡ $A\Sigma$ πρὸς τὴν $N\Xi$, ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ AK πρὸς τὴν MN , οὕτως ἡ AB πρὸς τὴν NZ · ὡς ἄρα ἡ AB πρὸς τὴν NZ , οὕτως ἡ $A\Sigma$ πρὸς τὴν $N\Xi$. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν, ὡς ἡ BK πρὸς τὴν KI , οὕτως ἡ ZM πρὸς τὴν $M\Xi$, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν $BK\Sigma, ZM\Xi$ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ $BK\Sigma$ τρίγωνον τῷ $ZM\Xi$ τριγώνῳ· ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΣK πρὸς ΣB , οὕτως ἡ ΞM πρὸς ΞZ . ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς ἡ ΣK πρὸς τὴν ΣA , οὕτως ἡ $M\Xi$ πρὸς τὴν ΞN . δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ἡ $A\Sigma$ πρὸς ΣB , οὕτως ἡ $N\Xi$ πρὸς τὴν ΞZ . ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν, ὡς ἡ $A\Sigma$ πρὸς τὴν $N\Xi$, οὕτως ἡ ΣB πρὸς τὴν ΞZ . ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ $A\Sigma$ πρὸς τὴν $N\Xi$, οὕτως ἡ AB πρὸς τὴν NZ . ὡς ἄρα ἡ AB πρὸς τὴν NZ , οὕτως ἡ $A\Sigma$ πρὸς τὴν $N\Xi$ · ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ $A\Sigma B$ τρίγωνον τῷ $N\Xi Z$ τριγώνῳ. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $KB\Sigma$ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ A σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ τῇ πυραμίδι τῇ βάσιν μὲν ἐχούσῃ τὸ $M\Xi Z$ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ N σημεῖον. αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες καὶ τριγώνους βάσεις ἔχουσai πρὸς ἀλλήλας ἐν τρι-

πλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. ἡ ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $BK\Sigma$ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ A σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσιν τὸ $MZ\Xi$ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ N σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ BK πρὸς τὴν $ZM\Theta$. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $KB\Sigma$ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ A σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσιν τὸ $M\Xi Z$ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ N σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ $B\Delta$ πρὸς τὴν ΘZ . ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἐκάστη τῶν λοιπῶν πυραμίδων, ὧν βάσεις μὲν εἰσὶ τὰ ΣK , MK , $\Phi K A$, $K\Delta T$, $T K \Gamma$, $\chi \Gamma T$, KTB τὰ τρίγωνα, κορυφὴ δὲ τὸ A σημεῖον, πρὸς ἐκάστην τῶν πυραμίδων, ὧν βάσεις μὲν εἰσὶ τὰ ΞME , EMP , $M\Theta P$, $M\Theta \Pi$, $M\Pi N$, $HM\Theta$, MOZ τὰ τρίγωνα, κορυφὴ δὲ τὸ N σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ $B\Delta$ πρὸς τὴν $Z\Theta$. καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $A\Sigma BT\Gamma M O \Phi A$ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ A σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσιν τὸ $E\Xi \Xi O H \Pi \Theta P$ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ N σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ $B\Delta$ πρὸς τὴν $Z\Theta$. καὶ ἐπεὶ ὁ $AB\Gamma\Delta K A$ κῶνος πρὸς τὸ A στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ $B\Delta$ πρὸς τὴν $Z\Theta$, ἔχει δὲ καὶ ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $A\Gamma B \Pi T \Phi \Delta$ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ A σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσιν τὸ $E\Xi \Xi \Theta H \Pi \Theta P$ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ N σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ $B\Delta$ πρὸς τὴν $Z\Theta$, ἐστὶν ἄρα, ὥς ὁ $AB\Gamma\Delta K A$ κῶνος πρὸς τὸ A στερεόν, οὕτως ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $A\Sigma BT\Gamma T \Delta \Phi$ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ A σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν

μὲν ἔχουσιν τὸ $E\Xi ZOHΠΘP$ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ N σημείον. ἐναλλάξ ἄρα ἐστίν, ὥς ὁ $ABΓΔΚΑ$ κῶνος πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσιν τὸ $ΑΣΒΓΠΤΔΦ$ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ $Α$ σημείον, οὕτως τὸ $Α$ στερεὸν πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσιν τὸ $E\Xi ZOHΠΘP$ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ N σημείον. μεῖζον δὴ ὁ $ABΓΔΚΑ$ κῶνος τῆς πυραμίδος τῆς βάσιν μὲν ἐχούσης τὸ $ΑΣΒΠΤΦΔ$ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ $Α$ σημείον. μεῖζον ἄρα καὶ τὸ $Α$ στερεὸν τῆς πυραμίδος τῆς βάσιν μὲν ἐχούσης τὸ $E\Xi ZOHΠΘP$ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ N σημείον. ἀλλὰ καὶ ἐλάττων· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ $ABΓΔΚΑ$ κῶνος πρὸς ἐλαττόν τι τοῦ $EZHΘMN$ κῶνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ $BΔ$ πρὸς τὴν $ZΘ$. λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ πρὸς μεῖζον. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς τὸ $Α$. ἀνάπαλιν ἄρα τὸ $Α$ στερεὸν πρὸς τὸν $ABΓΔΚΑ$ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ $ZΘ$ πρὸς τὴν $ΔΒ$. ὥς δὲ τὸ $Α$ στερεὸν πρὸς τὸν $ABΓΔΚΑ$ κῶνον, οὕτως ὁ $EZHMMN$ κῶνος πρὸς ἐλαττόν τι τοῦ $ABΓΔΚΑ$ κῶνου στερεόν. ὁ $EZHΘMN$ ἄρα κῶνος πρὸς ἐλαττόν τι τοῦ $ABΓΔΚΑ$ κῶνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ $ZΘ$ πρὸς τὴν $BΔ$. ὅπερ ἀδύνατον δέδεικται. οὐκ ἄρα ὁ $ABΓΔΚΑ$ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ $EZHΘMN$ κῶνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ $BΔ$ πρὸς τὴν $ZΘ$. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἐλαττόν τι. ὁ $ABΓΔΚΑ$ ἄρα κῶνος πρὸς τὸν $EZHΘMN$ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ $BΔ$ πρὸς τὴν $ZΘ$.

- 11 Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὧν αἱ βάσεις.

ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν αἱ βάσεις ἔστωσαν οἱ $ABΓΔ$, $EZHΘ$ κύκλοι, ἄξονες δὲ οἱ $ΚΑ$, MN , διάμετροι δὲ τῶν βάσεων ἔστωσαν αἱ $ZΔ$, $ZΘ$. - λέγω, ὅτι ἐστίν, ὥς ὁ $ABΓΔ$ κύκλος πρὸς τὸν $EZHΘ$ κύκλον, οὕτως ὁ $ABΓΔΛ^1$) κῶνος πρὸς τὸν $EZHΘN$ κῶνον. εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ὥς ὁ $ABΓΔ$ κύκλος πρὸς τὸν $EZHΘ$ κύκλον, οὕτως ὁ $ABΓΔ$ κῶνος πρὸς τὸν $EZHΘ$, ἔσται ὁ $ABΓΔΚΑ$ κῶνος ἥτοι πρὸς ἑλαττόν τι τοῦ $EZHΘ$ κῶνου στερεὸν ἢ πρὸς μείζον. ἔστω πρότερον πρὸς ἑλαττον τὸ $Α$ στερεόν, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν $EZHΘ$ κύκλον τετράγωνον τὸ $EZHΘ$, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ $EZHΘ$ τετραγώνου πυραμὶς ἰσουψὴς τῷ κῶνῳ. ἢ ἄρα ἀνεσταμένη πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κῶνου. τετμήσθωσαν αἱ EZ , ZH , $HΘ$ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ $Ξ$, O , $Π$, P σημεῖα, καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $EΞ$, $ΞZ$, $ZΘ$, $ΘH$, $HΠ$, $ΠΘ$, $ΘP$, $PΞ$, καὶ ἀνεστάτω ἀφ' ἑκάστου τῶν $EΞ$, $ΞZ$, $ZΘ$, $ΘH$, $HΠ$, $ΠΘ$, $ΘP$, $PΞ$ τριγώνων πυραμὶς ἰσουψὴς τῷ κῶνῳ. ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνεσταμένων πυραμίδων μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' αὐτὴν τμήματος τοῦ κῶνου. τοιαύτης δὴ γινομένης αἰ ἐπισκέψεως ληφθήσεται τινα τμήματα ἀπὸ τοῦ ὅλου κῶνου, ἃ ἔσται ἐλάττωνα τῆς ὑπεροχῆς, ἥς ὑπερέχει ὁ $ZΘMN$ κύκλος τοῦ $Α$ στερεοῦ. λεληφθῶ καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν $EΞZ$, $ΘHΠ$, $ΘPE$. λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν τὸ $EΞZOHΠΘP$ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ N σημεῖον, μείζον ἐστὶ τοῦ $Α$ στερεοῦ. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸν $ABΓΔ$ κύκλον τῷ $EΞZOHΠΘP$ πολυγώνῳ ὅμοιον

1) $Α$ supra scr. m. 1.

πολύγωνον τὸ $ΑΓΒΤΓΤΔΦ$ πυραμὶς ἰσουψὴς τῷ
 κῶνῳ. ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $ΒΔ$ τετραγώνον πρὸς
 τὸ ἀπὸ τῆς $ΖΘ$ τετραγώνον, οὕτως ὁ $ΑΒΓΔ$ κύκλος
 πρὸς τὸν $ΕΖΗΘ$ κύκλον, ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς τὸ ἀπὸ
 τῆς $ΒΔ$ τετραγώνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $ΖΘ$ τετραγώνον,
 οὕτως τὸ $ΑΣΒΠΤΔΦ$ πολύγωνον πρὸς τὸ $ΕΞΖΟΗΠΘΡ$
 πολύγωνον, ὥς ἄρα ὁ $ΑΒΓΔ$ κύκλος πρὸς τὸν $ΕΖΗΘ$
 κύκλον, οὕτως τὸ $ΑΣΒΤΓΤΔΦ$ πολύγωνον πρὸς τὸ
 $ΕΞΖΟΗΠΘΡ$ πολύγωνον. ἀλλ' ὡς μὲν ὁ $ΑΒΓΔ$
 κύκλος πρὸς τὸν $ΕΖΗΘ$ κύκλον, οὕτως ὁ $ΑΒΓΔΚΑ$
 κῶνος πρὸς τὸ $Α$ στερεόν, ὡς δὲ τὸ $ΑΣΒΤΓΤΔΦ$
 πολύγωνον πρὸς τὸ $ΕΞΖΟΗΠΘΡ$ πολύγωνον, οὕτως
 ἡ πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $ΑΣΒΤΓΤΔΦ$ πο-
 λύγωνον, οὕτως ἡ πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ
 $ΑΣΒΤΓΤΔΦ$ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ $Α$ σημείον,
 πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν ἔχουσιν τὸ
 $ΕΞΖΟΗΠΘΡ$ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ $Ν$ σημείον.
 ὡς ἄρα ὁ $ΑΒΓΔΚΑ$ κῶνος πρὸς τὸ $Α$ στερεόν, οὕτως
 ἡ πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $ΑΣΒΤΓΤΔΦ$ πολύ-
 γωνον, κορυφὴ δὲ τὸ $Α$ σημείον, πρὸς τὴν πυραμίδα
 τὴν βάσιν μὲν ἔχουσιν τὸ $ΕΞΖΟΗΠΘΡ$ πολύγωνον,
 κορυφὴν δὲ τὸ $Ν$ σημείον. ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ
 $ΑΒΓΔΚΑ$ κῶνος πρὸς τὴν πυραμίδα τὴν βάσιν μὲν
 ἔχουσιν τὸ $ΑΣΒΤΓΤΔΦ$ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ
 τὸ $Α$ σημείον, οὕτως τὸ $Α$ στερεόν πρὸς τὴν πυραμίδα
 τὴν βάσιν μὲν ἔχουσιν τὸ $ΕΞΖΟΗΠΘΡ$ πολύγωνον,
 κορυφὴν δὲ τὸ $Ν$ σημείον. μείζων δὲ ὁ $ΑΒΓΔΚΑ$
 κῶνος τῆς πυραμίδος τῆς βάσιν μὲν ἐχούσης τὸ
 $ΑΣΒΤΓΤΔΦ$ πολύγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ $Α$ σημείον.
 μεῖζον ἄρα καὶ τὸ $Α$ στερεόν τῆς πυραμίδος τῆς βάσιν
 μὲν ἐχούσης τὸ $ΕΞΖΟΗΠΘΡ$ πολύγωνον, κορυφὴν

δὲ τὸ N σημείον. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸν $EZH\Theta$ κύκλον, οὕτως ὁ $AB\Gamma\Delta K\Lambda$ κῶνος πρὸς ἑλαττόν τι τοῦ $EZH\Theta N$ κώνου στερεόν.

λέγω δὴ οὐδὲ πρὸς μείζον. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μείζον τὸ A . ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ $EZH\Theta$ κύκλος πρὸς τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον, οὕτως τὸ A στερεόν πρὸς τὸν $AB\Gamma\Delta\Lambda$ κῶνον. ὡς δὲ τὸ A στερεόν πρὸς τὸν $AB\Gamma\Delta\Lambda$ κῶνον, οὕτως ὁ $EZH\Theta N$ κῶνος πρὸς ἑλαττόν τι τοῦ $AB\Gamma\Delta\Lambda$ κώνου στερεόν. ὡς ἄρα ὁ $EZH\Theta$ κύκλος πρὸς τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον, οὕτως ὁ $EZH\Theta N$ κῶνος πρὸς ἑλαττόν τι τοῦ κώνου τοῦ $AB\Gamma\Delta\Lambda$ ¹⁾ στερεοῦ· ὅπερ ἀδύνατον δέδεικται. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸν $EZH\Theta$ κύκλον, οὕτως ὁ $AB\Gamma\Delta\Lambda$ κῶνος πρὸς μείζον τι τοῦ $EZH\Theta N$ κώνου στερεόν. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἑλαττον. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸν $EZH\Theta$ κύκλον, οὕτως ὁ $AB\Gamma\Delta\Lambda$ κῶνος πρὸς τὸν $EZH\Theta N$ κῶνον. καὶ ἐστὶ μὲν κύλινδρος ὁ βάσιν ἔχων τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ, τριπλάσιος τοῦ $AB\Gamma\Delta\Lambda$ κώνου, τοῦ δὲ $EZH\Theta N$ κώνου τριπλάσιος ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων τὸν $EZH\Theta$ κύκλον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸν $EZH\Theta$ κύκλον, οὕτως ὁ $AB\Gamma\Delta\Lambda$ κύλινδρος πρὸς τὸν $EZH\Theta N$ κύλινδρον.

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς 12 ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, οὕτως ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα.

1) Λ supra scr. m. 1.

κύλινδρος γὰρ ὁ $ΑΔ$ ἐπιπέδῳ τῷ $HΘ$ τετμήσθω παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς $ΑΒ$, $ΓΔ$, καὶ συμβαλλέτω τῷ τοῦ κυλίνδρου ἄξονι τὸ $HΘ$ ἐπίπεδον κατὰ τὸ K σημεῖον. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ $HΘ$ κύλινδρος πρὸς τὸν $HΔ$ κύλινδρον, οὕτως ὁ EK ἄξων. ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ $Α$, M σημεία, καὶ κείσθωσαν τῷ μὲν EK ἄξονι ἴσοι ὁσοιδήποτε ὁ $ZΞ$, ZM , καὶ ἐκβεβλήσθω διὰ τῶν $Α$, N , $Ξ$, M ¹⁾ σημείων ἐπίπεδα παράλληλα τοῖς $ΑΒ$, $ΓΔ$, καὶ νενοήσθωσαν ἐν τοῖς διὰ τῶν $Α$, N , $Ξ$, M σημείων ἐπιπέδοις περὶ κέντρα τὰ $Α$, N , $Ξ$, M κύκλοι οἱ $ΟΠΡΣ$, $ΤΤΦΧ$ ἴσοι ὄντες τοῖς $ΑΒΓΔ$, καὶ νενοήσθωσαν κύλινδροι οἱ $ΠΡ$, PB , $ΔΤ$, $ΤΧ$. καὶ ἐπεὶ οἱ $ΑΝ$, NE , EK ἄξονες ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις, οἱ ἄρα $ΠΡ$, HP , BH κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἴσαι δὲ ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ βάσεις. ἴσοι ἄρα εἰσὶ καὶ οἱ $ΠΡ$, PB , BH κύλινδροι ἀλλήλοις. καὶ ἐπεὶ οἱ $ΑΝ$, NE , EK ἄξονες ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ $ΠΡ$, PB , BH κύλινδροι ἴσοι ἀλλήλοις, καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ πλῆθος τῷ πλῆθει, ὅσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ὁ AK ἄξων τοῦ EK ἄξονος, τοσανταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ $ΠΗ$ κύλινδρος τοῦ BH κυλίνδρου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὅσαπλασίων ἐστὶν ὁ MK ἄξων τοῦ KZ ἄξονος, τοσανταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ $ΧΗ$ κύλινδρος τοῦ $HΔ$ κυλίνδρου. εἰ μὲν οὖν ἴσος ἐστὶν ὁ AK ἄξων τῷ KM ἄξονι, ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ $ΠΗ$ κύλινδρος τῷ HX κυλίνδρῳ, εἰ δὲ μείζων ἐστὶν ὁ KA ἄξων τοῦ KM ἄξονος, μείζων ἐστὶ καὶ ὁ $ΠΗ$ κύλινδρος τοῦ HX κυλίνδρου, εἰ δὲ ἐλάσσων ἐστὶν ὁ AK ἄξων τοῦ

1) A in ras.; supra N scr. M m. 1.

KM ἄξονος, ἐλάσσων ἐστὶ καὶ ὁ ΠH κύλινδρος τοῦ HX κυλίνδρου. τεσσάρων δὴ μεγεθῶν ὄντων, ἄξόνων μὲν τῶν EK , KZ , κυλίνδρων τῶν BH , $H\Delta$, εἴληπται ἰσάκεις πολλαπλάσια τοῦ μὲν EK ἄξονος καὶ BH κυλίνδρου ὅ τε $K\Delta$ ἄξων καὶ ὁ ΠH κύλινδρος, τοῦ δὲ KZ ἄξονος καὶ τοῦ $H\Delta$ κυλίνδρου ὅ τε KM ἄξων καὶ ὁ H κύλινδρος, καὶ δέδεικται, ὅτι, εἰ ὑπερέχει ὁ ΔK ἄξων τοῦ KM ἄξονος, ὑπερέχει καὶ ὁ ΠH κύλινδρος τοῦ HX κυλίνδρου, καὶ εἰ ἴσος ἐστὶν ὁ $K\Delta$ ἄξων τῷ KM ἄξωνι, ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ ΠH κύλινδρος τῷ HX κυλίνδρῳ, καὶ εἰ ἐλάσσων ἐστὶν ὁ ΔK ἄξων τοῦ KM ἄξονος, ἐλάσσων ἐστὶ καὶ ὁ ΠH κύλινδρος τοῦ HX κυλίνδρου, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ EK ἄξων πρὸς τὸν KZ ἄξονα, οὕτως ὁ BH κύλινδρος πρὸς τὸν $H\Delta$ κύλινδρον.

Οἱ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι ¹³ πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη.

ἔστωσαν γὰρ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν AB , $\Gamma\Delta$ κύλινδροι οἱ EB , $Z\Delta$. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ HB ἄξων πρὸς τὸν $K\Delta$ ἄξονα, οὕτως ὁ EB κύλινδρος πρὸς τὸν $Z\Delta$ κύλινδρον.

ἐκβεβλήσθω γὰρ ὁ $K\Delta$ ἄξων ἐπὶ τὸ N σημεῖον, καὶ κείσθω τῷ $H\Theta$ ἄξωνι ἴσος ὁ ΔN , καὶ περὶ ἄξονα τὸν ΔN κύλινδρος νοείσθω ὁ ΓM . ἐπεὶ οὖν οἱ EB , ΓM κύλινδροι ὑπὸ τὸ αὐτό εἰσιν ὕψος, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἴσαι δὲ εἰσὶν αἱ βάσεις. ἴσος ἄρα καὶ ὁ BE κύλινδρος τῷ ΓM κυλίνδρῳ. καὶ ἐπεὶ κύλινδρος ὁ ZM ἐπιπέδῳ τῷ $\Gamma\Delta$ τέτμηται παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓM κύλινδρος πρὸς τὸν $Z\Delta$ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΔN πρὸς

τὸν $ΚΑ$ ἄξονα. ἴσος δὲ ἐστὶν ὁ μὲν $ΓΜ$ κύλινδρος τῷ $ΕΒ$ κυλίνδρῳ, ὁ δὲ $ΑΜ$ ἄξων τῷ $ΗΘ$ ἄξονι ἐστίν. ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ $ΕΒ$ κύλινδρος πρὸς τὸν $ΖΔ$ κύλινδρον, οὕτως ὁ $ΗΘ$ ἄξων πρὸς τὸν $ΚΑ$ ἄξονα. ὡς δὲ ὁ $ΒΕ$ κύλινδρος πρὸς τὸν $ΖΔ$ κύλινδρον, οὕτως ὁ $ΑΒΗ$ κῶνος πρὸς τὸν $ΓΔΚ$ κῶνον. καὶ ὡς ἄρα ὁ $ΗΘ$ ἄξων πρὸς τὸν $ΚΑ$ ἄξονα, οὕτως ὁ τε $ΑΒΗ$ κῶνος πρὸς τὸν $ΓΔΚ$ κῶνον καὶ ὁ $ΕΒ$ κύλινδρος πρὸς τὸν $ΖΔ$ κύλινδρον.

- 14 Τῶν ἴσων κῶνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ὧν κῶνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἐκεῖνοι ἴσοι εἰσίν.

ἔστωσαν ἴσοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ $ΑΒΓΔ$ κύκλοι, ἄξονες δὲ οἱ $ΕΖ$, $ΗΘ$. λέγω, ὅτι τῶν $ΑΒΖ$, $ΓΔΘ$ κῶνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, τουτέστιν ὡς ἡ $ΑΒ$ βάσις πρὸς τὴν $ΓΔ$ βάσιν, οὕτως τὸ $ΗΘ$ ὕψος πρὸς τὸ $ΕΖ$ ὕψος.

τὸ γὰρ $ΕΖ$ ὕψος τῷ $ΗΘ$ ὕψει ἦτοι ἴσον ἐστὶν ἢ οὐ. ἔστω πρότερον ἴσον. οἱ δὲ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἐστὶν ἄρα ὡς ὁ $ΑΒΖ$ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν $ΓΔΘ$ κῶνον ἢ κύλινδρον, οὕτως ἡ $ΑΒ$ βάσις πρὸς τὴν $ΓΔ$ βάσιν. ἴσος δὲ ἐστὶν ὁ $ΑΒΖ$ κῶνος ἢ κύλινδρος τῷ $ΚΔΘ$ κῶνι ἢ κυλίνδρῳ. ἴση ἄρα καὶ ἡ $ΑΒ$ βάσις τῇ $ΓΔ$ βάσει. ἐστὶ δὲ καὶ τὸ $ΕΖ$ ὕψος τῷ $ΗΘ$ ὕψει ἴσον. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $ΑΕ$ βάσις πρὸς τὴν $ΓΔ$ βάσιν, οὕτως τὸ $ΗΘ$ ὕψος πρὸς τὸ $ΕΖ$ ὕψος. μὴ ἔστω δὴ ἴσὸν τὸ $ΗΘ$ ὕψος τῷ $ΕΖ$ ὕψει, ἀλλ' ἔστω μείζον τὸ $ΗΘ$, καὶ κείσθω τὸ $ΕΖ$

ἴσον τῷ HK , καὶ ἀπὸ βάσεως τῆς $\Gamma\Delta$, ὕψους δὲ τοῦ HK νενοήσθω κῶνος ἢ κύλινδρος ὁ $\Gamma\Delta K$. ἐπεὶ οὖν ὁ ABZ κῶνος ἢ κύλινδρος τῷ $\Gamma\Delta$ κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ AB βάσις πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$ βάσιν, οὕτως ὁ ABZ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς $\Gamma\Delta K$ κῶνον ἢ κύλινδρον. ἴσος δὲ ὁ ABZ κῶνος ἢ κύλινδρος τῷ $\Gamma\Delta\Theta$ κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AB βάσις πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$ βάσιν, οὕτως ὁ $\Gamma\Delta\Theta$ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν $\Gamma\Delta K$ κῶνον ἢ κύλινδρον. ὡς δὲ ὁ $\Gamma\Delta\Theta$ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν $\Gamma\Delta K$ κῶνον ἢ κύλινδρον, οὕτως τὸ $H\Theta$ ὕψος πρὸς τὸ HK ὕψος. καὶ ὡς ἄρα ἡ AB βάσις πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$ βάσιν, οὕτως τὸ $H\Theta$ ὕψος πρὸς τὸ HK ὕψος. ἴσον δὲ τὸ HK ὕψος τῷ EZ ὕψει. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AB βάσις πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$ βάσιν, οὕτως τὸ $H\Theta$ ὕψος πρὸς τὸ EZ ὕψος. τῶν ABZ , $\Gamma\Delta\Theta$ ἄρα κώνων ἢ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

ἀλλὰ δὴ ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἔστω ὡς ἡ AB βάσις πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$ βάσιν, οὕτως τὸ $H\Theta$ ὕψος πρὸς τὸ EZ ὕψος. λέγω, ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ $AB\Xi$ κῶνος ἢ κύλινδρος τῷ $\Gamma\Theta\Delta$ κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ. πάλιν γὰρ τὸ EZ ὕψος τῷ $H\Theta$ ὕψει ἴτοι ἴσον ἐστὶν ἢ οὐ. ἔστω πρότερον ἴσον. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AB βάσις πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$ βάσιν, οὕτως ὁ ABZ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν $\Gamma\Delta\Theta$ κῶνον ἢ κύλινδρον. ὡς δὲ ἡ AB βάσις πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$ βάσιν, οὕτως τὸ $H\Theta$ ὕψος πρὸς τὸ EZ ὕψος. καὶ ὡς ἄρα ὁ ABZ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν $\Gamma\Delta\Theta$ κῶνον ἢ κύλινδρον, οὕτως τὸ $H\Theta$ ὕψος πρὸς τὸ EZ ὕψος. ἴσον δὲ τὸ $H\Theta$ ὕψος τῷ EZ ὕψει. ἴσος ἄρα καὶ ὁ ABZ κῶνος ἢ κύλινδρος τῷ $\Gamma\Delta\Theta$ κώνῳ ἢ κυλίνδρῳ. μὴ ἔστω δὲ ἴσον

τὸ EZ ὕψος τῷ $H\Theta$ ὕψει, καὶ ἔστω μείζον τὸ $H\Theta$ τῷ EZ , καὶ κλείσθω τὸ EZ ἴσον τῷ HK . ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AB βάσις πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$ βάσιν, οὕτως ὁ ABZ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν $\Gamma\Delta K$ κῶνον ἢ κύλινδρον. ὡς δὲ ὁ AB βάσις πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$ βάσιν, οὕτως τὸ $H\Theta$ ὕψος πρὸς τὸ EZ ὕψος, τουτέστι πρὸς τὸ HK . καὶ ὡς ἄρα ὁ AZB κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν $\Gamma\Delta K$ κῶνον ἢ κύλινδρον, οὕτως τὸ $H\Theta$ ὕψος πρὸς τὸ HK ὕψος, ὡς δὲ τὸ $H\Theta$ ὕψος πρὸς τὸ HK ὕψος, οὕτως ὁ $\Gamma\Delta\Theta\Delta BZ$ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν $\Gamma\Delta$ κῶνον ἢ κύλινδρον. καὶ ὡς ἄρα ὁ ABZ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν $\Gamma\Delta K$ κῶνον ἢ κύλινδρον, οὕτως ὁ $\Gamma\Delta\Theta$ κῶνος ἢ κύλινδρος πρὸς τὸν $\Gamma\Delta K$ κῶνον ἢ κύλινδρον. τὰ δὲ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον ἴσα ἐστίν. ἴσος ἄρα ὁ ABZ κῶνος ἢ κύλινδρος τῷ $\Gamma\Delta\Theta$ κῶνῳ ἢ κυλίνδρῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

- 15 Δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων εἰς τὸν μείζονα κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρον ἐγγράφαι μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου.

ἔστωσαν δύο κύκλοι περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οἱ $AB\Gamma$, ΔEZ . δεῖ δὴ εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν $AB\Gamma\Delta$ πολύγωνον ἰσόπλευρον ἐγγράφαι μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάττονος κύκλου τοῦ EZ .

ἤχθωσαν τῶν $AB\Gamma$, ΔEZ κύκλων δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ $A\Gamma$, ΔB , καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Z τῇ $A\Gamma$ πρὸς ὀρθὰς ἡ ZH καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ $Z\Theta$. ἐφάπτεται ἄρα τοῦ EZ κύκλου. τέμνοντες δὴ τὴν $\Gamma\Delta$ περιφέρειαν δίχα καὶ τὴν ἡμίσειαν τῆς $\Gamma\Delta$ δίχα καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλήφομεν τινα περιφέρειαν, ἣτις ἔσται ἐλάσσων τῆς $H\Gamma$. λελήφθω καὶ

ἔστω ἡ $K\Gamma$, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ K σημείου ἐπὶ τὴν $A\Gamma$ κάθετος ἡ KA καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ M , καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $K\Gamma$, ΓM . ἑκατέρω ἄρα τῶν $K\Gamma$, ΓM πολυγώνου ἰσοπλεύρου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ εἰς τὸν $AB\Gamma A$ ἐγγραφομένου. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ $H\Theta$ τῇ KM , ἡ δὲ $H\Theta$ ἐφάπτεται τοῦ EZ κύκλου, ἡ KM ἄρα οὐκ ἐφάπτεται τοῦ EZ κύκλου. πολλῶ ἄρα οὐδετέρω τῶν $K\Gamma$, ΓM ἐφάπτεται τοῦ EZ κύκλου. ἐὰν ἄρα τῇ $K\Gamma$ περιφερείᾳ ἴσας περιφερείας ἀφαιρῶμεν κατὰ τὸ ἐξῆς καὶ ἐπιγεγνύομεν εὐθείας, ἔσται εἰς τὸν $AB\Gamma A$ κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγραμμένον μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου τοῦ EZ , καὶ φανερόν, ὅτι τὸ ἐγγραφόμενον πολύγωνον ἀρτιόπλευρόν ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Δύο σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν εἰς τὴν 16
μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἢ καὶ ἀρτιόπλευ-
ρον ἐγγράφαι μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ
τὴν ἐπιφάνειαν.

ἐννοεῖσθωσαν δύο σφαῖραι περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον
οὔσαι τὸ A . δεῖ δὴ εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν
πολύεδρον καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράφαι μὴ ψαῦον τῆς
ἐλάσσονος σφαίρας. τετμήσθωσαν αἱ σφαῖραι ἐπιπέδῳ
διὰ τοῦ κέντρου. ποιήσει δὴ τομαὺς μεγίστους κύκλους·
ποιεῖτω τοὺς $AB\Gamma A$, EZH , καὶ ἔστω ὁ μὲν $B\Gamma A$
κύκλος ἐν τῇ μείζονι σφαίρᾳ, ὁ δὲ EZH ἐν τῇ ἐλάσ-
σονι. καὶ ἤχθωσαν τοῦ $B\Gamma A$ κύκλου δύο διάμετροι
πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ BE , ΓA . καὶ δύο κύκλων
περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων $B\Gamma A$, EZH εἰς τὸν μεί-
ζονα κύκλον τὸν $B\Gamma A$ πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ
ἀρτιόπλευρον ἐγγεγράφθω μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος

κύκλου τοῦ EZH , καὶ ἔστωσαν πλευραὶ τοῦ πολυγώνου αἱ BK , KA , AM , MG , καὶ ἐπιγευχθεῖσα ἡ MA ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ξ , καὶ ἀνεστιάτω ἀπὸ τοῦ A σημείου τῷ τοῦ $B\Gamma\Delta$ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ AN καὶ συμβαλλέτω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς μείζονος σφαίρας κατὰ τὸ N σημειον, καὶ δι' ἐκατέρας τῶν $\Gamma\Delta$, $M\Xi$ καὶ τῆς AN ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω. ποιήσῃ δὴ τομαὶς κύκλους. ποιεῖτω, ὧν ἡμικύκλια ἔστω τὰ $\Gamma N\Delta$, $MN\Xi$. καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ $B\Gamma\Delta$, $\Gamma N\Delta$, $MN\Xi$ κύκλοι ἀλλήλοις, ὅσαι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ $B\Gamma$ τεταρτημορίῳ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου, τοσαῦταί εἰσι καὶ ἐν ἐκατέρῳ τῷ ΓN , MN τῇ $M\Gamma$ ἴσαι. ἐνηρμόσθωσαν καὶ ἔστωσαν αἱ ΓO , $O\Pi$, ΠP , $P N$, $N\Sigma$, ΣT , $T\Gamma$, ΓM , καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ΓO , $T\Pi$, $E P$, καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ O ἐπὶ τὴν $\Gamma\Delta$ κάθετος ἦχθω ἡ $O\Phi$, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν $M\Xi$ ἡ ΓX , καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΦX . ἐπεὶ οὖν ἡ NA ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς τὸ $B\Gamma$ ἐπίπεδον, καὶ πάντα ἄρα τὰ διὰ τῆς NA ἐπίπεδα ὀρθὰ ἐστὶ πρὸς τὸ $B\Gamma$ ἐπίπεδον. ἐν δέ τι τῶν διὰ τῆς NA ἐπιπέδων ἐστὶν ἡ $\Gamma N\Delta$ κύκλος. ὁ $\Gamma N\Delta$ ἄρα κύκλος ὀρθός ἐστὶ πρὸς τὸν $B\Gamma\Delta$ κύκλον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ $MN\Xi$ κύκλος ὀρθός ἐστὶ πρὸς τὸν $B\Gamma\Delta$ κύκλον. καὶ ἐπεὶ τὸ $\Gamma N\Delta$ ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστὶ πρὸς τὸ $B\Gamma\Delta$, καὶ τῇ κοινῇ τομῇ αὐτῶν τῇ $\Gamma\Delta$ πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἐν τῷ $\Gamma N\Delta$ ἐπιπέδῳ ἡ $O\Phi$, ἡ $O\Phi$ ἄρα καὶ τῷ $B\Gamma\Delta$ ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓX τῷ $B\Gamma\Delta$ ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ $O\Phi$ τῇ ΓX . καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓM τῇ $O\Gamma$, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓM τετραγώνον τῷ ἀπὸ τῆς $O\Gamma$ τετραγώνῳ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς $O\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν $\Delta\Gamma\Phi$, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΓM ἴσον ἐστὶ

τὸ ἀπὸ τῆς¹⁾ ΞMX . καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $\Delta Γ Φ$ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΞMX καὶ $\Delta Γ Φ$ ²⁾ τῷ ὑπὸ τῶν ΞMX . καὶ ἐστὶν ἴση ἡ $\Delta Γ$ τῇ ΞM . ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $Γ Φ$ τῇ MX . ἐστὶ δὲ καὶ ὅλη ἡ $Γ Α$ ὅλη τῇ $Α Μ$ ἴση. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ $Φ Χ$ τῇ $Μ Γ$. πάλιν ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς $Ε Γ Θ$ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $Μ Τ$ τετραγώνῳ, ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς $Γ Ο$ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν $Γ Φ$, $Φ Ο$. ἴση γὰρ ἡ ὑπὸ $Γ Φ Ο$ γωνία· τῷ δ' ἀπὸ τῆς $Μ Τ$ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν $Μ Χ$, $Χ Τ$. ὁρθὴ γάρ ἐστὶν ἡ ὑπὸ $Μ Χ Ο$ γωνία· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν $Γ Φ$, $Φ Ο$ ἄρα ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $Μ Χ$, $Χ Τ$, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς $Γ Φ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $Μ Χ$. λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $Φ Ο$ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς $Χ Τ$ ἐστὶν ἴσον. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ $Φ Ο$ τῇ $Τ Χ$. ἐστὶ δὲ αὕτη καὶ παράλληλος. καὶ αἱ $Φ Χ$, $Ο Τ$ ἄρα ἴσαι τέ εἰσι καὶ παράλληλοι. ἡ ἄρα $Φ Χ$ τῇ $Γ Μ$ ἐστὶ παρὰ-
 ἄλληλος. καὶ ἡ $Γ Μ$ ἄρα τῇ $Ο Τ$ ἐστὶ παρὰ-
 ἄλληλος. καὶ ἐφ' ἐκατέρας αὐτῶν εἴληπται τυχόντα σημεῖα τὰ N , M , O , Γ , καὶ ἐπεζευγμέναι εἰσὶν αἱ $Μ Τ$, $Γ Ο$. αἱ ἄρα $Τ Μ$, $Μ Γ$, $Γ Ο$, $Ο Τ$ ἐν τούτῳ ἐστὶ καὶ τὸ $Τ Μ Γ Ο$ τετράπλευρον. τὸ ἄρα $Τ Μ Γ Ο$ τετράπλευρον ἐν ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐκάτερον τῶν $Τ Ο Π Τ$, $Ρ Σ$ τετραπλεύρων ἐν ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ. ἐστὶ δὲ καὶ τὸ $Σ Ρ Ν$ τρίγωνον ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $Μ Τ$ τῇ $Γ Ο$, καὶ παρὰλληλός ἐστὶν ἡ $Μ Γ$ τῇ $Τ Ο$, ἐν κύκλῳ ἄρα ἐστὶ τὰ M , Γ , T , O σημεῖα. ἤχθῳ ἀπὸ τοῦ A σημείου ἐπὶ τὸ τοῦ $Μ Γ Τ Ο$ τετραπλεύρου ἐπίπεδον κάθετος ἡ $A \Psi$ καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ψ . τὸ Ψ ἄρα σημεῖον κέν-

1) ἀπὸ τῆς corr. in ὑπὸ τῶν m. 1.

2) Φ corr. ex X m. 1.

τρον ἐστὶ τοῦ περὶ τὰ M, Γ, O, Γ σημεῖα κύκλου. ἐπεξεύχθω ἡ $\Psi\Gamma$. καὶ ἐπεὶ τετραπλευρον ἐν κύκλῳ ἐστὶ τὸ $M\Gamma O\Gamma$, καὶ τρεῖς αἱ $\Gamma M, M\Gamma, \Gamma O$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, καὶ μείζων ἐστὶν ἡ $M\Gamma$ τῆς ΓO , τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $M\Gamma$ τοῦ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Phi$ μείζον ἐστὶν ἡ διπλάσιον. ἤχθω ἀπὸ τοῦ ME ἐπὶ τὴν $\Gamma\Phi$ κάθετος ἡ $M\Omega$. καὶ ἐπεὶ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ $\Gamma\Omega$ τῆς ΩA , ὥς δὲ ἡ $\Gamma\Omega$ πρὸς τὴν ΩA , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Omega$ τοῦ ἀπὸ τῆς ΩM , τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $\Gamma\Omega, \Omega M$ ἐλάσσονά ἐστι τοῦ δις ἀπὸ τῶν $M\Omega$. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῶν $\Gamma\Omega, \Omega M$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $M\Gamma$. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $M\Gamma$ ἐλάσσον ἐστὶ τοῦ δις ἀπὸ τῶν $M\Omega$. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς $M\Gamma$ τοῦ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Psi$ μείζον ἐστὶν ἡ διπλάσιον. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $M\Omega$ τοῦ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Psi$ μείζον ἐστὶν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓA τῇ AM , ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Theta$ τῷ ἀπὸ τῆς AM . ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΓA ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν $\Gamma\Psi, \Psi A$. ὀρθὴ γάρ ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ Ψ γωνία. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς MA ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν $M\Omega, \Omega A$. ὀρθὴ γάρ ἐστὶν ἡ ὑπὸ $M\Omega A$ γωνία. τὰ ἀπὸ τῶν $\Gamma\Psi, \Psi A$ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $M\Omega, \Omega A$, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς $M\Omega$ μείζον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Psi$. λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΨA μείζον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς $A\Omega$. μείζων αρα ἡ ΨA τῆς $A\Omega$. ἡ δὲ $A\Omega$ μείζων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. πολλῷ ἄρα ἡ ΨA μείζων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. καὶ ἡ $A\Psi$ κάθετος ἐπὶ τὸ $M\Gamma O\Gamma$ ἐπίπεδόν ἐστὶν. τὸ ἄρα $M\Gamma O\Gamma$ ἐπίπεδον οὐ ψαύει τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐκάτερον τῶν $\Gamma O \Pi \Gamma, \Gamma \Pi \rho \Sigma$ τετραπλεύρων οὐ ψαύει τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, οὐδὲ τὸ $N \Sigma \rho$ τρίγωνον ψαύει τῆς ἐλάσσονος σφαίρας. ἐὰν δὴ ἐν ἐκάστη τῶν λοιπῶν

τεταρτημορίων τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν, ἔξομεν εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγεγραμμένον μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας.

Ἐὰν δὴ εἰς ἑτέραν σφαῖραν τῷ ἐν τῇ $BΓΔ$ σφαίρα στερεῷ πολυέδρῳ ὅμοιον στερεὸν πολύεδρον ἐγγράψωμεν, ἔσται ἐκάστη τῶν πυραμίδων τῶν βάσιν μὲν ἔχουσῶν τὰ $ΜΓΟΥ$, $ΤΟΠΤ$, $ΤΠΡΣ$ καὶ τὸ $ΝΟΡ$ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ $Α$ σημείον, ὁμοία τῇ ὁμοταγεῖ πυραμίδι. αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας τριπλασίονα λόγον ἔχουσιν ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν. ἐκάστη ἄρα τῶν πυραμίδων τῶν βάσιν τῶν βάσιν μὲν ἔχουσῶν τὰ $ΜΓΟΥ$, $ΤΟΠΤ$, $ΤΠΡΣ$ τετράπλευρα καὶ τὸ $ΝΣΡ$ τρίγωνον, κορυφὴν δὲ τὸ $Α$ σημείον, πρὸς ἐκάστην τῶν ὁμοταγῶν πυραμίδων τριπλασίονα¹⁾ λόγον ἔχει ἥπερ ἡ $ΓΑ$ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας. καὶ ὅλον ἄρα τὸ πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ $ΓΑ$ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας. ὥς δὲ ἡ $ΓΑ$ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας, οὕτως ἡ $ΓΔ$ πρὸς τὴν διάμετρον τῆς ἑτέρας σφαίρας. καὶ ὅλον ἄρα τὸ πολύεδρον πρὸς ὅλον τὸ πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ $ΓΔ$ πρὸς τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας: ~

Αἱ σφαῖραι πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ 17 εἰσὶ τῶν διαμέτρων.

ἔστωσαν σφαῖραι αἱ $ΑΒΓ$, $ΔΕΖ$, διάμετροι δὲ τῶν $ΑΒΓ$, $ΔΕΖ$ σφαιρῶν ἔστωσαν αἱ $ΒΓ$, $ΕΖ$. λέγω, ὅτι ἡ $ΑΒΓ$ σφαῖρα πρὸς τὴν $ΔΕΖ$ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ $ΒΓ$ πρὸς τὴν $ΕΖ$.

1) Corr. ex τριπλάσια m. 1.

εἰ γὰρ μὴ ἔχει ἡ $AB\Gamma$ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔEZ τριπλασίονα λόγον ἢ περ ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν EZ , ἔξει ἄρα ἡ $AB\Gamma$ σφαῖρα ἥτοι πρὸς ἐλάσσονά τινα σφαῖραν τῆς ΔEZ ἢ πρὸς μείζονα τριπλασίονα λόγον ἢ περ ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν EZ . ἐχέτω πρότερον πρὸς ἐλάσσονα τὴν $H\Theta K$, καὶ νενοήσθω ἡ ΔEZ τῇ $H\Theta K$ περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον, καὶ δύο σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν τῶν ΔEZ , $H\Theta K$ εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν τὴν ΔEZ στερεὸν πολύεδρον ἐγγεγράφθω μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας τῆς $H\Theta K$ κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὴν $AB\Gamma$ σφαῖραν τῷ ἐν τῇ ΔEZ στερεῷ πολυέδρῳ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν πολύεδρον. τὸ ἄρα ἐν τῇ $AB\Gamma$ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔEZ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν EZ . ἔστιν ἄρα ὡς ἡ $AB\Gamma$ σφαῖρα πρὸς τὴν $H\Theta K$ σφαῖραν, οὕτως τὸ ἐν τῇ $AB\Gamma$ στερεὸν πολύεδρον. ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $AB\Gamma$ σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν αὐτῇ πολύεδρον, οὕτως ἡ $H\Theta K$ σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔEZ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον. μείζων δὲ ἡ $AB\Gamma$ σφαῖρα τοῦ ἐν αὐτῇ πολυέδρου. μείζων ἄρα καὶ ἡ $H\Theta K$ σφαῖρα τοῦ ἐν τῇ ΔEZ σφαίρᾳ στερεοῦ πολυέδρου. ἀλλὰ καὶ ἐλάσσων· ἐμπεριέχεται γάρ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ $B\Gamma$ σφαῖρα πρὸς ἐλασσόν τινα τῆς ΔEZ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν EZ . ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἡ ΔEZ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς $AB\Gamma$ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ EZ πρὸς τὴν $B\Gamma$.

λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ ἡ $AB\Gamma$ σφαῖρα πρὸς μείζον

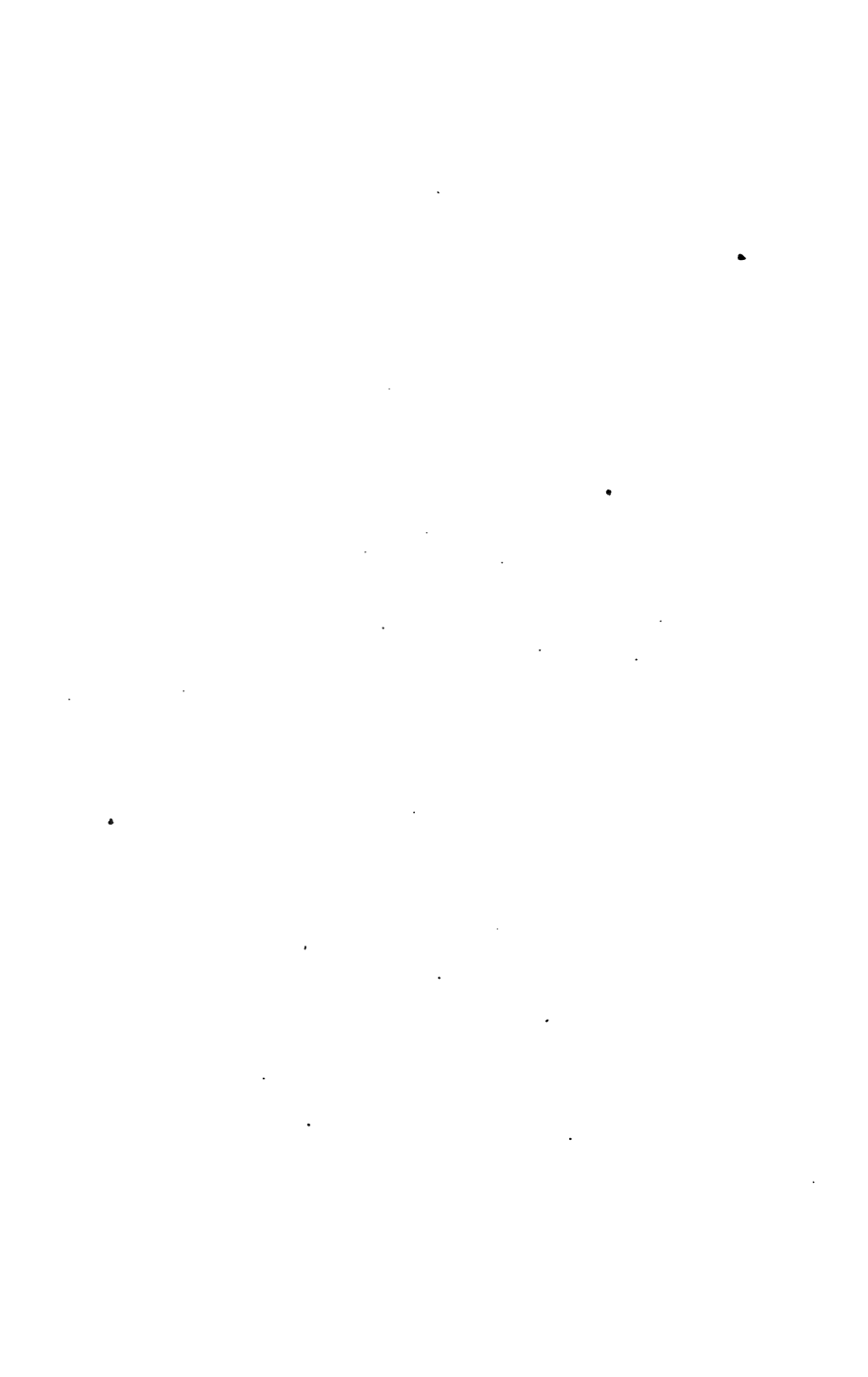
τινα τῆς $\triangle EZ$ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν EZ .

εἰ γὰρ δυνατόν, ἡ $AB\Gamma$ σφαῖρα πρὸς μείζονα λόγον ἔχέτω τῆς $\triangle EZ$ σφαίρας πρὸς τὴν A ἥπερ ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν EZ . ἀνάπαλιν ἄρα ἡ A σφαῖρα πρὸς τὴν $AB\Gamma$ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ EZ πρὸς τὴν $B\Gamma$. ὥς δὲ ἡ A σφαῖρα πρὸς τὴν $AB\Gamma$ σφαῖραν, οὕτως ἡ $\triangle EZ$ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς $AB\Gamma$ σφαίρας. καὶ ἡ $\triangle EZ$ ἄρα σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς $AB\Gamma$ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ EZ πρὸς τὴν $B\Gamma$ ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ $AB\Gamma$ σφαῖρα πρὸς μείζονά τινα τῆς $\triangle EZ$ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν EZ . ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἐλάσσονα. ἡ $AB\Gamma$ σφαῖρα πρὸς τὴν $\triangle EZ$ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν EZ .

Εὐκλείδου στοιχείων¹⁾ ιβ.

1) Infra add. στερεῶν.





1

1





UNIVERSITY OF MICHIGAN



3 9015 02597 9041

